

УДК 531.38

©2005. И.А. Болграбская, Н.Н. Щепин

**КОНЕЧНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ЗАМКНУТОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ**

Рассмотрена система  $n$  твердых тел, образующих замкнутую цепь [1]. Тела связаны упругими сферическими шарнирами. Такие шарниры позволяют учесть как изгибные, так и крутильные деформации моделируемого упругого объекта. Полагалось, что моделируемая упругая система физически линейна, но геометрически нелинейна. Такой подход позволяет изучать системы с учетом больших прогибов. Получены нелинейные уравнения движения введенной системы связанных тел в предположении отсутствия внешних сил и моментов. Найдены положения равновесия изучаемой системы. Детально изучен случай, когда ось моделируемого упругого стержня является замкнутой плоской кривой. Для этого случая в явном виде найдено частное решение, в котором ось симметрии замкнутой цепи твердых тел при  $n \rightarrow \infty$  совпадает с осью упругого стержня, моделирующего кольцевую молекулу.

**Введение.** Использование систем твердых тел, связанных упругими универсальными шарнирами, для моделирования колебаний упругих балочных систем позволило в ряде задач получить обозримые аналитические оценки [2 – 4]. Особо следует отметить конструктивный алгоритм, предложенный в [5], который позволяет находить резонансные скорости вращения, причем в случае  $n = 1, 2, 3$  низшие резонансные скорости могут быть выписаны в явном виде как функции параметров системы. Основной особенностью балочной теории и, как следствие, ее конечномерного аналога является предположение о малости относительных прогибов, что в случае конечномерной модели означает малость относительных углов поворота.

Однако в ряде задач, где прогибы достигают значительной величины, балочная теория не работает, а используется теория упругих стержней, учитывающая их геометрическую нелинейность. Одним из интересных практических приложений, получивших развитие в последние годы, является использование упругих стержней при моделировании третичной структуры молекулы ДНК. Установлено [6 – 8], что эти молекулы могут иметь как незамкнутую, так и замкнутую формы. Как отмечено в [7], наиболее удобными для экспериментальных исследований являются кольцевые молекулы. Исследованию геометрии кольцевых молекул с использованием стержневой модели посвящены работы [6 – 8].

Отмеченное выше успешное применение конечномерной модели при изучении динамики балочных конструкций дает возможность предположить, что она даст ряд преимуществ и при изучении динамики нелинейных стержневых систем. Настоящая работа посвящена изучению конечномерной модели замкнутого упругого стержня с учетом нелинейности упругих прогибов.

**1. Постановка задачи. Кинематические соотношения.** Рассмотрим систему  $n$  одинаковых гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами, расположенными в точках  $O_k$  пересечения осей симметрии гироскопов (см. рис. 1). Такие шарниры позволяют учитывать в сочленениях упругость как изгиба, так и кручения. Полагаем, что внешние силы и моменты отсутствуют, и, как следствие этого, общий центр масс системы тел  $S$  неподвижен. Свяжем с каждым телом  $S_k$  систему координат  $C_k X_k Y_k Z_k$  (орты  $e_k^i$ ;  $k = \overline{1, n}$ ;  $i = 1, 2, 3$ ), где  $C_k$  – центр масс тела  $S_k$ , а ось  $C_k Z_k$  направлена вдоль оси симметрии тела.

Будем считать, что центр масс  $C_k$  расположен в центре оси симметрии тела и

$$O_k O_{k+1} = 2O_k C_k = 2c. \quad (1)$$

Для замкнутых систем должно выполняться условие  $O_1 = O_{n+1}$ , которое с учетом (1) приводит к равенству

$$\sum_{k=1}^n O_k O_{k+1} = 2c \sum_{k=1}^n \mathbf{e}_k^3 = 0. \quad (2)$$

Определим положение системы координат  $C_k X_k Y_k Z_k$  по отношению к инерциальной  $XYZ$  углами Крылова  $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$ . Тогда из (2) следуют три скалярных соотношения:

$$f_1 = \sum_{k=1}^n \sin \psi_k \cos \theta_k = 0,$$

$$f_2 = \sum_{k=1}^n \sin \theta_k = 0, \quad f_3 = \sum_{k=1}^n \cos \psi_k \cos \theta_k = 0. \quad (3)$$

