ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2005. Вып. 35

УДК 531.35

©2005. **Б.И. Коносевич**

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА, ЗАПИСАННЫХ В ФОРМЕ В.С. ПУГАЧЕВА

Дана оценка погрешности определения траектории центра масс снаряда, обусловленной неточностью, которая допущена при выводе уравнений движения снаряда в форме В.С. Пугачева.

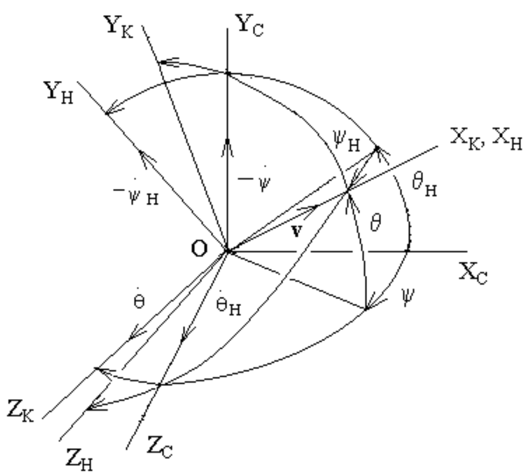

Рис. 1. Стартовая, траекторная и полускоростная системы координат.

1. Постановка задачи. Выбор основных переменных. Воспользуемся исходными обозначениями, принятыми в [1]. Пусть O – центр масс снаряда, O_0 – его положение в момент выстрела, $\boldsymbol{v}$ – скорость центра масс. Для определения положения точки O вводится стартовая система координат $O_0X_CY_CZ_C$, ось O_0Y_C которой направлена вертикально вверх, а ось O_0X_C направлена горизонтально в сторону стрельбы. Траекторная система координат $OX_KY_KZ_K$ получается из стартовой, перенесенной в начало O, двумя поворотами на углы ψ, θ (рис.1). Поэтому ее угловая скорость –

$$\boldsymbol{\omega}_K = -\dot\psi \boldsymbol{Y}_C + \dot\theta \boldsymbol{Z}_K. \tag{1}$$

Через $\boldsymbol{Y}_C, \boldsymbol{Z}_K$ здесь обозначены единичные векторы осей OY_C, OZ_K.

Для определения направления вектора $\boldsymbol{v}$ вместо θ, ψ иногда используются углы θ_H, ψ_H (см. рис. 1). Двумя поворотами на углы θ_H и ψ_H стартовая система координат $OX_CY_CZ_C$ переводится в полускоростную систему координат $OX_HY_HZ_H$.

В [1, 2] принят комбинированный способ задания направления вектора $\boldsymbol{v}$, а именно, применяются углы θ и ψ_H. Однако для $\boldsymbol{\omega}_K$ вместо (1) взято неверное выражение

$$\boldsymbol{\omega}_K = -\dot\psi_H \boldsymbol{Y}_K + \dot\theta \boldsymbol{Z}_K. \tag{2}$$

Поэтому полученные в [1, 2] уравнения движения снаряда определяют его траекторию с некоторой погрешностью. Ее оценка является целью настоящей работы.

Для получения такой оценки необходимо рассмотреть уравнения движения снаряда, соответствующие выражениям (1), (2) угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_K$. Переменные, описывающие в этих уравнениях поступательное движение снаряда, уже выбраны: это $x, y, z, v, \theta, \psi_H$. Поскольку целью данной работы является оценка погрешности определения траектории снаряда, то выбор переменных в уравнениях вращательного движения снаряда несущественен.

В [1, 2] в качестве таких переменных взяты проекции z_1, z_2, z_3 единичного вектора оси симметрии на оси OY_K, OZ_K, OX_K и проекция p вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости снаряда на его ось симметрии. Так как $z_3 = \sqrt{1 - z_1^2 - z_2^2}$ при $z_3 \geq 0$, то при таком выборе переменных колебания оси симметрии описываются системой двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно z_1, z_2, содержащей $\ddot{\theta}, \ddot{\psi}_H$. Для вычисления $\ddot{\theta}, \ddot{\psi}_H$ необходимо дифференцировать правые части соответствующих уравнений поступательного движения, включающие подъемную силу и силу Магнуса. На практике коэффициенты аэродинамических сил обычно задаются в виде таблиц, и поэтому их дифференцирование снижает точность численного интегрирования уравнений движения. Другим недостатком уравнений угловых колебаний оси симметрии, записанных в переменных z_1, z_2 без использования проекций q, r угловой скорости, является то, что после приведения их к нормальному виду путем выбора $u_1 = \dot{z}_1, u_2 = \dot{z}_2$ в качестве дополнительных переменных они становятся чрезвычайно громоздкими.

Чтобы устранить эти недостатки, достаточно в уравнениях угловых колебаний вместо $\dot{z}_1, \dot{z}_2$ принять в качестве переменных проекции q, r вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси специальным образом выбранной полусвязанной системы координат $OX_1Y_1Z_1$. Ее удобно определить следующим образом. Пусть δ – пространственный угол атаки, то есть угол между вектором $\boldsymbol{v}$ и положительным направлением оси симметрии. Через ν обозначаем угол поворота плоскости угла атаки вокруг направления OX_K скорости $\boldsymbol{v}$.

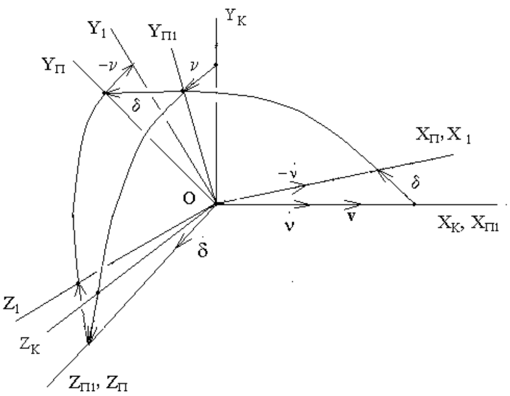

Рис. 2. Переход от системы координат $OX_KY_KZ_K$ к системам $OX_{\Pi 1}Y_{\Pi 1}Z_{\Pi 1}$, $OX_\Pi Y_\Pi Z_\Pi$ и $OX_1Y_1Z_1$.

