

УДК 539.3

©2005. В.П. Шевченко, Н.В. Дергачева

## ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ ПОЛОГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Построено фундаментальное решение уравнений термоупругого равновесия пологих ортотропных оболочек произвольной гауссовой кривизны. Оно является решением температурной задачи для тонкостенных элементов конструкций при сосредоточенном температурном воздействии. Исследована зависимость термоупругого прогиба от термомеханических и геометрических параметров оболочек.

**Введение.** Температурная задача для пологих изотропных оболочек решена как для оболочек частного вида (сферических, цилиндрических) [1, 2], так и для оболочек положительной гауссовой кривизны [3]. Ее решением является фундаментальное решение уравнений термоупругого равновесия в перемещениях. Оно моделирует сосредоточенное температурное воздействие, которое заключается в наличие средней температуры или температурного момента лишь в одной точке срединной поверхности. В этом случае отпадает необходимость в решении задач теплопроводности.

Фундаментальное решение уравнений термоупругого равновесия пологих ортотропных оболочек построено в работе [4]. Однако в ней не исследованы особенности асимптотического поведения полученного решения в окрестности точки сосредоточенного температурного воздействия и не представлены численные результаты.

Построенное в данной работе фундаментальное решение уравнений термоупругого равновесия пологих ортотропных оболочек позволило определить особенности асимптотического поведения решения и провести численные исследования в широком диапазоне изменения геометрических и термомеханических параметров.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим тонкую пологую ортотропную оболочку толщиной  $h$ , отнесенную к ортогональной системе координат, совпадающей с главными осями ортотропии. Оболочка находится под действием стационарного температурного поля. Тогда перемещение точек срединной поверхности вдоль соответствующих осей координат удовлетворяют следующим уравнениям термоупругого равновесия [5]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu) - \mu(1-\nu)}{2\kappa} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\nu + \lambda \kappa^2}{\kappa R_y} \frac{\partial w}{\partial x} = \\ & = -\frac{1-\nu^2}{Eh} X(\kappa x, y) + \frac{(\alpha_x \kappa^2 + \nu \alpha_y)}{\kappa} \frac{\partial T_0(\kappa x, y)}{\partial x}, \\ & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \kappa \frac{(1+\nu) - \mu(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1 + \lambda \nu \kappa^2}{R_y} \frac{\partial w}{\partial y} = \\ & = -\frac{1-\nu^2}{Eh} \kappa^2 Y(\kappa x, y) + \frac{(\alpha_x \kappa^2 \nu + \alpha_y)}{\kappa^2} \frac{\partial T_0(\kappa x, y)}{\partial y}, \\ & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(1-\mu + \nu\mu) \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{12(1 + \lambda \kappa^2 (\nu + \lambda \kappa^2) + \lambda \nu \kappa^2)}{h^2 R_y^2} w + \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{12}{h^2 R_2} \left[ \varkappa (\nu + \lambda \varkappa^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (1 + \lambda \nu \varkappa^2) \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \\
 & = \frac{\varkappa^2}{D} Z(\varkappa x, y) - \frac{2}{h} \left[ (\alpha_x \varkappa^2 + \nu \alpha_y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\nu \varkappa^2 \alpha_x + \alpha_y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] T_1(\varkappa x, y) + \frac{12}{h^2 R_y} \times \\
 & \times \left[ \alpha_x \varkappa^2 (\nu + \lambda \varkappa^2) + \alpha_y (1 + \lambda \nu \varkappa^2) \right] T_0(\varkappa x, y).
 \end{aligned}$$

где  $\varkappa^4 = \nu_x / \nu_y = E_x / E_y$ ,  $E = \sqrt{E_x E_y}$ ,  $\nu = \sqrt{\nu_x \nu_y}$ ;  $E_x, E_y, \nu_x, \nu_y$  – соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона вдоль главных осей ортотропии;

$$\mu = \frac{E - 2G_{xy}(1 + \nu)}{E}, \quad G_{xy} - \text{модуль сдвига в срединной плоскости};$$

$\lambda = R_y / R_x$  – коэффициент кривизны,  $R_x, R_y$  – главные радиусы кривизны оболочки;

$\alpha_x, \alpha_y$  – температурные коэффициенты линейного расширения,  $T_0, T_1$  – интегральные характеристики температур [5].