Обозначим через  $\mathbf{r}_{kc}$  расстояние от  $C_k$  до неподвижного центра  $C$ . По определению центра масс системы  $n$  одинаковых тел имеем

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_{kc} = 0. \quad (4)$$

Из векторного многоугольника (рис. 1) с учетом (1) следует

$$\mathbf{r}_{2c} = \mathbf{r}_{1c} + c(\mathbf{e}_1^3 + \mathbf{e}_2^3), \quad \mathbf{r}_{kc} = \mathbf{r}_{1c} + c(\mathbf{e}_1^3 + \mathbf{e}_k^3) + 2c \sum_{i=2}^{k-1} \mathbf{e}_i^3 \quad (k \geq 3). \quad (5)$$

Из (4) и (5) определяем

$$\mathbf{r}_{kc} = c \left\{ -\mathbf{e}_k^3 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (2i-1) \mathbf{e}_i^3 - \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n [2(n-i)+1] \mathbf{e}_i^3 \right\},$$

$$(k = \overline{1, n-1}), \quad (6)$$

$$\mathbf{r}_{nc} = c \left[ -\mathbf{e}_n^3 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \mathbf{e}_i^3 \right].$$

Кинетическая энергия изучаемой системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [m \dot{\mathbf{r}}_{kc}^2 + A(p_k^2 + q_k^2) + B r_k^2], \quad (7)$$

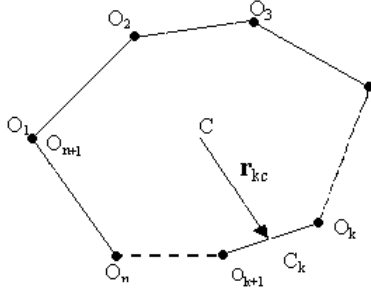


Рис. 1. Замкнутая система тел.

где  $m$  – масса тела  $S_k$ ,  $A, B$  – соответственно его экваториальный и осевой моменты инерции,  $p_k, q_k, r_k$  – компоненты абсолютной угловой скорости тела  $S_k$ , которые выражаются через углы  $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$ :

$$p_k = \dot{\psi}_k \cos \theta_k \sin \varphi_k + \dot{\theta}_k \cos \varphi_k, \quad q_k = \dot{\psi}_k \cos \theta_k \cos \varphi_k - \dot{\theta}_k \sin \varphi_k, \quad r_k = \dot{\varphi}_k - \dot{\psi}_k \sin \theta_k. \quad (8)$$

После дифференцирования (6) с учетом (8) выражение (7) приводится к виду

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[ A' (\dot{\psi}_j^2 \cos^2 \theta_j + \dot{\theta}_j^2) + B (\dot{\varphi}_j - \dot{\psi}_j \sin \theta_j)^2 + mc^2 \left( \sum_{i=1}^j b_{ij} A_{ij} + \sum_{i=j+1}^n c_{ij} A_{ij} \right) \right]. \quad (9)$$

Здесь

$$A' = A + mc^2;$$

$$A_{ij} = \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos \theta_i \cos \theta_j + (\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \sin \theta_i \sin \theta_j + \dot{\psi}_i \dot{\psi}_j \cos \theta_i \cos \theta_j) \cos(\psi_j - \psi_i) + (\dot{\theta}_i \dot{\psi}_j \sin \theta_i \cos \theta_j - \dot{\theta}_j \dot{\psi}_i \cos \theta_i \sin \theta_j) \sin(\psi_j - \psi_i);$$

$$b_{ij} = 4(i-1) + \frac{1}{n} [2j-1 - 2i(2i-1)] + \frac{1}{n^2} (2j-1)(2i-1)(i-j);$$

$$c_{ij} = 4j + \frac{1}{n} (4j^2 + 2j + 2i - 8ij - 1) + \frac{1}{n^2} (i-j)(2i-1)(2j-1).$$

Потенциальную энергию системы представим в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [k_1 (\varkappa_{1k}^2 + \varkappa_{2k}^2) + k_2 \varkappa_{3k}^2], \quad (10)$$