Введем теперь поточную систему координат $OX_{\Pi 1}Y_{\Pi 1}Z_{\Pi 1}$ и систему координат $OX_\Pi Y_\Pi Z_\Pi$, связанную с пространственным углом атаки, как показано на рис. 2. Ось $OX_{\Pi 1}$ имеет направление $\boldsymbol{v}$, а ось OX_Π направлена вдоль оси симметрии снаряда. При повороте траекторной системы координат $OX_KY_KZ_K$ на угол ν вокруг направления OX_K скорости $\boldsymbol{v}$ она переходит в поточную систему координат $OX_{\Pi 1}Y_{\Pi 1}Z_{\Pi 1}$. Поворот последней на угол δ вокруг направления $OZ_{\Pi 1}$ дает систему координат $OX_\Pi Y_\Pi Z_\Pi$, связанную с пространственным углом атаки. Повернем систему $OX_\Pi Y_\Pi Z_\Pi$ вокруг оси симметрии OX_Π на угол $-\nu$. Получим систему координат $OX_1Y_1Z_1$, которую примем в качестве полусвязанной (рис. 2). Дополнительно повернув ее вокруг оси OX_1 на некоторый угол γ, получим связанную со снарядом систему координат $OXYZ$.

Пусть p, q, r – проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости снаряда на полусвязанные оси. Проекции единичного вектора оси симметрии $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_\Pi$ на оси OY_K, OZ_K, OX_K выражаются через углы ν, δ по формулам $z_1 = \sin\delta\cos\nu,\ z_2 = \sin\delta\sin\nu,\ z_3 = \cos\delta$.

2. Аэродинамические силы и моменты. Обозначим через R_x, R_y, R_z проекции главного вектора $\boldsymbol{R}$ действующих на снаряд аэродинамических сил на оси $OX_{\Pi 1}Y_{\Pi 1}Z_{\Pi 1}$. Здесь R_x – сила лобового сопротивления, R_y – подъемная сила, R_z – сила Магнуса. Главный момент аэродинамических сил относительно центра масс равен сумме $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_D$. Проекциями момента $\boldsymbol{M}$ на оси OY_Π, OZ_Π являются момент Магнуса M_y и опрокидывающий момент M_z. Демпфирующий момент $\boldsymbol{M}_D$ равен сумме $\boldsymbol{M}_D = \boldsymbol{M}_{D1} + \boldsymbol{M}_{D2}$, где осевой демпфирующий момент $\boldsymbol{M}_{D1}$ пропорционален продольной составляющей вектора $\boldsymbol{\omega}$, а поперечный демпфирующий момент $\boldsymbol{M}_{D2}$ пропорционален поперечной составляющей $\boldsymbol{\Omega} = q\boldsymbol{Y}_1 + r\boldsymbol{Z}_1$ вектора $\boldsymbol{\omega}$: $\boldsymbol{M}_{D1} = M_p p\boldsymbol{X}_1$, $\quad \boldsymbol{M}_{D2} = M_\Omega(q\boldsymbol{Y}_1 + r\boldsymbol{Z}_1)$. Величины $R_x, R_y, R_z, M_y, M_z, M_p, M_\Omega$ зависят от y, v, δ, а R_z, M_y зависят также и от p.

Как известно, R_x, M_p, M_Ω являются четными, а R_y, R_z, M_y, M_z – нечетными функциями угла δ. В полетном диапазоне скоростей аэродинамические силы и моменты

R_x, R_y, R_z, M_y, M_z приблизительно пропорциональны v^2, а коэффициенты M_p, M_Ω демпфирующих моментов приблизительно пропорциональны v. Поэтому, выделяя множители v^2 и v в выражениях соответствующих сил и моментов, получим для них формулы

$$R_x = v^2 R_1(y,v,\delta),\ R_y = v^2 R_2(y,v,\delta)\sin\delta,\ R_z = v^2 R_3(y,v,p,\delta)\sin\delta,\ M_y =$$

$$= v^2 M_2(y,v,p,\delta)\sin\delta,\ M_z = v^2 M_3(y,v,\delta)\sin\delta,\ M_p = vM_{1D}(y,v,\delta),\ M_\Omega = vM_{2D}(y,v,\delta),$$

где $R_1, R_2, R_3, M_2, M_3, M_{1D}, M_{2D}$ – четные функции угла δ, сравнительно слабо изменяющиеся при изменении v в полетном диапазоне скоростей.

Будем рассматривать практически интересный случай, когда $|\delta| \le \pi/2$, и следовательно, $\cos\delta = z_3 \ge 0$. Тогда $z_3 = \sqrt{1 - z_1^2 - z_2^2}$, и нет необходимости использовать переменную z_3. При $|\delta| \le \pi/2$ отображение $\delta \to \sin\delta$ взаимно однозначно. Поэтому функции $R_1, R_2, R_3, M_2, M_3, M_{1D}, M_{2D}$ можно рассматривать зависящими от δ посредством величины $\zeta = \sin\delta$. Так как эти функции четные по δ, то они являются четными и по ζ, и следовательно, могут быть представлены разложениями по степеням $\zeta^2 = z_1^2 + z_2^2$.

3. Уравнения движения снаряда. В качестве исходной принимаем систему уравнений движения снаряда, полученную с помощью верного выражения (1) для $\boldsymbol{\omega}_K$. Для краткости назовем ее И-системой. Систему уравнений движения снаряда, полученную с использованием неверного выражения (2), назовем П-системой. В качестве фазовых переменных в этих уравнениях выбираем величины $x, y, z, v, \theta, \psi_H, p, q, r, z_1, z_2$, определенные выше. При записи уравнений движения удобно использовать аналитическую функцию $c(\delta) = (1 - \cos\delta)/\sin^2\delta$, четную по δ и ζ. Введем в уравнения движения малый параметр ε с помощью процедуры, описанной в [3]. При этом так же, как в [4], примем для v^2 предположение $O^*(\varepsilon) \le v^2 \le O^*(1)$, а порядок членов с подъемной боковой силой в уравнениях поступательного движения считаем равным ε^4. Новые фазовые переменные вводятся как отношения исходных переменных к верхним характерным значениям их модулей. Для новых переменных оставим те же обозначения, что и для соответствующих исходных переменных. Полученные таким путем уравнения движения снаряда представим в квазилинейной форме по q, r, z_1, z_2. Для этого воспользуемся разложениями (см. формулы (6) в [3])

$$R_j(y,v,p,\zeta,\varepsilon) = R_j^{(0)}(y,v,p) + \varepsilon^3\zeta^2 R_j^{(2)}(y,v,p,\zeta,\varepsilon),\quad j = 1,2,3;$$
$$M_{1D}(y,v,\zeta,\varepsilon) = M_{1D}^{(0)}(y,v) + \varepsilon^3\zeta^2 M_{1D}^{(2)}(y,v,\zeta,\varepsilon);$$
$$M_{2D}(y,v,\zeta,\varepsilon) = M_{2D}^{(0)}(y,v) + \varepsilon^2\zeta^2 M_{2D}^{(2)}(y,v,\zeta,\varepsilon);$$
$$M_2(y,v,p,\zeta,\varepsilon) = M_2^{(0)}(y,v,p) + \varepsilon^3\zeta^2 M_2^{(2)}(y,v,p,\zeta,\varepsilon);$$
$$M_3(y,v,\zeta,\varepsilon) = M_3^{(0)}(y,v) + \varepsilon^4\zeta^2 M_3^{(2)}(y,v,\zeta,\varepsilon).$$