Рассмотрим случай сосредоточенного температурного воздействия. Для его исследования используют две математические модели. Первая модель – сосредоточенный нагрев, предполагает отличное от нуля значение интегральных характеристик температуры лишь в одной точке срединной поверхности [5, 6]. Действие средней температуры в этой точке моделирует "плоское" температурное воздействие, а действие температурного момента – "изгибное" температурное воздействие. В соответствии с другой моделью – сосредоточенный источник тепла – в точке сосредоточенного воздействия на срединной поверхности находится "плоский" или "изгибной" источник тепла [7]. Используя первую модель, рассмотрим случай сосредоточенного температурного воздействия. Тогда интегральные характеристики температуры, стоящие в правой части уравнения (1), определяются по формулам

$$T_0 = \mu_0 \delta(\varkappa x, y), \quad T_1 = \mu_1 \delta(\varkappa x, y), \quad (2)$$

где  $\delta$  – двумерная дельта-функция Дирака;  $\mu_0, \mu_1$  – интенсивность "плоского" и "изгибного" сосредоточенного нагрева. Их размерность есть [градусы  $\times$  площадь].

**2. Решение задачи.** Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье к уравнениям (1), с учетом формул (2) приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно трансформант перемещений  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ :

$$\begin{aligned}
 L_{11} \bar{u} + L_{12} \bar{v} + L_{13} \bar{w} &= \bar{X}, \\
 L_{21} \bar{u} + L_{22} \bar{v} + L_{23} \bar{w} &= \bar{Y}, \\
 L_{31} \bar{u} + L_{32} \bar{v} + L_{33} \bar{w} &= \bar{Z}.
 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$L_{11} = \xi^2 + \frac{(1 - \nu)(1 - \mu)}{2} \eta^2, \quad L_{12} = \frac{(1 + \nu) - \mu(1 - \nu)}{2\varkappa} \xi \eta, \quad L_{13} = \frac{\nu + \lambda \varkappa^2}{\varkappa R_y} i \xi,$$

$$\begin{aligned}
 L_{21} &= \varkappa \frac{(1+\nu) - \mu(1-\nu)}{2} \xi \eta, & L_{22} &= \eta^2 + \frac{(1-\nu)(1-\mu)}{2} \xi^2, & L_{23} &= \frac{1 + \lambda \nu \varkappa^2}{R_y} i \eta, \\
 L_{31} &= -\frac{12\varkappa}{h^2 R_y} (\nu + \lambda \varkappa^2) i \xi, & L_{32} &= -\frac{12}{h^2 R_y} (1 + \lambda \nu \varkappa^2) i \eta, \\
 L_{33} &= [\xi^4 + 2(1-\mu + \nu\mu)\xi^2 \eta^2 + \eta^4] - \frac{12(1 + 2\lambda \varkappa^2 \nu + \lambda^2 \varkappa^4)}{h^2 R_y^2}; \\
 \bar{X} &= -\frac{Eh}{1-\nu^2} \mu_0 \frac{(\alpha_x \varkappa^2 + \nu \alpha_y)}{2\pi \varkappa} \xi i, & \bar{Y} &= -\frac{Eh}{1-\nu^2} \mu_0 \frac{(\alpha_x \varkappa^2 \nu + \alpha_y)}{2\pi \varkappa^2} \eta i, \\
 \bar{Z} &= \frac{6D}{\pi \varkappa^3 h^2 R_y} \mu_0 [\alpha_x \varkappa^2 (\nu + \lambda \varkappa^2) + \alpha_y (1 + \lambda \nu \varkappa^2)] - \frac{D}{\pi h \varkappa^2} \mu_1 [(\alpha_x \varkappa^2 + \nu \alpha_y) \xi^2 + \\
 &\quad + (\nu \varkappa^2 \alpha_x + \alpha_y) \eta^2], & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.
 \end{aligned}$$