где  $k_1, k_2$  – соответственно жесткости изгиба и кручения, а

$$\varkappa_{1k} = (\psi_k - \psi_{k-1}) \cos \theta_k \sin \varphi_k + (\theta_k - \theta_{k-1}) \cos \varphi_k,$$

$$\varkappa_{2k} = (\psi_k - \psi_{k-1}) \cos \theta_k \cos \varphi_k - (\theta_k - \theta_{k-1}) \sin \varphi_k, \quad (11)$$

$$\varkappa_{3k} = \varphi_k - \varphi_{k-1} - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k.$$

Такой выбор потенциальной энергии позволяет учесть геометрическую нелинейность объекта в предположении, что углы  $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$  могут принимать произвольные значения, а их разности малы. Из (11) при  $n \rightarrow \infty$  ( $h \rightarrow 0$ ) получаем, что  $h\varkappa_{ik}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) совпадают с компонентами вектора Дарбу, а потенциальная энергия (10) – с потенциальной энергией упругого стержня [9].

После подстановки (11) в (10) имеем

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{k_1 [(\psi_k - \psi_{k-1})^2 \cos^2 \theta_k + (\theta_k - \theta_{k-1})^2] + k_2 [\varphi_k - \varphi_{k-1} - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k]^2\}. \quad (12)$$

В (12) входят значения углов  $\psi_0, \theta_0, \varphi_0$ , которые в случае замкнутых систем (при этом полагаем  $O_{n+1} = O_1$ ) таковы:

$$\psi_0 = \psi_n - 2\pi; \quad \theta_0 = \theta_n - 2\pi; \quad \varphi_0 = \varphi_n - 2\pi \quad (13)$$

**2. Уравнения движения.** Запишем уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа второго рода, учитывая, что обобщенные координаты  $q_i(\psi_i, \theta_i, \varphi_i)$  удовлетворяют дополнительным условиям (3). Тогда эти уравнения можно представить следующим образом [10]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^3 \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} = 0, \quad (14)$$

где  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – множители Лагранжа.

Подставляя в (14) выражения (3), (9), (12), получаем

$$\begin{aligned} & \ddot{\psi}_k (A' \cos^2 \theta_k + B \sin^2 \theta_k) - B \ddot{\varphi}_k \sin \theta_k + \dot{\psi}_k \dot{\theta}_k (B - A') \sin 2\theta_k - B \dot{\varphi}_k \dot{\theta}_k \cos \theta_k + \\ & + \mu \cos \theta_k \left\{ (2k - 1) \sum_{j=k+1}^n (2n - 2j + 1) F_{kj} + (2n - 2k + 1) \sum_{j=1}^k (2j - 1) F_{kj} \right\} + \\ & + k_1 [(\psi_k - \psi_{k-1}) \cos^2 \theta_k - (\psi_{k+1} - \psi_k) \cos^2 \theta_{k+1}] - k_2 \{ \sin \theta_k [\varphi_k - \varphi_{k-1} - \\ & - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k] - \sin \theta_{k+1} [\varphi_{k+1} - \varphi_k - (\psi_{k+1} - \psi_k) \sin \theta_{k+1}] \} + \\ & + \lambda_1 \cos \psi_k \cos \theta_k - \lambda_3 \sin \psi_k \cos \theta_k = 0 \quad (k = \overline{1, n}); \\ & A' [\ddot{\theta}_k + \dot{\psi}_k^2 \cos \theta_k \sin \theta_k] + B \dot{\psi}_k (\dot{\varphi}_k - \dot{\psi}_k \sin \theta_k) \cos \theta_k + \mu \left\{ (2k - 1) \sum_{j=k+1}^n (2n - 2j + \right. \quad (15) \\ & + 1) G_{kj} + (2n - 2k + 1) \sum_{j=1}^k (2j - 1) G_{kj} \left. \right\} - k_1 [\sin 2\theta_k (\psi_k - \psi_{k-1})^2 / 2 + \\ & + \theta_{k+1} - 2\theta_k + \theta_{k-1}] - k_2 \cos \theta_k [\varphi_k - \varphi_{k-1} - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k] + \\ & + \lambda_1 \sin \psi_k \sin \theta_k + \lambda_2 \cos \theta_k - \lambda_3 \cos \psi_k \sin \theta_k = 0 \quad (k = \overline{1, n}); \\ & B [\ddot{\varphi}_k - \ddot{\psi}_k \sin \theta_k - \dot{\psi}_k \dot{\theta}_k \cos \theta_k] - k_2 [\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1} + (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k - \\ & - (\psi_{k+1} - \psi_k) \sin \theta_{k+1}] = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Здесь  $\mu = mc^2/n$ ,  $\psi_{n+1} = \psi_1 + 2\pi$ ,  $\theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi$ ,  $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$ ;