Запишем сначала *П-систему* с малым параметром ε. Для нее уравнения поступательного движения и продольного вращения таковы

$$\dot{x} = \varepsilon^3 v\sqrt{\cos^2\theta - \sin\varepsilon^2\psi_H},\quad \dot{y} = \varepsilon^3 v\sin\theta,\quad \varepsilon^2\dot{z} = \varepsilon^3 v\sin\varepsilon^2\psi_H,$$

$$\dot{v} = \varepsilon^3\frac{v^2}{m}R_1^{(0)}(y,v) - \varepsilon^4 g\sin\theta + h_v(y,v,z_1,z_2,\varepsilon),$$

$$\dot{\theta} = -\varepsilon^4\frac{g}{v}\cos\theta + \varepsilon^4\frac{v}{m}[R_2^{(0)}(y,v)z_1 - R_3^{(0)}(y,v,p)z_2] + h_\theta(y,v,p,z_1,z_2,\varepsilon), \tag{3}$$

$$\varepsilon^2\dot{\psi}_H = \varepsilon^4\frac{v}{m}[R_2^{(0)}(y,v)z_2 + R_3^{(0)}(y,v,p)z_1] + h_\psi(y,v,p,z_1,z_2,\varepsilon)$$
$$\dot{p} = \varepsilon^4\frac{p}{I_1}vM_{1D}^{(0)}(y,v) + h_p(y,v,p,z_1,z_2,\varepsilon).$$

Здесь дополнительные члены равны

$$\begin{aligned}
&h_v(y,v,z_1,z_2,\varepsilon) = \varepsilon^6\zeta^2\frac{v^2}{m}R_1^{(2)}(y,v,\zeta,\varepsilon),\\
&h_\theta(y,v,p,z_1,z_2,\varepsilon) = \varepsilon^7\zeta^2\frac{v}{m}[R_2^{(2)}(y,v,\zeta,\varepsilon)z_1 - R_3^{(2)}(y,v,p,\zeta,\varepsilon)z_2],\\
&h_\psi(y,v,p,z_1,z_2,\varepsilon) = \varepsilon^7\zeta^2\frac{v}{m}[R_2^{(2)}(y,v,\zeta,\varepsilon)z_2 + R_3^{(2)}(y,v,p,\zeta,\varepsilon)z_1],\\
&h_p(y,v,p,z_1,z_2,\varepsilon) = \varepsilon^7\frac{p}{I_1}\zeta^2vM_{1D}^{(2)}(y,v,\zeta,\varepsilon).
\end{aligned}\tag{4}$$

Уравнения угловых колебаний оси симметрии снаряда для П-системы, записанные с использованим комплексных переменных $\Omega = q + ir, \Delta = z_1 + iz_2$, имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot{\Omega} = a(y,v,p,\varepsilon)\Omega + b(y,v,p,\varepsilon)\Delta + h_\Omega(y,v,\theta,p,q,r,z_1,z_2,\varepsilon),\\
&\dot{\Delta} = -i\Omega - k(y,v,p,\varepsilon)\Delta + l(v,\theta,\varepsilon) + h_\Delta(y,v,\theta,p,q,r,z_1,z_2,\varepsilon).
\end{aligned}\tag{5}$$

Коэффициенты линейных членов этих уравнений выражаются формулами

$$\begin{aligned}
&a(y,v,p,\varepsilon) = \frac{1}{I_2}[\varepsilon^2vM_{2D}^{(0)}(y,v) + iI_1p], \quad b(y,v,p,\varepsilon) = \frac{v^2}{I_2}[\varepsilon^2M_2^{(0)}(y,v) + iM_3^{(0)}(y,v,p)],\\
&k(y,v,p,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2v}{m}[R_2^{(0)}(y,v) + iR_3^{(0)}(y,v,p)], \quad l(v,\theta,\varepsilon) = \varepsilon^2\frac{g}{v}\cos\theta,
\end{aligned}\tag{6}$$

а дополнительные члены –

$$\begin{aligned}
&h_\Omega(y,v,\theta,p,q,r,z_1,z_2,\varepsilon) = \varepsilon^4\Omega\big\{\frac{v}{I_2}(z_1^2+z_2^2)M_{2D}^{(2)}(y,v,\zeta,\varepsilon) - i(z_1q+z_2r)c(\varepsilon^2\zeta)+\\
&\quad+i\varepsilon^2\frac{v}{m}R_3(y,v,p,\zeta,\varepsilon)(z_1^2+z_2^2)c(\varepsilon^2\zeta) + i\varepsilon^2\frac{g}{v}z_2c(\varepsilon^2\zeta)\cos\theta\big\}+\\
&\quad+\varepsilon^4\Delta\frac{v^2}{I_2}(z_1^2+z_2^2)\big[M_2^{(2)}(y,v,\zeta,\varepsilon) + iM_3^{(2)}(y,v,p,\zeta,\varepsilon)\big],\\
&h_\Delta(y,v,\theta,p,q,r,z_1,z_2,\varepsilon) = \varepsilon^4\Delta\big\{(z_2q - z_1r)c(\varepsilon^2\zeta)+\\
&\quad+\varepsilon^2\frac{v}{m}(z_1^2+z_2^2)c(\varepsilon^2\zeta)\big[R_2(y,v,\zeta,\varepsilon) + iR_3(y,v,p,\zeta,\varepsilon)\big]-\\
&\quad-\varepsilon\frac{v}{m}(z_1^2+z_2^2)\big[R_2^{(2)}(y,v,\zeta,\varepsilon) + iR_3^{(2)}(y,v,p,\zeta,\varepsilon)\big]\big\} - \varepsilon^6\frac{g}{v}(z_1^2+z_2^2)c(\varepsilon^2\zeta)\cos\theta.
\end{aligned}\tag{7}$$

В *И-системе* уравнения поступательного движения и продольного вращения попрежнему имеют вид (3) за исключением уравнения, определяющего $\dot{\psi}_H$. Его можно записать следующим образом

$$\varepsilon^2\dot{\psi}_H = \varepsilon^4\frac{v}{m}[R_2^{(0)}(y,v)z_2 + R_3^{(0)}(y,v,p)z_1] + h_\psi(y,v,p,z_1,z_2,\varepsilon) + g_\psi(y,v,\theta,\psi_H,p,z_1,z_2,\varepsilon).\tag{8}$$