Решение системы (3) достаточно громоздкое. Его структуру покажем на примере температурного прогиба  $w$ . Трансформанта в случае "плоского" температурного воздействия ( $t_0 = 1K$ ,  $t_1 = 0$ ) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \bar{w}^{(0)} &= \frac{A6\mu_0}{\varkappa \pi h^2 R_y a^2 \Delta_4} [\varkappa (\alpha_x \varkappa^2 + \nu \alpha_y) \xi^2 [(2 + \nu + \mu\nu) \lambda \varkappa^2 - (1 - \mu)] \eta^2 + \\
 &+ (\nu + \lambda \varkappa^2) (1 - \mu) \xi^2] + (\alpha_x \varkappa^2 \nu + \alpha_y) \eta^2 [(2 + \nu + \mu\nu) - (1 - \mu) \lambda \varkappa^2] \xi^2 + \\
 &+ (1 + \lambda \nu \varkappa^2) (1 - \mu) \eta^2] + \frac{A6}{\varkappa \pi h^2 R_y a} \frac{\Delta_2}{\Delta_4} [\alpha_x \varkappa^2 (\nu + \lambda \varkappa^2) + \alpha_y (1 + \lambda \nu \varkappa^2)],
 \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Delta_4 = \Delta_1 \Delta_2 + \Delta_3$ ,  $\Delta_3 = \frac{4(1-\mu)}{(2-\mu+\mu\nu)^2} \frac{12(1-\nu^2)}{R_y^2 h^2} (\xi^2 + \lambda \varkappa^2 \eta^2)^2$ ,

$$\Delta_1 = \left[ (\xi^2 + \eta^2)^2 + \frac{\mu(1-\nu)}{2-\mu+\mu\nu} (\xi^2 - \eta^2)^2 \right], \quad \Delta_2 = \left[ (\xi^2 + \eta^2)^2 - \frac{\mu(1+\nu)}{2-\mu+\mu\nu} (\xi^2 - \eta^2)^2 \right],$$

$$2a = 2 - \mu + \mu\nu, \quad A = \frac{Eh}{1-\nu^2}.$$

При "изгибном" температурном воздействии ( $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1K$ ), трансформанта выражается следующей формулой:

$$\bar{w}^{(1)} = -\frac{B\mu_1}{a\pi h \Delta_4} \left[ ((\alpha_x \varkappa^2 + \nu \alpha_y) \xi^2 + (\nu \varkappa^2 \alpha_x + \alpha_y) \eta^2) \left( (\xi^2 + \eta^2)^2 - \frac{\mu}{2a} (1+\nu) (\xi^2 - \eta^2)^2 \right) \right], \quad (5)$$

где  $B = \frac{D}{\varkappa^2}$ .

Перемещения находятся при помощи формулы обращения для двумерного преобразования Фурье:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (6)$$

Методику обращения покажем на примере температурного прогиба  $w$  при "изгибном" температурном воздействии. Применяя формулу (6) к трансформанте (5), получим

$$w^{(1)} = -B \frac{\mu_1}{h\pi^2 a} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\Delta_2}{\Delta_4} ((\alpha_x \kappa^2 + \nu \alpha_y) \xi^2 + (\alpha_y + \nu \kappa^2 \alpha_x) \eta^2) \cos(\eta y) \cos(\xi x) d\xi d\eta. \quad (7)$$

Переходим к полярным координатам  $\xi = \rho \cos(\theta)$ ,  $\eta = \rho \sin(\theta)$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Тогда температурный прогиб определяется формулой:

$$w^{(1)} = -\frac{\mu_1}{\pi^2 h a} I, \quad (8)$$

где

$$I = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3 \Delta_7}{\rho^4 \Delta_5 + \Delta_6} [1 - 4\tilde{\mu}(1 + \nu) \cos^2 2\theta] \cos(\rho r \sin \varphi \sin \theta) \cos(\rho r \cos \varphi \cos \theta) d\rho d\theta,$$

$$\Delta_5 = [1 + 4\tilde{\mu}(1 - \nu) \cos^2 2\theta] [1 - 4\tilde{\mu}(1 + \nu) \cos^2 2\theta],$$

$$\Delta_6 = \frac{4(1 - \mu)}{(2 - \mu + \mu\nu)^2} \frac{12(1 - \nu^2)}{R_y^2 h^2} (\cos^2 \theta + \lambda \kappa^2 \sin^2 \theta)^2,$$

$$\Delta_7 = ((\alpha_x \kappa^2 + \nu \alpha_y) \cos^2 \theta + (\nu \kappa^2 \alpha_x + \alpha_y) \sin^2 \theta).$$

