

УДК 531.36

©2005. А.С. Кулешов

## О ДИНАМИКЕ СНЕЙКБОРДА

В работе проведено исследование простейшей модели одной из модификаций скейтборда, известной как снейкборд. Уравнения движения модели представлены в форме уравнений Аппеля, что позволило провести не только численное, но и аналитическое исследование данных уравнений. Изучены различные типы движения снейкборда (движение вперед, поворот, движение "галсами"). Все полученные аналитические результаты подтверждены серией компьютерных экспериментов.

**1. Описание устройства и модели.** Снейкборд представляет собой одну из модификаций хорошо известного скейтборда и позволяет человеку продвигаться вперед без дополнительного соприкосновения ног с землей. Первый снейкборд появился в 1989 году и с этого момента и до настоящего времени приобрел множество поклонников среди любителей экстремального катания. Вскоре после изобретения снейкборда появились и первые статьи, в которых делались попытки дать математическое описание основных принципов движения человека на снейкборде. Первая математическая модель снейкборда была предложена в работе [1], в которой также были выведены уравнения движения модели в форме уравнений Лагранжа с множителями, и был проведен численный анализ полученных уравнений. Исследования, начатые в [1], были продолжены в работах [2–7]. Однако все эти исследования сводились, в основном, к численному изучению различных форм уравнений движения снейкборда. В данной работе уравнения движения предложенной в [1] модели снейкборда представлены в форме уравнений Аппеля, что позволило провести не только численное, но и аналитическое исследование данных уравнений.

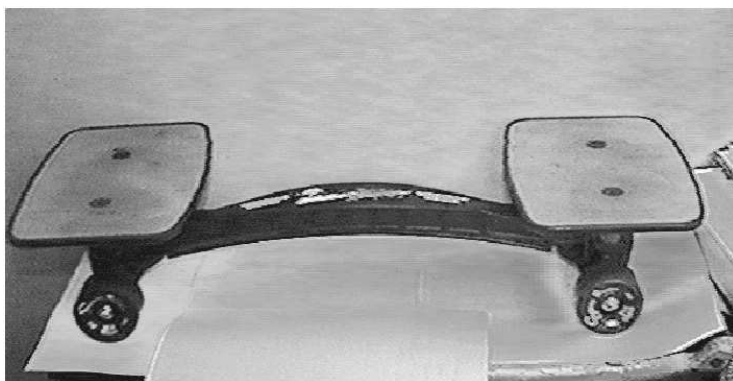


Рис. 1. Общий вид снейкборда.

Снейкборд (рис. 1, 2) состоит из двух платформ на колесах, на каждую из которых райдер – человек, катающийся на снейкборде, устанавливает одну из своих ног. Платформы связаны между собой жестким стержнем – кроссбаром. На концах кроссбара имеются шарниры, позволяющие каждой из платформ вращаться вокруг вертикальной оси. В исходном положении райдер стоит на снейкборде так, что стопы его ног направлены внутрь (рис. 3). Затем райдер поворачивает свое туловище на некоторый угол и начинает двигаться по дуге окружности, определенной углом поворота колесных осей. После этого райдер разворачивает стопы ног наружу и делает поворот туловищем в противоположном направлении. Продолжая этот процесс, райдер продвигается вперед.

Снейкборд (рис. 1, 2) состоит из двух платформ на колесах, на каждую из которых райдер – человек, катающийся на снейкборде, устанавливает одну из своих ног. Платформы связаны между собой жестким стержнем – кроссбаром. На концах кроссбара имеются шарниры, позволяющие каждой из платформ вращаться вокруг вертикальной оси. В исходном положении райдер стоит

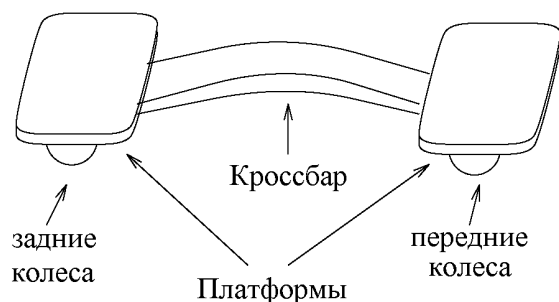


Рис. 2. Схема снейкборда.



Рис. 3. Инструкция по катанию на снейкборде.