Здесь

$$g_\psi(y,v,\theta,\psi_H,p,z_1,z_2,\varepsilon)=\varepsilon^4\frac{g\sin\theta\sin\varepsilon^2\psi_H}{v\cos\varepsilon^2\psi_H}+\varepsilon^4\frac{v}{m}\Big[\frac{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\varepsilon^2\psi_H}}{\cos\theta\cos\varepsilon^2\psi_H}-1\Big]\times$$
$$\times[R_2(y,v,\zeta,\varepsilon)z_2+R_3(y,v,p,\zeta,\varepsilon)z_1]+\varepsilon^4\frac{v\sin\theta\sin\varepsilon^2\psi_H}{m\cos\theta\cos\varepsilon^2\psi_H}[R_3(y,v,\zeta,\varepsilon)z_2-R_2(y,v,\zeta,\varepsilon)z_1]. \tag{9}$$

Уравнения угловых колебаний для И-системы имеют вид

$$\begin{aligned}&\dot\Omega=a(y,v,p,\varepsilon)\Omega+b(y,v,p,\varepsilon)\Delta+h_\Omega(y,v,\theta,p,q,r,z_1,z_2,\varepsilon)+g_\Omega(y,v,\theta,p,z_1,z_2,\varepsilon),\\&\dot\Delta=-i\Omega-k(y,v,p,\varepsilon)\Delta+l(v,\theta,\varepsilon)+h_\Delta(y,v,\theta,p,q,r,z_1,z_2,\varepsilon)+g_\Delta(y,v,\theta,p,z_1,z_2,\varepsilon).\end{aligned} \tag{10}$$

Они отличаются от (5) одинаковыми добавками

$$g_\Omega,g_\Delta(y,v,\theta,p,z_1,z_2,\varepsilon)=i\varepsilon^4\frac{v}{m}[R_2(y,v,\zeta,\varepsilon)z_2+R_3(y,v,p,\zeta,\varepsilon)z_1]\operatorname{tg}\theta. \tag{11}$$

Уравнения движения рассматриваются на промежутке времени $[t_0;t_{\max}]$, где t_0 – момент выстрела, $t_{\max}$ – верхняя граница моментов t_1 падения снаряда на землю. Длина этого промежутка $t_{\max}-t_0=O(\varepsilon^{-3})$.

Здесь и далее $O(\varepsilon^n)$ $[O^*(\varepsilon^n)]$ обозначают величины, порядок которых в рассматриваемой области изменения фазовых переменных и времени больше либо равен ε^n [строго равен ε^n]. При этом для положительных величин используются обозначения $O_+(\varepsilon^n)$ $[O_+^*(\varepsilon^n)]$.

Переменные в левых частях уравнений поступательного движения и продольного вращения образуют вектор $\xi=(x,y,\varepsilon^2z,v,\theta,\varepsilon^2\psi_H,p)$. Диапазоны изменения компонент этого вектора для И-системы предполагаются известными по порядку, так что при всех возможных траекториях полета снаряда вектор ξ для И-системы принадлежит замкнутому параллелепипеду

$$\Xi=\{\xi:(0,0,-\varepsilon^2C_z^*,\sqrt{\varepsilon}C_{v*},-C_\theta^*,-\varepsilon^2C_\psi^*,C_{p*})\le\xi\le(C_x^*,C_y^*,\varepsilon^2C_z^*,C_v^*,C_\theta^*,\varepsilon^2C_\psi^*,C_p^*)\}. \tag{12}$$

Здесь буквой C с индексами обозначены положительные постоянные порядка 1. Норму $||\xi||$ вектора ξ определим как максимум модулей его компонент.

Для И- и П-системы замкнутую подсистему образуют уравнения, определяющие четырехмерный вектор $\xi^{(4)}=(y,v,\theta,p)$ и переменные $\Omega=q+ir$, $\Delta=z_1+iz_2$. Аэродинамические функции в линейной части уравнений движения снаряда зависят от вектора $\xi^{(3)}=(y,v,p)$. Замкнутые области изменения $\xi^{(4)},\xi^{(3)}$ для И-системы, соответствующие (12), обозначаются через $\Xi^{(4)},\Xi^{(3)}$.

Порядки аэродинамических функций по ε определяются порядком скорости v. Поэтому функции, получающиеся путем выделения множителей v^2,v в соответствующих аэродинамических функциях, равны $O^*(1)$ в $\Xi^{(3)}$:

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ M_{1D},\ M_{2D},\ M_2,\ M_3\ (y,v,p)=O^*(1),\quad (y,v,p)\in\Xi^{(3)}. \tag{13}$$

Все их частные производные до второго порядка включительно предполагаются равными $O(1)$ в $\Xi^{(3)}$. Это обозначается следующим образом

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ M_2,\ M_3,\ M_{1D},\ M_{2D}\ (y,v,p)=O^2(1),\quad (y,v,p)\in\Xi^{(3)}. \tag{14}$$

Соотношение $\xi \in \Xi$ вместе с (13), (14) позволяет оценить в И-системе порядки максимумов модулей и постоянных Липшица по ξ для функций, связанных с уравнениями движения и зависящих от ξ, ε. Однако из выполнения этих соотношений для И-системы не следует, что они имеют место и для П-системы на всем промежутке $[t_0; t_{\max}]$. Чтобы обойти эту трудность, введем замкнутую область Ξ_ε, содержащую Ξ, полагая

$$\begin{aligned}\Xi_\varepsilon = \{\xi : (-\varepsilon, -\varepsilon, -1, \sqrt{\varepsilon}(C_{v*} - \varepsilon), -C_\theta^* - \varepsilon, -1, C_{p*} - \varepsilon) \le \xi \le \\ \le (C_x^* + \varepsilon, C_y^* + \varepsilon, 1, C_v^* + \varepsilon, C_\theta^* + \varepsilon, 1, C_p^* + \varepsilon)\}.\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь все постоянные, обозначенные буквой C с индексами, изменены не более, чем на ε, по сравнению с определением Ξ. Поэтому в области Ξ_ε функции, связанные с уравнениями движения снаряда, имеют такие же по порядку максимумы модулей и постоянные Липшица по ξ, как и в Ξ.