Для разделения переменных в интеграле (8) воспользуемся разложением [8]:

$$\cos(\rho r \sin \varphi \sin \theta) \cos(\rho r \cos \varphi \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n I_{2n}(r\rho) \cos(2n\theta) \cos(2n\varphi).$$

С учетом этого разложения приходим к выражению

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_7}{\Delta_5} [1 - 4\tilde{\mu}(1 + \nu) \cos^2 2\theta] \cos 2n\theta \times \int_0^\infty \frac{\rho^3 I_{2n}(\rho r) d\rho}{\rho^4 + \frac{\kappa^2 k^4 t^2(\theta)}{\Delta_5}} d\theta, \quad (9)$$

где  $t(\theta) = \cos^2 \theta + \lambda \kappa^2 \sin^2 \theta$ ,  $\kappa^2 = (1 - \mu)/a^2$ ,  $k = \frac{12(1 - \nu^2)}{R_y^2 h^2}$ .

Значение несобственного интеграла в (9) выразим через значение специальной  $G$ -функции, введенной в работе [4],

$$\int_0^\infty \frac{\rho^2 I_{2n}(\rho r) \rho d\rho}{\rho^4 + \frac{\kappa^2 k^4 t^2(\theta)}{\Delta_5}} = G_{n,n} \left( r \left( i \frac{\kappa k^2 t^2(\theta)}{\Delta_5} \right)^{1/2} \right). \quad (10)$$

Окончательным значением для функции прогиба  $w(r, \varphi)$  в случае "изгибного" температурного воздействия является

$$w^{(1)} = -B \frac{\mu_1}{h\pi^2 a} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mn}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}), \quad (11)$$

где  $\zeta = kr$ ,

$$a_{mn} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \left( \frac{1 + \lambda \varkappa^2 (1 + 2\gamma \cos 2\theta)}{2\sqrt{\Delta_5}} \right)^{l+n} \varkappa^{l+n} \times \\ \times \frac{\cos(2n\theta) ((\alpha_x \varkappa^2 + \nu \alpha_y) \cos^2 \theta + (\nu \varkappa^2 \alpha_x + \alpha_y) \sin^2 \theta)}{[1 + 4\tilde{\mu}(1 - \nu) \cos^2 2\theta]} d\theta, \\ \tilde{\mu} = \frac{\mu}{2 - \mu + \mu\nu}, \quad \gamma = \frac{1 - \lambda \varkappa^2}{2(1 + \lambda \varkappa^2)}.$$

Для случая "плоского" температурного воздействия прогиб  $w(r, \varphi)$  имеет вид

$$w^{(0)} = \frac{6\mu_0 A}{\pi a^2 h \sqrt{12(1 - \nu^2)} \varkappa} \left( \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a'_{mn}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}) \right) + \quad (12) \\ + \frac{\mu_0 h A}{2\pi a \sqrt{12(1 - \nu^2)} \varkappa^2} \left( \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a''_{mn}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}) \right),$$

где

$$a'_{mn} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \left( \frac{t^2(\theta)}{\sqrt{\Delta_5}} \varkappa \right)^{l+n-1} \times \\ \times \left[ (1 - \mu) (\varkappa(\alpha_x \varkappa^2 + \nu \alpha_y)(\nu + \lambda \varkappa^2) \cos^4 \theta + (\alpha_x \varkappa^2 \nu + \alpha_y)(1 + \lambda \nu \varkappa^2) \sin^4 \theta) \frac{\cos(2n\theta)}{\Delta_5} + \right. \\ \left. + \frac{\sin^2 2\theta}{4\Delta_5} (\varkappa(\alpha_x \varkappa^2 + \nu \alpha_y) ((2 + \nu + \mu\nu) \lambda \varkappa^2 - (1 - \mu)) + \right. \\ \left. + (\alpha_x \varkappa^2 \nu + \alpha_y) ((2 + \nu + \mu\nu) - (1 - \mu) \lambda \varkappa^2) \right] d\theta, \\ a''_{mn} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \left( \frac{t^2(\theta)}{\sqrt{\Delta_5}} \varkappa \right)^{l+n-1} \times \\ \times [\alpha_y \varkappa^2 (\nu + \lambda \varkappa^2) + \alpha_x (1 + \lambda \nu \varkappa^2)] \left[ 1 - \frac{\mu}{2a} (1 + \nu) \cos^2 2\theta \right] \frac{\cos 2n\theta}{\Delta_5} d\theta.$$