Элементарная модель снейкборда, предложенная в работе [1], представлена на рис. 4. Пусть  $Oxy$  – неподвижная система координат с началом в некоторой точке  $O$  плоскости, по которой движется снейкборд. Пусть  $x$  и  $y$  – координаты центра масс системы,  $\theta$  – угол между продольной осью снейкборда и осью  $Ox$ . Движение корпуса райдера моделируется с помощью ротора, который схематично в виде гантели изображен на рис. 4, и угол поворота которого обозначен  $\psi$ . Обычно при катании райдер так двигает стопами ног, чтобы платформы поворачивались на один и тот же угол, но в противоположных направлениях относительно продольной оси снейкборда (рис. 3, 4). Этот угол обозначен  $\varphi$ . Пусть  $m$  – масса системы,  $l$  – расстояние от центра масс системы до точек  $A$  и  $B$  крепления осей колес (предполагается, что передняя и задняя пары колес расположены на одинаковом расстоянии от центра масс),  $J$  – момент инерции кроссбара,  $J_r$  – момент инерции ротора,  $J_p$  – моменты инерции платформ (предполагается, что они равны между собой). Все моменты инерции вычисляются относительно оси  $Oz$ , перпендикулярной плоскости движения.

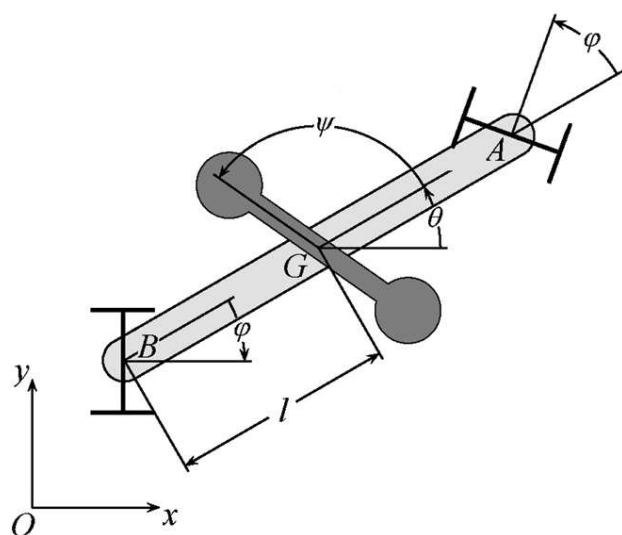


Рис. 4. Модель снейкборда.

Предположим, что снейкборд движется таким образом, что отсутствует боковое скольжение передней и задней платформ, т. е. проекции скоростей точек  $A$  и  $B$  на оси соответствующих колесных пар равны нулю. Это требование приводит к тому, что на систему накладываются две неголономные связи, подобные тем, что имеют место при движении саней Чаплыгина [8–10]:

$$\begin{aligned} \dot{x} \sin(\varphi + \theta) - \dot{y} \cos(\varphi + \theta) - l\dot{\theta} \cos \varphi &= 0, \\ \dot{x} \sin(\theta - \varphi) - \dot{y} \cos(\theta - \varphi) + l\dot{\theta} \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Если ввести скорость  $V$  центра масс снейкборда, то уравнения связей (1) можно записать в виде

$$\dot{x} = V \cos \theta, \quad \dot{y} = V \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \frac{V \sin \varphi}{l \cos \varphi}. \quad (2)$$

Управление снейкбордом осуществляется посредством задания подходящего закона изменения угла поворота ротора  $\psi$  и угла поворота платформ  $\varphi$ . Будем считать эти переменные известными функциями времени, т. е.  $\psi = \psi(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ .

**2. Уравнения движения.** Уравнения движения снейкборда запишем в форме уравнений Аппеля [9, 10]. Для этого выпишем сначала функцию Аппеля (энергию ускорений) данной системы. Из соотношений (2) находим

$$\ddot{x} = \dot{V} \cos \theta - \frac{V^2 \sin \varphi}{l \cos \varphi} \sin \theta, \quad \ddot{y} = \dot{V} \sin \theta + \frac{V^2 \sin \varphi}{l \cos \varphi} \cos \theta, \quad \ddot{\theta} = \frac{\dot{V} \sin \varphi}{l \cos \varphi} + \frac{V}{l} \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi}.$$

Подставляя эти соотношения в функцию

$$S = \frac{m}{2} (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{J}{2} \ddot{\theta}^2 + \frac{J_r}{2} (\ddot{\theta} + \ddot{\psi})^2 + \frac{J_p}{2} \left( (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi})^2 + (\ddot{\theta} - \ddot{\varphi})^2 \right),$$

окончательно получаем

$$S = \frac{ml^2 \cos^2 \varphi + (J + J_r + 2J_p) \sin^2 \varphi}{2l^2 \cos^2 \varphi} \dot{V}^2 + \frac{(J + J_r + 2J_p) \dot{\varphi} \sin \varphi}{l^2 \cos^3 \varphi} V \dot{V} + \frac{J_r \ddot{\psi} \sin \varphi}{l \cos \varphi} \dot{V}.$$