4. Приближенные решения уравнений угловых колебаний. Обозначим через $e_1, d_1(\xi^{(4)}, \varepsilon)$ значения Ω, Δ, при которых правые части (5) равны нулю:

$$e_1 = bl/(ib - ak), \quad d_1 = -al/(ib - ak).$$

Для функции $a(\xi^{(3)}, \varepsilon)$, определенной в (6), производная по t в силу (3) имеет вид $\dot a(\xi^{(4)}, \varepsilon) = a_0^1(\xi^{(3)}, \varepsilon) + a_1^1(\xi^{(4)}, \varepsilon)$, где $a_0^1(\xi^3, \varepsilon) = i\varepsilon^4 pvM_{1D}^{(0)}(y, v)/I_2$ – главный, a_1^1 – дополнительный члены. Введем функции w, $\lambda_j = n_j + i\omega_j$, зависящие от $\xi^{(3)}$, ε, и функции $\lambda_j^+(\xi^{(4)}, \varepsilon)$ $(j = 1, 2)$ по формулам

$$w = \frac{(a-k)^2}{4} - ib + ak - \frac{a_0^1}{2}, \quad \lambda_j = \frac{a-k}{2} \pm \sqrt{w}, \quad \lambda_j^+ = \lambda_j - \frac{\dot w}{4w} \qquad (j = 1, 2),$$

верхний знак соответствует $j = 1$, а нижний – $j = 2$. Через ρ обозначим зависящую от $\xi^{(4)}, z_1, z_2, \varepsilon$ функцию

$$\rho = \frac{1}{w^{1/2}}\left(\frac{\ddot w}{8w} - \frac{5\dot w^2}{32w^2} - \frac{a_1^1 + \dot k}{4}\right).$$

Для И-системы предполагается, что $\Omega, \Delta(t_0, \varepsilon) = O(1)$, а на траектории полета снаряда выполнено условие Маиевского $1 - 4I_2v^2M_3^{(0)}/I_1^2p^2 > 0$ и неравенства $n_1, n_2 \le \le O_+(\varepsilon^4)$. Тогда так же, как в [5], устанавливаются оценки

$$\Omega, \Delta(t; \varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0; t_{\max}]. \tag{16}$$

С учетом соотношения $\xi \in \Xi$ они позволяют определить для И-системы порядки связанных с ней функций, зависящих от всех фазовых переменных. В частности, имеем

$$\begin{aligned}&e_1 = O(\varepsilon^{3/2}),\ d_1 = O(\varepsilon^{1/2}),\ \dot e_1 = O(\varepsilon^5),\ \dot d_1 = O(\varepsilon^4),\ k = O(\varepsilon^2),\ \dot k = O(\varepsilon^5);\\ &a_0^1 = O(\varepsilon^4),\ a_1^1 = O(\varepsilon^5),\ w = O^*(1),\ \dot w = O(\varepsilon^3),\ \ddot w = O(\varepsilon^6),\ \rho = O(\varepsilon^5);\\ &\lambda_j, \lambda_j^+, \omega_j = O(1),\ n_j = O(\varepsilon^2)\ (j = 1, 2);\ 1/\omega_1 = O^*(1),\ 1/\omega_2 = O(\varepsilon^{-1}).\end{aligned} \tag{17}$$

Поскольку $t_{\max} - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, то при $n_1, n_2 \le O_+(\varepsilon^4)$ получаем

$$\left|\exp\int_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau, \varepsilon)\, d\tau\right| = \exp\int_{t_0}^{t} n_j(\tau, \varepsilon)\, d\tau = 1 + O_+(\varepsilon), \quad t \in [t_0; t_{\max}],\ j = 1, 2. \tag{18}$$

Кроме того, в соответствии с формулами (4), (7),(11) на решении И-системы будет

$$h_v = O(\varepsilon^6); \quad h_\theta, h_\psi, h_p = O(\varepsilon^7); \quad h_\Omega, h_\Delta, g_\Omega, g_\Delta = O(\varepsilon^4). \tag{19}$$

Рассматривая зависимость $\xi(t,\varepsilon)$ как известную, определим приближенное решение И-подсистемы уравнений угловых колебаний (10) формулами

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}(t,\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{2} i\widetilde{s}_j(t,\varepsilon)[\lambda_j^+(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) + k(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)]\exp i\varphi_j(t,\varepsilon) + e_1(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon), \\ \widetilde{\Delta}(t,\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{2} \widetilde{s}_j(t,\varepsilon)\exp i\varphi_1(t,\varepsilon) + d_1(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered} \widetilde{s}_j(t,\varepsilon) = C_j \frac{w^{1/4}(\xi(t_0,\varepsilon),\varepsilon)}{w^{1/4}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)} \exp \nu_j(t,\varepsilon), \\ \nu_j(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} n_j(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau, \quad \varphi_j(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} \omega_j(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau \quad (j=1,2). \end{gathered} \tag{21}$$

Для $C_j = \widetilde{s}_j(t_0,\varepsilon)$ из условий $\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Delta}(t_0,\varepsilon) = \Omega, \Delta(t_0,\varepsilon)$ следует, что $C_j = O(1),\ j=1,2$.

Перейдем, следуя [6], в уравнениях (10) от переменных Ω, Δ к новым комплексным переменным s_1, s_2 по формулам

$$\begin{aligned} \Omega(t,\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{2} is_j(t,\varepsilon)[\lambda_j^+(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) + k(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)]\exp i\varphi_j(t,\varepsilon) + e_1(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon), \\ \Delta(t,\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{2} s_j(t,\varepsilon)\exp i\varphi_1(t,\varepsilon) + d_1(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon). \end{aligned} \tag{22}$$

Покажем, что при $t \in [t_0; t_{\max}]$ справедливы оценки

$$s_j(t,\varepsilon) - \widetilde{s}_j(t,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \dot{s}_j(t,\varepsilon) - \dot{\widetilde{s}}_j(t,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad j=1,2. \tag{23}$$

При замене (22) уравнения (10) переходят в систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= (n_1 - \frac{\dot{w}}{4w})s_1 + \rho[s_1 + s_2\exp i(\varphi_2 - \varphi_1)] - \\ &\qquad - \frac{1}{2w^{1/2}}[i(h_\Omega + g_\Omega - \dot{e}_1) + (\lambda_2^+ + k)(h_\Delta + g_\Delta - \dot{d}_1)]\exp(-i\varphi_1), \\ \dot{s}_2 &= (n_2 - \frac{\dot{w}}{4w})s_2 - \rho[s_1\exp i(\varphi_1 - \varphi_2) + s_2] + \\ &\qquad + \frac{1}{2w^{1/2}}[i(h_\Omega + g_\Omega - \dot{e}_1) + (\lambda_1^+ + k)(h_\Delta + g_\Delta - \dot{d}_1)]\exp(-i\varphi_2). \end{aligned} \tag{24}$$

Аргументы функций в (24) для краткости не указаны. Разрешив формулы замены (22) относительно s_1, s_2, с учетом (16), (17) устанавливаем $s_1, s_2 = O(1)$. Тогда, принимая во внимание оценки (17), (18), (19), уравнения (24) можно записать в виде

$$\dot{s}_j = (n_j - \dot{w}/4w)s_j + O(\varepsilon^4), \quad j=1,2. \tag{25}$$

Умножим обе части уравнений (25) на $\exp(-\int_{t_0}^{t}(n_j - \dot{w}/4w\,d\tau_1)$ и проинтегрируем в пределах от t_0 до t. Пользуясь соотношением $t - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ и вытекающими из (18) равенствами

$$\exp\int\limits_{\tau}^{t}(n_j - \dot{w}/4w)\,d\tau_1 = \frac{w^{1/4}(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{w^{1/4}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)}\exp\int\limits_{\tau}^{t} n_j\,d\tau_1 = O(1), \quad t_0 \le \tau \le t \le t_1, \quad j = 1,2,$$

получаем первую оценку (23). Учитывая, что $n_j = O(\varepsilon^2)$, $\dot{w}/4w = O(\varepsilon^3)$, в правых частях (25) полагаем $s_j = \widetilde{s}_j + O(\varepsilon)$. Из полученных равенств вычитаем равенства $\dot{\widetilde{s}}_j = (n_j - \dot{w}/4w)\widetilde{s}_j$, которые следуют из (21), и приходим ко второй оценке (23).