Численные значения коэффициентов  $a_{mn}$ ,  $a'_{mn}$ ,  $a''_{mn}$  находятся методом Файлона [9]. Радиальная координата  $r$  входит лишь в аргумент  $G$ -функции, поэтому асимптотическое поведение полученного решения будет определяться асимптотическими свойствами специальной функции  $G_{n,m}(z)$  при  $|z| \ll 1$  [8]. С учетом этих свойств приходим к формулам:

для случая "плоского" температурного воздействия

$$w^{(0)} = C_1(\varphi) \left( \frac{r}{h} \right)^0, \quad (13)$$

для случая "изгибного" температурного воздействия

$$w^{(1)} = C_2(\varphi) \ln \frac{r}{h}, \quad (14)$$

где  $C_1(\varphi)$ ,  $C_2(\varphi)$  – функции, содержащие термомеханические параметры и зависящие лишь от координаты  $\varphi$ .

Асимптотические зависимости (13), (14) для функции прогиба  $w$  совпали с асимптотическим поведением термоупругого прогиба в сферической и цилиндрической оболочках, определенным другими авторами [1, 2].

**3. Численные результаты.** Численные исследования проведены для ортотропного материала АГ-4С со следующими термомеханическими параметрами [5]:

$$G_{xy} = 4.1 \cdot 10^3 \text{ Мн/м}^2, \quad \nu_x = 0.07, \quad E_x = 1.6 \cdot 10^4 \text{ Мн/м}^2, \quad E_y = 2.1 \cdot 10^4 \text{ Мн/м}^2, \\ \alpha_x = 0.7 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_y = 3.8 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}.$$

Рассчитывались значения термоупругого прогиба для "плоского" температурного воздействия ( $t_0 = 1^\circ\text{К}$ ,  $t_1 = 0$ ; см. рис. 1, 2) и для "изгибного" температурного воздействия ( $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1^\circ\text{К}$ ; см. рис. 3, 4).

Значение прогиба  $w$  и координаты даны в отношении к толщине оболочки  $h$ . На графиках  $W_{0,1}^* = \frac{w^{(0,1)}}{h}$ ,  $\zeta^* = \frac{\zeta}{h}$ .

Графики на рис. 1, 3 построены для сферической ( $\lambda = 1$ ) и цилиндрической ( $\lambda = 0$ ) оболочек.

На рис. 2, 4 показаны графики для различных механических моделей материала оболочки. Цифрой 1 обозначены кривые для ортотропного материала АГ-4С ( $\mu = 0.52$ ); цифрой 2 – для изотропного материала ( $\mu = 0$ ,  $E_x = E_y = 1.6 \cdot 10^4 \text{ Мн/м}^2$ ,  $\nu_x = \nu_y = 0.07$ ); цифрой 3 – для модели материала с "приведенной" ортотропией ( $\mu = 0$ ,  $E_x \neq E_y$ ,  $G_{xy} = \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})}$ ) [5].

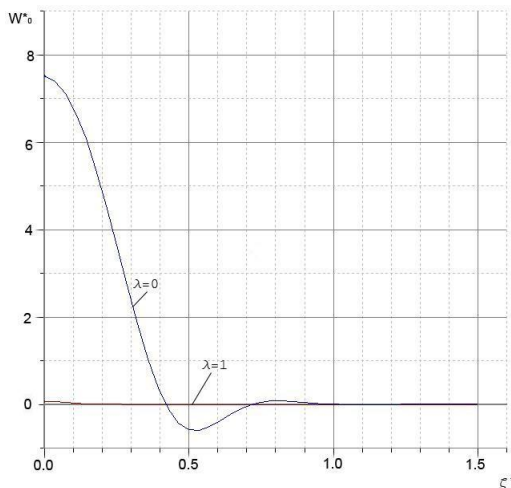


Рис. 1.