В выражении для функции  $S$  приведены только слагаемые, зависящие от  $\dot{V}$ . Соответствующее уравнение Аппеля, определяющее закон изменения скорости  $V$ , имеет вид  $\partial S / \partial \dot{V} = 0$ . Таким образом мы получаем полную систему уравнений движения снейкборда

$$\dot{x} = V \cos \theta, \quad \dot{y} = V \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \frac{V \sin \varphi}{l \cos \varphi}, \quad \dot{V} + P(t) V = Q(t), \quad (3)$$

$$P(t) = \frac{(J + J_r + 2J_p) \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t)}{(ml^2 \cos^2 \varphi(t) + (J + J_r + 2J_p) \sin^2 \varphi(t)) \cos \varphi(t)},$$

$$Q(t) = -\frac{J_r l \ddot{\psi}(t) \sin \varphi(t) \cos \varphi(t)}{ml^2 \cos^2 \varphi(t) + (J + J_r + 2J_p) \sin^2 \varphi(t)}.$$

Последнее уравнение системы (3) определяет зависимость скорости  $V$  от управляемых переменных  $\psi = \psi(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ . Решение его с начальным условием  $V(0) = V_0$  определяется формулой [10, 11]

$$V(t) = \exp \left( - \int_0^t P(t_1) dt_1 \right) \left[ \int_0^t \left( Q(t_1) \exp \left( \int_0^{t_1} P(t_2) dt_2 \right) \right) dt_1 + V_0 \right].$$

Подставив в данную формулу выражения для  $P(t)$  и  $Q(t)$  и проинтегрировав, получим

$$V(t) = \frac{\cos \varphi(t)}{\sqrt{\cos^2 \varphi(t) + k^2 \sin^2 \varphi(t)}} \left[ V_0 - \frac{J_r}{ml} \int_0^t \frac{\ddot{\psi}(t_1) \sin \varphi(t_1) dt_1}{\sqrt{\cos^2 \varphi(t_1) + k^2 \sin^2 \varphi(t_1)}} \right]. \quad (4)$$

Здесь через  $k^2$  обозначено выражение

$$k^2 = \frac{J + J_r + 2J_p}{ml^2}.$$

После того, как найдено выражение для  $V(t)$ , из третьего уравнения системы (3) получаем

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \frac{V(t_1) \sin \varphi(t_1)}{l \cos \varphi(t_1)} dt_1. \quad (5)$$

Далее, найдя выражение для  $\theta(t)$ , мы можем получить из первых двух уравнений системы (3)

$$x(t) = x(0) + \int_0^t V(t_1) \cos \theta(t_1) dt_1, \quad y(t) = y(0) + \int_0^t V(t_1) \sin \theta(t_1) dt_1. \quad (6)$$

Таким образом, задача о движении снейкборда при произвольном законе изменения управляемых переменных сведена к квадратурам (4) – (6). Однако исследование полученного решения при заданном законе изменения  $\psi = \psi(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$  представляет собой довольно сложную задачу. Ниже такое исследование проведено в предположении, что управляемые переменные изменяются по синусоидальному закону.

**3. Основные предположения для дальнейшего исследования.** Из наблюдений за движением райдеров было сделано предположение, что переменные  $\psi(t)$  и  $\varphi(t)$  изменяются по закону

$$\psi = a_r \sin(\omega_r t), \quad \varphi = a_p \sin(\omega_p t).$$

Отметим, что в работе [1] при численном исследовании уравнений движения снейкборда для переменных  $\psi$  и  $\varphi$  был выбран аналогичный закон изменения. Предположим также, что амплитуда  $a_p$  в выражении для  $\varphi$  удовлетворяет неравенству  $a_p \leq 0.5$  рад. При этом, поскольку  $-1 \leq \sin(\omega_p t) \leq 1$ , то  $-0.5 \leq \varphi \leq 0.5$ . В этом промежутке изменения угла  $\varphi$ , основываясь на свойствах тригонометрических функций, мы будем приближенно считать, что

$$\sin \varphi \approx \varphi - \varphi^3/6, \quad \cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2,$$

т.е. будем пренебрегать величинами, имеющими по параметру  $a_p$  порядок малости, выше третьего. Предположение, что амплитуда  $a_p$  меняется в указанных пределах, вполне оправдано конструктивными особенностями снейкборда. Кроме того полагаем, что начальные значения всех основных переменных – нулевые, т.е.

$$x(0) = y(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad V(0) = 0.$$

С учетом всех этих предположений получаем следующую упрощенную формулу для скорости центра масс системы  $V(t)$ :

$$V(t) \approx \frac{J_r a_r a_p \omega_r^2}{ml} \left[ \left( 1 - \frac{a_p^2 k^2}{2} \sin^2(\omega_p t) \right) \int_0^t \sin(\omega_r t_1) \sin(\omega_p t_1) dt_1 + \right. \\ \left. + a_p^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{k^2}{2} \right) \int_0^t \sin(\omega_r t_1) \sin^3(\omega_p t_1) dt_1 \right]. \quad (7)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что характер движения райдера на снейкборде зависит от соотношения между частотами  $\omega_r$  и  $\omega_p$ .