Аналогичным образом, рассматривая зависимость $\xi_\Pi(t,\varepsilon)$ для П-системы как известную, определим приближенное решение П-подсистемы угловых колебаний формулами вида (20), в которых вместо функций $\widetilde{s}_j, \varphi_j(t,\varepsilon)$ введены функции $\widetilde{s}_{j\Pi}, \varphi_{j\Pi}(t,\varepsilon)$. Они определены формулами вида (21) при замене в них $\xi(t,\varepsilon)$ на $\xi_\Pi(t,\varepsilon)$.

Так как векторы $\xi(t_0,\varepsilon)$, $\xi_\Pi(t_0,\varepsilon)$ равны и лежат внутри Ξ, то в течение некоторого промежутка времени $[t_0;t']$ будет $\xi_\Pi(t,\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$, причем $||\xi(t,\varepsilon) - \xi_\Pi(t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon)$. Тогда при $t \in [t_0;t']$ на траектории полета снаряда, определяемой П-системой, из выполнения условий Маиевского и неравенств $n_1, n_2 \le O_+(\varepsilon^4)$ для И-системы следует их выполнение для П-системы. В результате при $t \in [t_0;t']$ на рассматриваемом решении П-системы справедливо соотношение $\xi_\Pi \in \Xi_\varepsilon$ и оценки, аналогичные (16)-(19). Следовательно, вводя вместо Ω_Π, Δ_Π переменные $s_{j\Pi}$, $j = 1,2$, по формулам, аналогичным (22), снова получим при $t \in [t_0;t']$ оценки вида (23):

$$s_{j\Pi}(t,\varepsilon) - \widetilde{s}_{j\Pi}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \dot{s}_{j\Pi}(t,\varepsilon) - \dot{\widetilde{s}}_{j\Pi}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad j = 1,2. \tag{26}$$

5. Оценка $||\boldsymbol{\xi}(\mathbf{t},\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\xi}_\Pi(\mathbf{t},\boldsymbol{\varepsilon})||$ при $\mathbf{t} \in [\mathbf{t_0};\mathbf{t'}]$. Обозначим через $\psi(t,\varepsilon)$ и $\psi_\Pi(t,\varepsilon)$ функции, определенные для И- и П-системы тем же уравнением, что и $\psi_{H\Pi}(t,\varepsilon)$:

$$\varepsilon^2\dot{\psi} = \varepsilon^4\frac{v}{m}[R_2^{(0)}(y,v)z_1 - R_3^{(0)}(y,v,p)z_2] + h_\psi(y,v,p,z_1,z_2,\varepsilon), \tag{27}$$

при заданном для ψ_H начальном условии. Для П-системы $\psi_{H\Pi}(t,\varepsilon)$ совпадает с $\psi_\Pi(t,\varepsilon)$, а для И-системы $\psi_H(t,\varepsilon)$ отличается от $\psi(t,\varepsilon)$ интегральным добавком (см. (8)):

$$\varepsilon^2\psi_{H\Pi}(t,\varepsilon) = \varepsilon^2\psi_\Pi(t,\varepsilon), \quad \varepsilon^2\psi_H(t,\varepsilon) = \varepsilon^2\psi(t,\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{t} g_\psi(\xi(\tau,\varepsilon), z_1(\tau,\varepsilon), z_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau. \tag{28}$$

Рассмотрим уравнения, определяющие $\dot{\theta}, \dot{\psi}$ в И- и в П-системе, то есть пятое уравнение (3) и уравнение (27). Умножив второе из них на мнимую единицу и сложив с первым, получаем комплексное уравнение. При подстановке в него рассматриваемых решений И- и П-системы имеем два тождества по t. Представим их разность в виде

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t,\varepsilon) - \dot{\theta}_\Pi(t,\varepsilon) + i\varepsilon^2[\dot{\psi}(t,\varepsilon) - \dot{\psi}_\Pi(t,\varepsilon)] = \hat{f}(\xi^{(4)}(t,\varepsilon),\varepsilon) - \hat{f}(\xi_\Pi^{(4)}(t,\varepsilon),\varepsilon) + \\ +[\hat{f}_\Delta(\xi^{(4)}(t,\varepsilon),\varepsilon) - \hat{f}_\Delta(\xi_\Pi^{(4)}(t,\varepsilon),\varepsilon)]\Delta(t,\varepsilon) + \hat{f}_\Delta(\xi_\Pi^{(4)}(t,\varepsilon),\varepsilon)[\Delta(t,\varepsilon) - \Delta_\Pi(t,\varepsilon)] + \\ +\hat{h}(\xi^{(4)}(t,\varepsilon), z_1(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon),\varepsilon) - \hat{h}(\xi_\Pi^{(4)}(t,\varepsilon), z_{1\Pi}(t,\varepsilon), z_{2\Pi}(t,\varepsilon),\varepsilon).\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь приняты обозначения

$$\hat{f}(\xi^{(4)},\varepsilon)=-\varepsilon^4\frac{g}{v}\cos\theta,\quad \hat{f}_\Delta(\xi^{(4)},\varepsilon)=\varepsilon^4\frac{v}{m}[R_2^{(0)}(y,v)+iR_3^{(0)}(y,v,p)],$$
$$\hat{h}(\xi^{(4)},z_1,z_2,\varepsilon)=h_\theta(\xi^{(4)},z_1,z_2,\varepsilon)+ih_\psi(\xi^{(4)},z_1,z_2,\varepsilon).$$