$$\begin{aligned} F_{kj} &= \ddot{\psi}_j \cos \theta_j \cos(\psi_k - \psi_j) + \ddot{\theta}_j \sin \theta_j \sin(\psi_k - \psi_j) - 2\dot{\psi}_j \dot{\theta}_j \sin \theta_j \cos(\psi_k - \psi_j) + \\ & + (\dot{\theta}_j^2 + \dot{\psi}_j^2) \cos \theta_j \sin(\psi_k - \psi_j); \\ G_{kj} &= \ddot{\theta}_j [\cos \theta_j \cos \theta_k + \sin \theta_j \sin \theta_k \cos(\psi_k - \psi_j)] - \ddot{\psi}_j \cos \theta_j \sin \theta_k \sin(\psi_k - \psi_j) + \\ & + \dot{\theta}_j^2 [\cos \theta_j \sin \theta_k \cos(\psi_k - \psi_j) - \sin \theta_j \cos \theta_k] + 2\dot{\psi}_j \dot{\theta}_j \sin \theta_j \sin \theta_k \sin(\psi_k - \psi_j) + \\ & + \dot{\psi}_j^2 \cos \theta_j \sin \theta_k \cos(\psi_k - \psi_j) \end{aligned}$$

Система (3), (15) представляет замкнутую систему уравнений относительно неизвестных  $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ),  $\lambda_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ).

**3. Положение равновесия системы. Плоский случай.** Определим положение равновесия изучаемой системы, положив в уравнениях (15) скорости и ускорения обобщенных координат  $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) равными нулю. Тогда эти координаты должны удовлетворять системе (3) и уравнениям

$$\begin{aligned} & k_1[(\psi_k - \psi_{k-1}) \cos^2 \theta_k - (\psi_{k+1} - \psi_k) \cos^2 \theta_{k+1}] + k_2\{-\sin \theta_k[\varphi_k - \varphi_{k-1} - \\ & - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k] + \sin \theta_{k+1}[\varphi_{k+1} - \varphi_k - (\psi_{k+1} - \psi_k) \sin \theta_{k+1}]\} + \\ & + \lambda_1 \cos \psi_k \cos \theta_k - \lambda_3 \sin \psi_k \cos \theta_k = 0; \\ & k_1[\sin 2\theta_k(\psi_k - \psi_{k-1})^2/2 + \theta_{k+1} - 2\theta_k + \theta_{k-1}] + k_2 \cos \theta_k[\varphi_k - \varphi_{k-1} - \\ & - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k] - \lambda_1 \sin \psi_k \sin \theta_k - \lambda_2 \cos \theta_k + \lambda_3 \cos \psi_k \sin \theta_k = 0; \\ & \varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1} + (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k - (\psi_{k+1} - \psi_k) \sin \theta_{k+1} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В работах [6, 7] решение было получено в явном виде для случая, когда упругая линия представляет собой плоскую линию. Изучим этот частный случай и здесь, полагая

$$\theta_k = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (17)$$

После подстановки (17) в (16) и (3) и замены переменных

$$\lambda_1 = \lambda \cos \psi, \quad \lambda_3 = \lambda \sin \psi, \quad \tilde{\psi}_k = \psi_k + \psi \quad (18)$$

получим

$$k_1(\tilde{\psi}_{k+1} - 2\tilde{\psi}_k + \tilde{\psi}_{k-1}) - \lambda \sin \tilde{\psi}_k = 0, \quad (19)$$

$$\sum_{k=1}^n \sin \tilde{\psi}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \cos \tilde{\psi}_k = 0, \quad (20)$$

$$\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1} = 0. \quad (21)$$

В дальнейшем знак "~~" над  $\psi_k$  опускаем, а  $\lambda$  и  $\psi$  определяем из (18) через исходные параметры следующим образом:  $\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2} > 0$ ;  $\psi = \arctg(\lambda_3/\lambda_1)$ .