**4. Нерезонансный случай.** В случае, когда  $\omega_r \neq \omega_p$ , выражения для основных переменных задачи получаются довольно громоздкими. Для упрощения соответствующих формул введем дополнительное обозначение:  $\Omega_i^{\alpha\beta} = \alpha\omega_r + (-1)^i \beta\omega_p$ . Производя интегрирование в формуле (7), получим для  $V(t)$  следующее выражение:

$$V(t) = \frac{J_r a_r a_p \omega_r^2}{2ml} \sum_{i=1}^2 \left[ c_i \frac{\sin(\Omega_i^{13}t)}{\Omega_i^{13}} + d_{i+1} \frac{\sin(\Omega_i^{11}t)}{\Omega_i^{11}} \right],$$

$$c_i = (-1)^i \frac{a_p^2}{4} \left( \frac{1}{3} - \frac{k^2 \Omega_i^{12}}{\Omega_i^{11}} \right), \quad d_i = (-1)^i \left( 1 + \frac{a_p^2}{4} \left( 1 - \frac{k^2 \Omega_i^{32}}{\Omega_i^{11}} \right) \right).$$

Подставляя полученное выражение в интеграл (5) и сохраняя лишь члены, содержащие  $a_p$  в степенях меньших третьей, после интегрирования найдем

$$\theta(t) = \frac{J_r a_r a_p^2 \omega_r^2}{4ml^2} \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{\sin(\Omega_i^{12}t)}{\Omega_i^{11} \Omega_i^{12}} - \frac{2 \sin(\omega_r t)}{\Omega_1^{11} \Omega_2^{11}} \right].$$

Таким образом, параметр  $a_p$  входит в выражение для  $\theta(t)$  во второй степени. С другой стороны, если  $\Omega_i^{11} \neq 0$  и  $\Omega_i^{12} \neq 0$  ( $i = 1, 2$ ), то функция

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\sin(\Omega_i^{12}t)}{\Omega_i^{11} \Omega_i^{12}} - \frac{2 \sin(\omega_r t)}{\Omega_1^{11} \Omega_2^{11}}$$

при любом значении  $t$  ограничена. Следовательно, в общем случае функция  $\theta(t)$  имеет второй порядок малости по  $a_p$  и приближенно можно считать

$$\dot{x} = V \cos \theta \approx V, \quad \dot{y} = V \sin \theta \approx V\theta.$$

Интегрируя, получаем следующие формулы для  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$x(t) = \frac{J_r a_r a_p \omega_r^2}{ml} \sum_{i=1}^2 \left[ c_i \frac{\sin^2(\Omega_i^{13}t/2)}{(\Omega_i^{13})^2} + d_{i+1} \frac{\sin^2(\Omega_i^{11}t/2)}{(\Omega_i^{11})^2} \right],$$

$$y(t) = \frac{J_r^2 a_r^2 a_p^3 \omega_r^4}{16m^2 l^3} \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{\Omega_i^{11} \Omega_i^{12}} \left( \frac{\sin(\Omega_i^{23}t)}{\Omega_i^{11} \Omega_i^{23}} - \frac{\Omega_i^{35} \sin(\Omega_i^{21}t)}{\Omega_1^{11} \Omega_2^{11} \Omega_i^{21}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{16 \sin(\omega_p t)}{\Omega_1^{12} \Omega_2^{12} \Omega_1^{11} \Omega_2^{11}} \left( \frac{3\omega_p^2}{2\Omega_1^{11} \Omega_2^{11}} + \frac{\sin^2(\omega_p t)}{3} \right) \right].$$

Видно, что при некоторых соотношениях на частоты  $\omega_r$  и  $\omega_p$  знаменатели дробей, входящих в полученные выражения для  $V(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $x(t)$  и  $y(t)$ , могут обращаться в нуль. Перечислим здесь все имеющиеся случаи:

1.  $\Omega_i^{11} = 0$  ( $i = 1, 2$ ), т. е.  $\omega_r = \pm\omega_p$ ,
2.  $\Omega_i^{12} = 0$  ( $i = 1, 2$ ), т. е.  $\omega_r = \pm 2\omega_p$ ,
3.  $\Omega_i^{21} = 0$  ( $i = 1, 2$ ), т. е.  $2\omega_r = \pm\omega_p$ ,
4.  $\Omega_i^{23} = 0$  ( $i = 1, 2$ ), т. е.  $2\omega_r = \pm 3\omega_p$ ,
5.  $\Omega_i^{13} = 0$  ( $i = 1, 2$ ), т. е.  $\omega_r = \pm 3\omega_p$ .