В тождестве (29) заменим Δ,Δ_Π, входящие в $\Delta-\Delta_\Pi$, их выражениями вида (22) через переменные $s_j, s_{j\Pi},\ j=1,2$. Затем проинтегрируем обе части этого тождества по времени в пределах от t_0 до $t\in[t_0;t_{\max}]$. Учитывая, что начальные условия для решений И- и П-системы одинаковы, приходим к комплексному тождеству

$$\theta(t,\varepsilon)-\theta_\Pi(t,\varepsilon)+i\varepsilon^2[\psi(t,\varepsilon)-\psi_\Pi(t,\varepsilon)]=\sum_{j=0}^{6}\hat{h}_j(t,\varepsilon),\quad t\in[t_0;t_{\max}], \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{h}_0(t,\varepsilon)&=\int_{t_0}^{t}\big[\hat{h}(\xi^{(4)}(\tau,\varepsilon),z_1(\tau,\varepsilon),z_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-\hat{h}(\xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon),z_{1\Pi}(\tau,\varepsilon),z_{2\Pi}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\big]\,d\tau,\\
\hat{h}_1(t,\varepsilon)&=\int_{t_0}^{t}\big[\hat{f}(\xi^{(4)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-\hat{f}(\xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\big]\,d\tau,\\
\hat{h}_2(t,\varepsilon)&=\int_{t_0}^{t}\big[\hat{f}_\Delta(\xi^{(4)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-\hat{f}_\Delta(\xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\big]\Delta(\tau,\varepsilon)\,d\tau,\\
\hat{h}_3(t,\varepsilon)&=\int_{t_0}^{t}\hat{f}_\Delta(\xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\big[d_1(\xi^{(4)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-d_1(\xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\big]\,d\tau,\\
\hat{h}_4(t,\varepsilon)&=\int_{t_0}^{t}\hat{f}_\Delta(\xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big[\sum_{j=1}^{2}\big(s_j(\tau,\varepsilon)-\widetilde{s}_j(\tau,\varepsilon)\big)\exp i\varphi_j(\tau,\varepsilon)\Big]\,d\tau,\\
\hat{h}_5(t,\varepsilon)&=\int_{t_0}^{t}\hat{f}_\Delta(\xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big[\sum_{j=1}^{2}\big(\widetilde{s}_{j\,\Pi}(\tau,\varepsilon)-s_{j\,\Pi}(\tau,\varepsilon)\big)\exp i\varphi_j(\tau,\varepsilon)\Big]\,d\tau,\\
\hat{h}_6(t,\varepsilon)&=\int_{t_0}^{t}\hat{f}_\Delta(\xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big[\sum_{j=1}^{2}\widetilde{s}_j(\tau,\varepsilon)\exp i\varphi_j(\tau,\varepsilon)-\widetilde{s}_{j\,\Pi}(\tau,\varepsilon)\exp i\varphi_{j\,\Pi}(\tau,\varepsilon)\Big]\,d\tau.
\end{aligned}\tag{31}$$

Для интегралов (31) при $t\in[t_0;t']$, $t'-t_0=O(\varepsilon^{-3})$ справедливы следующие оценки через ε и $\int_{t_0}^{t}||\xi^{(4)}(\tau,\varepsilon)-\xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon)||\,d\tau$:

$$|\hat{h}_0(t,\varepsilon)|\le\varepsilon^4M_{h_0},\quad |\hat{h}_{1,6}(t,\varepsilon)|\le\varepsilon^3L_{h_{1,6}}\int_{t_0}^{t}||\xi^{(4)}(\tau,\varepsilon)-\xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon)||\,d\tau,$$
$$|\hat{h}_{2,3}(t,\varepsilon)|\le\varepsilon^4L_{h_{2,3}}\int_{t_0}^{t}||\xi^{(4)}(\tau,\varepsilon)-\xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon)||\,d\tau,\quad |\hat{h}_{4,5}(t,\varepsilon)|\le\varepsilon^3M_{h_4}.$$

Способ их получения аналогичен применявшемуся в [3,4,6] и основан на сделанных в конце п. 3 замечаниях и соотношениях (16)-(19), (23), (26). С учетом этих оценок из тождества (30) при $t\in[t_0;t']$ получаем неравенство

$$|\theta(t,\varepsilon)-\theta_\Pi(t,\varepsilon)+i\varepsilon^2[\psi(t,\varepsilon)-\psi_\Pi(t,\varepsilon)]|\le\varepsilon^3\hat{L}\int_{t_0}^{t}||\xi^{(4)}(\tau,\varepsilon)-\xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon)||\,d\tau+\varepsilon^3\hat{C},$$

где $\hat{L}, \hat{C} > 0$ – постоянные порядка 1. Следовательно,

$$\left.\begin{array}{r} |\theta(t,\varepsilon) - \theta_\Pi(t,\varepsilon)| \\ \varepsilon^2|\psi(t,\varepsilon) - \psi_\Pi(t,\varepsilon)| \end{array}\right\} \leq \varepsilon^3 \hat{L} \int\limits_{t_0}^{t} ||\xi^{(4)}(\tau,\varepsilon) - \xi_\Pi^{(4)}(\tau,\varepsilon)||\, d\tau + \varepsilon^3 \hat{C}, \qquad t \in [t_0; t']. \tag{32}$$

Вектор-функции $\xi_\Pi^{(4)}(t,\varepsilon)$ и $\xi^{(4)}(t,\varepsilon)$ определяются путем совместного интегрирования подсистемы уравнений угловых колебаний (5) и (10) для П- и И-системы вместе с подсистемами, состоящими из второго, четвертого, пятого и седьмого уравнений (3). Последние подсистемы одинаковы для П- и И-системы, их правая часть удовлетворяет в $\Xi_\varepsilon^{(4)}$ условию Липшица по $\xi^{(4)}$ с постоянной порядка ε^3, а переменные z_1, z_2 входят только в уравнение, определяющее $\dot{\theta}_\Pi, \dot{\theta}$. Поэтому из верхнего неравенства (32) с учетом (4) следует аналогичное неравенство для $\xi^{(4)} - \xi_\Pi^{(4)}$:

$$||\xi^{(4)}(t,\varepsilon) - \xi_\Pi^{(4)}(t,\varepsilon)|| \leq \varepsilon^3 L \int\limits_{t_0}^{t} ||\xi^{(4)}(t,\varepsilon) - \xi_\Pi^{(4)}(t,\varepsilon)||\, d\tau + \varepsilon^3 C, \quad t \in [t_0; t'].$$

На основании леммы Гронуолла (см. [7]) при $t \in [t_0; t']$ получаем отсюда

$$||\xi^{(4)}(t,\varepsilon) - \xi_\Pi^{(4)}(t,\varepsilon)|| \leq \varepsilon^3 C \exp \varepsilon^3 L(t - t_0) = O_+(\varepsilon^3). \tag{33}$$

Пользуясь оценкой (33) для $\xi^{(4)} = (y, v, \theta, p)$, нетрудно получить оценки погрешности для переменных x, z, ψ_H, не включенных в вектор $\xi^{(4)}$. С этой целью обратимся к уравнениям поступательного движения и продольного вращения (3) для П-системы и соответствующим уравнениям для И-системы. Подставив в них рассматриваемые решения П- и И-системы, приходим к тождествам по t.