Из (19) – (21) заключаем, что в плоском случае углы  $\psi_k$  и  $\varphi_k$  независимы.

Учитывая граничное условие замкнутости системы (13) и равенство  $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$ , нетрудно убедиться, что система (21) имеет решение

$$\varphi_k = 2\pi k/n + \alpha, \quad (22)$$

где  $\alpha$  – произвольная постоянная

Вводя замену переменных

$$x_k = (\psi_k + \psi_{n-k+1})/2, \quad y_k = (\psi_k - \psi_{n-k+1})/2, \quad k = \overline{1, N}$$

(здесь полагалось  $n = 2N$  – четное число, что соответствует задаче моделирования симметричной молекулы ДНК) и учитывая (13), приводим системы (19), (20) к виду

$$\widehat{A}_1 X - \omega^2 \widehat{B}_1 = 0, \quad (23)$$

$$\widehat{A}_2 Y - \omega^2 \widehat{B}_2 = 2\pi E_1, \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^n \sin x_k \cos y_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \cos x_k \cos y_k = 0. \quad (25)$$

Здесь  $X, Y$  – соответственно матрицы-столбцы  $n$ -го порядка с элементами  $x_i, y_i$ ; а  $\widehat{B}_1, \widehat{B}_2$  – матрицы-столбцы с элементами  $b_i^1, b_i^2$ , равными  $b_i^1 = \sin x_i \cos y_i$ ,  $b_i^2 = \cos x_i \sin y_i$ ;  $\widehat{A}_1 = \{a_{ij}^1\}, \widehat{A}_2 = \{a_{ij}^2\}$  – якобиевы квадратные матрицы  $n$ -го порядка, в которых

$$a_{11}^1 = a_{NN}^1 = -1, \quad a_{ii}^1 = -2, \quad a_{ii+1}^1 = 1, \quad i = \overline{2, N-1},$$

$$a_{11}^2 = a_{NN}^2 = -3, \quad a_{ii}^2 = -2, \quad a_{ii+1}^2 = 1; \quad i = \overline{2, N-1},$$

$E_1$  – матрица-столбец, в которой  $e_1 = 1$ , а остальные  $e_i = 0$ ,  $\omega^2 = \lambda/k_1$ .

Из первых уравнений систем (23), (24) находим  $x_2, y_2$ , как функции  $x_1, y_1, \omega^2$ . Имеем

$$x_2 = x_1 + \omega^2 b_1(x_1, y_1) = f_2(x_1, y_1, \omega^2), \quad y_2 = 2\pi + y_1 + \omega^2 b_1^1(x_1, y_1) = f_2^1(x_1, y_1, \omega^2).$$

Учитывая эти выражения, из вторых уравнений находим  $x_3 = f_3(x_1, y_1, \omega^2)$ ,  $y_3 = f_3^1(x_1, y_1, \omega^2)$ . Подстановки найденных переменных в последующие уравнения позволяет из  $(k-1)$ -го уравнения определить  $x_k = f_k(x_1, y_1, \omega^2)$ ,  $y_k = f_k^1(x_1, y_1, \omega^2)$ . Тогда последние уравнения могут быть приведены к виду

$$F(x_1, y_1, \omega^2) = 0, \quad F_1(x_1, y_1, \omega^2) = 0. \quad (26)$$

Уравнения (25) дают еще дополнительные условия:

$$G(x_1, y_1) = 0, \quad G_1(x_1, y_1) = 0. \quad (27)$$

Входящие в (26), (27) функции  $F, F_1, G, G_1$  легко могут быть выписаны в явном виде.

Таким образом, положения равновесия системы (15), (17) находятся при одновременном удовлетворении условий (26), (27).

**4. Решение при условии  $\lambda = 0$ .** Полагая  $\lambda = 0$ , получаем  $\omega^2 = 0$  и система (23) становится системой однородных уравнений относительно  $x_k$ , а система (24) – системой неоднородных уравнений относительно  $y_k$ .