Если при движении райдера на снейкборде одно из перечисленных соотношений окажется выполненным, то в системе возникает определенный резонанс, которому соответствует определенный тип движения снейкборда. Основной принцип движения райдера на снейкборде заключается в умелом достижении того или иного резонансного соотношения, соответствующего желаемому типу маневра. Движение снейкборда в резонансных случаях будет исследовано ниже. Система уравнений (3) исследовалась численно при следующих значениях параметров:

$$m = 6 \text{ кг}, \quad J = 0.016 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_r = 0.072 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_p = 0.0013 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad l = 0.2 \text{ м}. \quad (8)$$

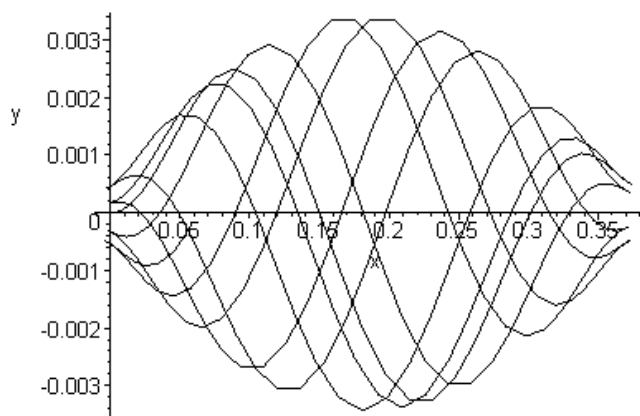


Рис. 5. Траектория центра масс в нерезонансном случае.

ки друг к другу. На рис. 5 представлена траектория центра масс системы на плоскости  $x(t), y(t)$ . Подобная траектория характерна для начинающих райдеров, делающих первые шаги в освоении снейкборда.

**5. Резонанс 1:1 (движение вперед).** Исследование резонансных случаев начнем со случая  $\omega_r = \omega_p = \omega$  (случай  $\omega_r = -\omega_p$  исследуется аналогично). Введем безразмерное время  $\tau$  по формуле  $\tau = \omega t$ . Используя формулу (7), найдем следующее выражение для скорости центра масс системы:

$$V(\tau) = \frac{J_r a_r a_p \omega}{2ml} \left[ \left( \tau - \frac{\sin(2\tau)}{2} \right) \left( 1 + \frac{a_p^2}{4} \left( 1 - \frac{5k^2}{2} + k^2 \cos(2\tau) \right) \right) - \frac{a_p^2}{4} \left( \frac{2}{3} - k^2 \right) \sin^3 \tau \cos \tau \right].$$

Таким образом, при совпадении частоты вращения ротора и платформ скорость центра масс системы линейно растет со временем. Следовательно, если райдер при движении на снейкборде добьется, чтобы частоты вращения туловищем и стопами ног совпадали, то он сможет продвигаться вперед. В этом состоит один из основных принципов динамики снейкборда.

Приближенное выражение для  $\theta(\tau)$  имеет вид:

$$\theta(\tau) = \frac{J_r a_r a_p^2}{2ml^2} \left( \sin \tau - \tau \cos \tau - \frac{\sin^3 \tau}{3} \right).$$

Видно, что  $\theta(\tau)$  так же, как и  $V(\tau)$ , оказывается функцией, линейно растущей со временем. Поэтому мы можем считать угол  $\theta$  малым лишь до некоторого момента

Эти значения параметров соответствуют модели, описанной в работе [1]. Параметры, входящие в закон изменения переменных  $\psi$  и  $\varphi$ , выберем соответствующими нерезонансному случаю

$$a_r = 0.7 \text{ рад}, \quad a_p = 0.3 \text{ рад},$$

$$\omega_r = 1/\sqrt{2} \text{ рад/с}, \quad \omega_p = 1/\sqrt{3} \text{ рад/с}.$$

Численный анализ системы (3) в нерезонансном случае показал, что при любом значении  $t$  точное и приближенное решения достаточно близки друг к другу.

времени. Если считать  $\theta$ , как и  $\varphi$ , малым при  $\theta \leq 0.5$  рад., то можно дать следующую оценку для этого момента

$$\frac{J_r a_r a_p^2}{2ml^2} \tau \leq \frac{1}{2} \quad \text{т. е.} \quad \tau \leq \frac{ml^2}{J_r a_r a_p^2}.$$

Подставим в данную формулу значения параметров (8). Значения параметров, входящих в закон изменения управляемых переменных, примем равными

$$a_r = 0.7 \text{ рад}, \quad a_p = 0.3 \text{ рад}, \quad \omega = 1 \text{ рад/с}.$$

При этом для промежутка времени, на котором мы можем считать угол  $\theta$  малым, получается следующая оценка:  $\tau \leq 52.91$ .