Проинтегрировав шестые компоненты этих тождеств, получаем равенства (28). Так как $O^*(\varepsilon) \leq v^2 \leq O^*(1)$, то во втором из них, согласно (9), имеем $g_\psi = O(\varepsilon^{11/2})$. Далее, из нижнего неравенства (32) с учетом оценки (33) следует, что при $t \in [t_0; t']$ будет $\varepsilon^2|\psi(t,\varepsilon) - \psi_\Pi(t,\varepsilon)| \leq O_+(\varepsilon^3)$. Поэтому, вычитая равенства (28) одно из другого, получаем при $t \in [t_0; t']$ оценку

$$\varepsilon^2|\psi_H(t,\varepsilon) - \psi_{H\Pi}(t,\varepsilon)| = O_+(\varepsilon^{5/2}). \tag{34}$$

Рассмотрим для И- и П-системы тождества, соответствующие первому и третьему уравнениям (3). Воспользовавшись сотношениями (33), (34), приходим при при $t \in [t_0; t']$ к оценкам

$$|x(t,\varepsilon) - x_\Pi(t,\varepsilon)| = O_+(\varepsilon^3), \quad \varepsilon^2|z(t,\varepsilon) - z_\Pi(t,\varepsilon)| = O_+(\varepsilon^{5/2}). \tag{35}$$

Итак, при $t \in [t_0; t']$ для вектора $\xi^{(4)}$ справедлива оценка (33), а для компонент вектора ξ, не включенных в $\xi^{(4)}$, получены оценки (35).

6. Оценка $||\boldsymbol{\xi(t,\varepsilon) - \xi_\Pi(t,\varepsilon)}||$ при $[\mathbf{t_0}; \mathbf{t}_{\max}]$. Согласно процедуре вывода оценки (33) для $||\xi^{(4)} - \xi_\Pi^{(4)}||$, она справедлива на отрезке $[t_0; t'] \subseteq [t_0; t_{\max}]$, где

$$\xi^{(4)}, \xi_\Pi^{(4)}(t,\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon^{(4)}; \quad ||\xi^{(4)}(t,\varepsilon) - \xi_\Pi^{(4)}(t,\varepsilon)|| = O_+(\varepsilon). \tag{36}$$

Предположим, что соотношения (36) выполняются только на части $[t_0; t']$ отрезка $[t_0; t_{\max}]$, то есть при $t > t'$ они не имеют места. Тогда в момент t' выполняется одно из двух допущений: 1) точка $\xi_\Pi^{(4)}(t',\varepsilon)$ принадлежит границе $\Xi_\varepsilon^{(4)}$, а порядок $||\xi^{(4)}-\xi_\Pi^{(4)}||$ при $t=t'$ выше либо равен ε;   2) точка $\xi_\Pi^{(4)}(t',\varepsilon)$ лежит в $\Xi_\varepsilon^{(4)}$, но порядок $||\xi^{(4)}-\xi_\Pi^{(4)}||$ при $t=t'$ строго равен ε.

Второе из этих допущений противоречит оценке (33), которая, по доказанному, выполняется в момент t'. Покажем, что и первое допущение приводит к противоречию.

В самом деле, границами замкнутых областей $\Xi^{(4)}$, $\Xi_\varepsilon^{(4)}$, соответствующих (12), (15), являются части гиперплоскостей, ортогональных осям координат. При этом область $\Xi_\varepsilon^{(4)}$ сконструирована так, что расстояние от любой точки ее границы до области $\Xi^{(4)}$ отсчитывается вдоль соответствующей координаты и больше $O_+(\varepsilon^3)$. Поэтому в норме $||\cdot||$ расстояние от точки $\xi_\Pi^{(4)}(t',\varepsilon)$, лежащей, согласно допущению, на границе $\Xi_\varepsilon^{(4)}$, до точки $\xi^{(4)}(t',\varepsilon)$, лежащей в $\Xi^{(4)}$, больше $O_+(\varepsilon^{3/2})$. Это противоречит оценке (33), которая в момент t' обязана выполняться.

Итак, ни одно из сделанных допущений невозможно, и следовательно, условия (36) выполнены на всем отрезке $[t_0;t_{\max}]$. Поэтому оценка (33), а вместе с ней и оценки (34), (35) справедливы на $[t_0;t_{\max}]$.

В И-системе члены g_ψ, g_Ω, g_Δ, характеризующие ее отличие от П-системы, и следовательно, определяющие погрешность П-системы по сравнению с И-системой, имеют порядки $g_\psi=O(\varepsilon^{11/2})$, $g_\Omega=O(\varepsilon^4)$, $g_\Delta=O(\varepsilon^4)$. Они входят в И-систему в сумме с нелинейными членами $h_\psi=O(\varepsilon^7)$, $h_\Omega=O(\varepsilon^4)$, $h_\Delta=O(\varepsilon^4)$, определяющими погрешность принятого в работе метода исследования. Поскольку h_ψ, h_Ω, h_Δ по абсолютной величине меньше или примерно равны g_ψ, g_Ω, g_Δ, то принятый метод исследования не приводит к огрублению искомой оценки погрешности П-системы.

7. Числовые оценки. При введении в [3] малого параметра ε исходные переменные x,y,z,v,θ,ψ_H,p отнесены к 10000 м, 10000 м, 100 м, 1000 м/с, 1 рад, 0,1 рад, 1000 рад/с, а сам малый параметр соответствует числу 0,1. Поэтому оценкам (33)–(35) соответствуют определенные числовые оценки для исходных переменных. Из них, в частности, следует, что погрешности определения координат x,y,z центра масс снаряда уравнениями движения в форме В.С. Пугачева измеряются десятками метров (при стрельбе на 10 км и более), причем погрешность определения z может приближаться к ста метрам.

1. *Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н., Богодистов С.С.* Внешняя баллистика. 3-е изд. – М.: Машиностроение, 1991. – 640 с.
2. *Пугачев В.С.* Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
3. *Коносевич Б.И.* Исследование динамики полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 109-119.
4. *Коносевич Б.И.* Оценка погрешности классической схемы асимптотического интегрирования уравнений движения осесимметричного снаряда // Там же. – 2002. – Вып. 32. – С. 88-98.
5. *Коносевич Б.И.* К теории полета осесимметричного снаряда // Там же. – 1999. – Вып. 28. – С. 51-61.
6. *Коносевич Б.И.* О применении асимптотических методов в теории полета осесимметричного снаряда // Там же. – 2001. – Вып. 31. – С. 63-75.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
konos@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 21.09.05