Нетрудно убедиться, что  $\det(A_1) = 0$ , так как

$$\Delta_N^1 = \Delta_{N-1}^1 = \dots = \Delta_2^1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad (28)$$

Здесь  $\Delta_k^1$  – определитель  $k$ -мерной матрицы  $\widehat{A}_1$ , ( $k = \overline{2, N}$ ).

Из (28) заключаем, что система уравнений (23) при условии  $\omega^2 = 0$  имеет ненулевое решение и, как нетрудно убедиться, оно равно

$$x_N = x_{N-1} = \dots = x_1 = x. \quad (29)$$

Здесь  $x$  – произвольная постоянная.

Обозначим определитель матрицы  $\widehat{A}_2$  через  $\det(A_2) = \Delta_N^2$ . Этот определитель может быть представлен так

$$\Delta_N^2 = \delta_N - 2\delta_{N-1} + \delta_{N-2}, \quad (30)$$

где  $\delta_n$  – определитель  $N$ -го порядка якобиевой матрицы  $\widehat{B}$ , в которой  $b_{ii} = -2$ ;  $b_{i, i+1} = 1$ .

Раскладывая  $\delta_N$  по первой строке, получаем  $\delta_N = -2\delta_{N-1} - \delta_{N-2}$ . Учитывая, что  $\delta_1 = -2$ ;  $\delta_3 = 3$ , нетрудно установить, что  $\delta_N = (-1)^N(N+1)$ . Подставляя это выражение в (30), получаем  $\Delta_N^2 = (-4)^N N \neq 0$ . Отсюда следует, что система линейных неоднородных уравнений (24) имеет единственное ненулевое решение.

Применяя к этой системе метод исключения неизвестных, находим

$$y_k = -\pi + \frac{2k-1}{2N}\pi \quad (k = \overline{1, N-1}), \quad y_N = -\frac{\pi}{2N}. \quad (31)$$

При учете (29) из (25) имеем

$$\sum_{k=1}^N \cos y_k = 0. \quad (32)$$

Поскольку из (31) следует  $\cos y_k = -\cos y_{N-k+1}$ , получаем, что решение (31) удовлетворяет соотношению (32). Возвращаясь к исходным переменным  $\psi_k$ , получаем

$$\psi_k = -\pi + x + \frac{2k-1}{2N}\pi, \quad \psi_{N+k} = \pi + x - \frac{2k-1}{2N}\pi, \quad k = \overline{1, N}.$$

Очевидно, что за счет выбора  $x$ , это решение может быть представлено, как и (22), в виде

$$\psi_k = 2\pi k/n + \alpha_1, \quad k = \overline{1, n}. \quad (33)$$

Здесь  $\alpha_1$  – произвольная постоянная.

Найденное решение (22), (33) при  $n \rightarrow \infty$  совпадает с определенным в [6 – 8] решением для стержневых систем, в которых упругая линия представляет собой окружность.

1. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. – 292 с.
2. Болграбская И.А., Савченко А.Я. Системы твердых тел, образующих полузамкнутую цепь // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26(1). – С. 33 – 39.
3. Bolgrabskaya I.A. Resonance velocities with half-closed chain // Пробл. нелинейного анализа в инженерных системах. Междунар. сб. – Казань, 2001. – 7, вып. 1(13). – С. 22–28.
4. Болграбская И.А. Влияние сдвиговых деформаций в системе двух гироскопов Лагранжа на резонансные частоты // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 33–36.
5. Болграбська І.О. Дослідження динамічних властивостей систем зв'язаних твердих тіл і їх застосування до вивчення властивостей стержневих конструкцій. – Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Донецьк, 1999. – 33 с.
6. Wadati M., Tsuru H. Elastic model of looped DNA // Physica. – 1986. – 21D. – P. 213-226.
7. Бензэм Дж. Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С. 308 – 338.
8. Starostin E.I. Three-dimensional shapes of looped DNA // Colloquium EVROMECH 325 (19-22 September, 1994, L'Aquila, Italy). – 1994. – 23 p.
9. Илюхин А.А. Специальные проблемы нелинейной теории упругих стержней. – К.: Наук. думка, 1979. – 120 с.
10. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 510 с.