При малом  $\theta$  для  $x(\tau)$  и  $y(\tau)$  получаем такие выражения:

$$x(\tau) = \frac{J_r a_r a_p}{4ml} \left[ (\tau^2 - \sin^2 \tau) \left( 1 + \frac{a_p^2 (1 - 2k^2)}{4} \right) - \frac{a_p^2}{8} \left( \frac{2 \sin^4 \tau}{3} + k^2 \left( \tau - \frac{3 \sin(2\tau)}{2} \right) \left( \tau - \frac{\sin(2\tau)}{2} \right) \right) \right],$$

$$y(\tau) = \frac{J_r^2 a_r^2 a_p^3}{4m^2 l^3} \left[ \left( \frac{28}{9} - \tau^2 \right) \sin \tau - \frac{4}{3} \left( 2 + \frac{\cos^2 \tau}{3} \right) \tau \cos \tau + \left( \frac{\sin^2 \tau}{5} - \frac{13}{9} \right) \frac{\sin^3 \tau}{3} \right].$$

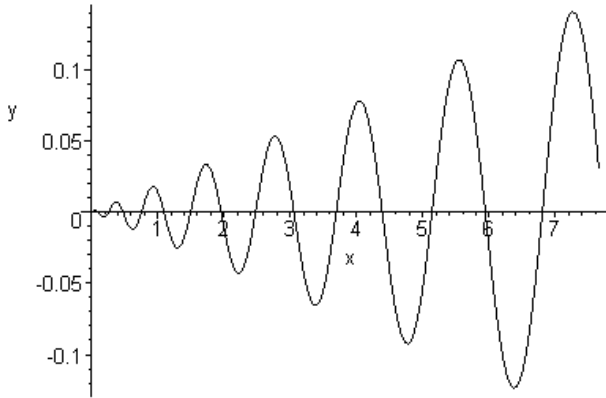


Рис. 6. Траектория центра масс при резонансе 1:1.

Проведенный численный анализ системы показал, что на промежутке времени, на котором угол  $\theta(\tau)$  можно считать малым, точное и приближенное решения достаточно близки друг к другу. На рис. 6 представлена траектория центра масс системы на плоскости  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  при резонансе 1:1.

### 6. Резонанс 2:1 (разворот).

Рассмотрим теперь случай, когда частоты вращения ротора и платформ связаны соотношением  $\omega_r = 2\omega_p = 2\omega$  (случай  $\omega_r = -2\omega_p$  исследуется аналогично).

Как и в предыдущем пункте, будем использовать безразмерное время  $\tau$ . Используя формулу (7), получаем следующее выражение для скорости центра масс системы  $V(\tau)$  при резонансе 2:1

$$V(\tau) = \frac{8J_r a_r a_p \omega}{3ml} \left( 1 + \frac{a_p^2}{5} (1 - 4k^2) \sin^2 \tau \right) \sin^3 \tau.$$

Выражение, получаемое для функции  $\theta(\tau)$ , имеет вид

$$\theta(\tau) = \frac{J_r a_r a_p^2}{ml^2} \left( \tau - \frac{2}{3} \sin(2\tau) + \frac{\sin(4\tau)}{12} \right).$$

Таким образом, как и в случае резонанса 1:1, угол  $\theta(\tau)$  оказывается функцией, линейно растущей со временем. Считать этот угол малым можно на промежутке

$$\tau \leq \frac{ml^2}{2J_r a_r a_p^2}.$$

Подставляя в данную формулу значения параметров (8), а также значения

$$a_r = 1 \text{ рад}, \quad a_p = 0.5 \text{ рад}, \quad \omega = 1 \text{ рад/с}, \quad (9)$$

получаем, что  $\tau \leq 6.67$ .

На данном промежутке времени при малом  $\theta(\tau)$  для  $x(\tau)$  и  $y(\tau)$  получаются следующие выражения:

$$x(\tau) = \frac{8J_r a_r a_p}{9ml} (1 - \cos \tau)^2 \left[ (2 + \cos \tau) \left( 1 + \frac{4a_p^2 (1 - 4k^2)}{25} \right) - \frac{3a_p^2 (1 - 4k^2)}{25} (1 + \cos \tau)^2 \cos \tau \right],$$

$$y(\tau) = \frac{8J_r^2 a_r^2 a_p^3}{9m^2 l^3} \left[ (2 + \sin^2 \tau) \left( \sin \tau - \tau \cos \tau - \frac{\sin^3 \tau}{3} \right) - \left( \frac{4}{15} + \frac{2 \sin^2 \tau}{7} \right) \sin^5 \tau \right].$$