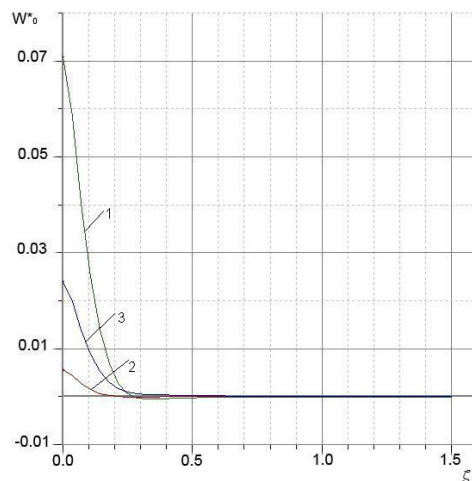


Рис. 2.

Графики для сферических и цилиндрических оболочек (рис. 1, 3) значительно отличаются между собой. Это говорит о том, что гауссова кривизна оказывает существенное влияние на значение термоупругого прогиба.

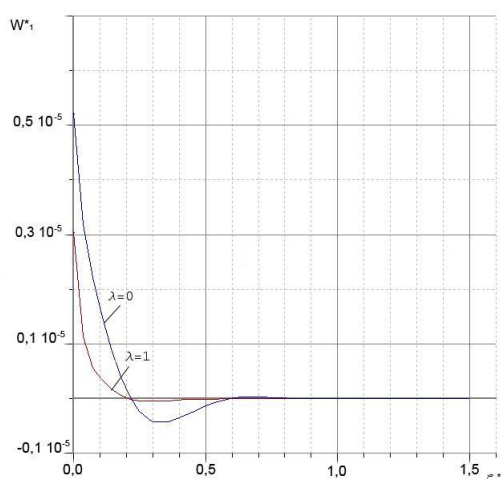


Рис. 3.

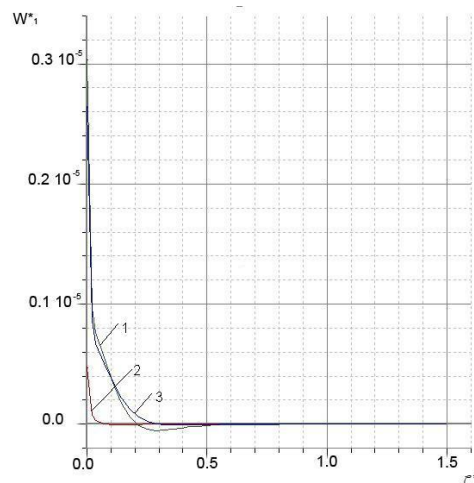


Рис. 4.

Графики на рис. 2, 4 позволяют заключить, что ортотропия материала оказывает значительное влияние на значение термоупругого прогиба. Из этого следует, что использование упрощенной модели "приведенной" ортотропии в случае "плоского" температурного воздействия может приводить к существенным погрешностям. При "изгибном" температурном воздействии (рис. 4) влияние ортотропии не существенно.

1. Ярема С.Я. Решение температурной задачи для пологой сферической оболочки в случае сосредоточенного нагрева // Науч. записки. Ин-т. машиновед. и автом. – 1964. – 9 вып. – С.80–89.
2. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. – М.:Мир, 1982. – 544 с.
3. Шевченко В.П. К температурной задаче пологих оболочек // Тр. VII всесоюзн. конферен. по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1970. – С.610–613.
4. Шевченко В.П. Фундаментальное решение температурной задачи для ортотропных оболочек // Прикл. механика. – 1977. – № 10. – С.59–66.
5. Шевченко В.П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С.159–196. (Механика композитов: В 12 т.; т.7).
6. Подстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурные напряжения в оболочках. – Киев: Изд-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
7. Шевченко В.П., Гольцев А.С. Термоупругое состояние ортотропных оболочек, нагреваемых сосредоточенными источниками тепла // Прикл. механика. – 2001. – 37, №5. – С.100–106.
8. Хиженяк В.П., Шевченко В.П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Учеб. пособие.– Донецк: ДонГУ, 1980. – 127 с.
9. Шевченко В.П. Дергачева Н.В. Распределение контактного давления под штампом в ортотропной оболочке произвольной кривизны // Теор. и прикл. механика: Сб. научн. тр. – Донецк, 2004. – С.133–137.