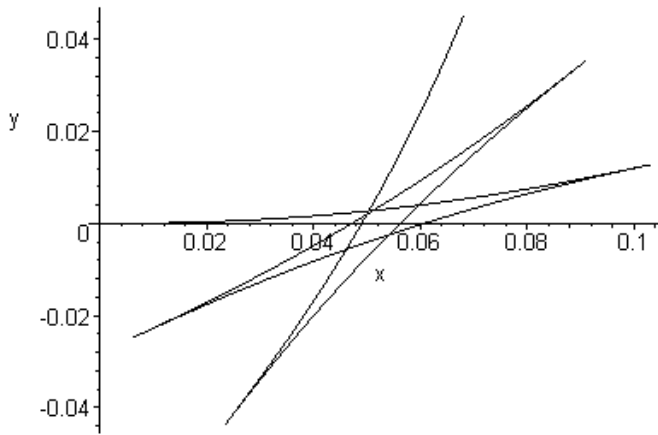


Рис. 7. Траектория центра масс при резонансе 2:1 .

$$V(\tau) = \frac{2J_r a_r a_p \omega}{3ml} \left[ 1 + \frac{4a_p^2 \sin^2 \tau}{7} \left( (1 - 4k^2) \left( \frac{7}{5} - \sin^2 \tau \right) + k^2 \sin^2 \tau \right) \right] \sin^3 \tau.$$

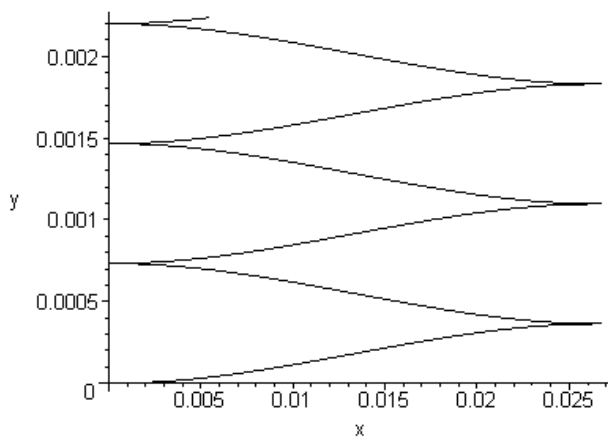


Рис. 8. Траектория центра масс при резонансе 1:2 .

$$x(\tau) = \frac{J_r a_r a_p}{6ml} \left[ (1 - \cos \tau)^3 \left( \frac{8}{3} + 3 \cos \tau + \cos^2 \tau \right) \left( 1 + \frac{16a_p^2 (19 - 46k^2)}{1225} \right) + \left( 1 + \frac{16a_p^2 (1 - 5k^2) \sin^2 \tau}{49} \right) \sin^4 \tau \cos \tau \right],$$

На рис. 7 представлен вид траектории центра масс системы на плоскости  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  при резонансе 2:1.

**7. Резонанс 1:2 (движение "галсами").** Теперь рассмотрим случай, когда частоты вращения ротора и платформ связаны соотношением  $2\omega_r = \omega_p = 2\omega$  (случай  $2\omega_r = -\omega_p$  рассматривается аналогично). С помощью формулы (7) получаем следующее выражение для скорости центра масс системы  $V(\tau)$  при резонансе 1:2 :

Для функции  $\theta(\tau)$  получаем соответственно:

$$\theta(\tau) = \frac{4J_r a_r a_p^2}{15ml^2} \sin^5 \tau.$$

Учитывая, что максимум этого выражения достигается в точке  $\tau = \pi/2$  и подставляя значения параметров (8), (9), убеждаемся, что максимум функции  $\theta(\tau)$  равен  $1/50$  и, следовательно, при любом  $\tau$  мы можем считать угол  $\theta(\tau)$  малым. При этом для  $x(\tau)$  и  $y(\tau)$  получаем:



$$y(\tau) = \frac{J_r^2 a_r^2 a_p^3}{12m^2 l^3} \left[ \frac{7\tau}{12} - \frac{7}{15} \sin(2\tau) + \frac{7}{60} \sin(4\tau) - \frac{\sin(6\tau)}{45} + \frac{\sin(8\tau)}{480} \right].$$

Вид траектории центра масс системы на плоскости  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  при резонансе 1:2 представлен на рис. 8.

**8. Резонанс 3:2 (движение "галсами").** Теперь рассмотрим случай, когда частоты вращения ротора и платформ связаны соотношением  $2\omega_r = 3\omega_p$  или  $\omega_r = 3\omega$ ,  $\omega_p = 2\omega$ . Используя формулу (7), получаем следующее выражение для скорости центра масс системы  $V(\tau)$  при резонансе 3:2

$$V(\tau) = \frac{18J_r a_r a_p \omega}{ml} \left[ 1 - \frac{4}{5} (1 - a_p^2 (1 - 4k^2)) \sin^2 \tau + \frac{4a_p^2}{3} \left( 1 - \frac{21k^2}{5} \right) \left( \frac{4}{9} \sin^2 \tau - 1 \right) \sin^4 \tau \right] \sin^3 \tau.$$

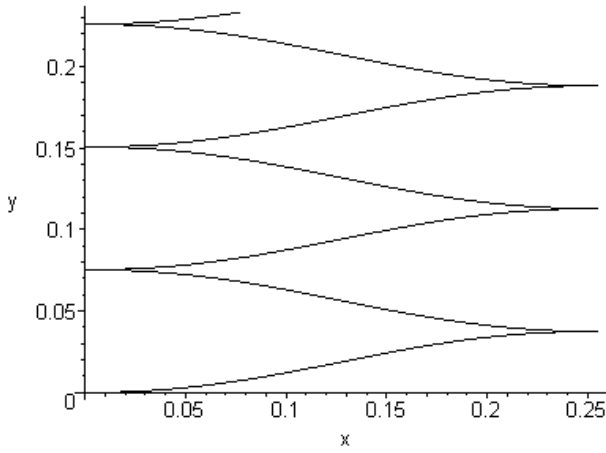


Рис. 9. Траектория центра масс при резонансе 3:2.

считать угол  $\theta(\tau)$  малым. При этом для  $x(\tau)$  и  $y(\tau)$  получаются такие выражения:

$$x(\tau) = \frac{72J_r a_r a_p}{25ml} \left[ (1 - \cos \tau)^2 \left( \frac{3}{2} + \cos \tau \right) \left( 1 + \frac{\cos \tau}{2} + \cos^2 \tau \right) + \frac{5a_p^2}{81} ((1 - \cos \tau)^2 \left( \frac{8}{3} + 3 \cos \tau + \cos^2 \tau \right) \left( \frac{11}{5} - 6k^2 \right) + (5 - 21k^2) \left( 1 + \frac{4}{3} \cos^2 \tau \right) \sin^6 \tau \cos \tau \right],$$

$$y(\tau) = \frac{81J_r^2 a_r^2 a_p^3}{16m^2 l^3} \left[ \tau - \frac{116}{175} \sin(2\tau) + \frac{\sin(4\tau)}{20} + \frac{4}{105} \sin(6\tau) - \frac{19}{1400} \sin(8\tau) + \frac{\sin(12\tau)}{2100} \right].$$

Вид траектории центра масс системы на плоскости  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  при резонансе 3:2 представлен на рис. 9.

**9. Резонанс 3:1.** Последним рассмотрим случай, когда частоты вращения ротора и платформ связаны соотношением  $\omega_r = 3\omega_p = 3\omega$  (случай  $\omega_r = -3\omega_p$  рассматривается аналогично). При резонансе 3:1, используя формулу (7), получим следующее выражение для скорости центра масс системы:

$$V(\tau) = \frac{9J_r a_r a_p \omega}{ml} \left[ \left( 1 - \frac{a_p^2}{3} \sin^2 \tau \right) \sin^3 \tau \cos \tau + \frac{a_p^2}{48} \left( \frac{1}{3} - \frac{k^2}{2} \right) \left( (3 + 2 \sin^2 \tau + 40 \sin^4 \tau) \sin(2\tau) - 6\tau \right) \right].$$

Для функции  $\theta(\tau)$  получаем

$$\theta(\tau) = \frac{9J_r a_r a_p^2}{5ml^2} \sin^5 \tau.$$

Далее, для функции  $\theta(\tau)$  получаем:

$$\theta(\tau) = \frac{36J_r a_r a_p^2}{5ml^2} \left( 1 - \frac{4}{7} \sin^2 \tau \right) \sin^5 \tau.$$

Можно показать, что, как и в предыдущем случае, максимум данного выражения достигается в точке  $\tau = \pi/2$ . Подставляя в это выражение значения параметров (8), (9), убеждаемся, что максимум функции  $\theta(\tau)$  приближенно равен 0.23143 и, следовательно, при любом  $\tau$  мы можем

Учитывая, что максимум данного выражения достигается в точке  $\tau = \pi/2$  и подставляя значения параметров (8), (9), убеждаемся, что максимум функции  $\theta(\tau)$  равен 0.135 и, следовательно, при любом  $\tau$  мы можем считать угол  $\theta(\tau)$  малым. При этом для  $x(\tau)$  и  $y(\tau)$  получаем:

$$x(\tau) = \frac{9J_r a_r a_p}{4ml} \left[ \left( 1 - \frac{2a_p^2}{9} \sin^2 \tau \right) \sin^4 \tau + \frac{a_p^2}{36} \left( \frac{1}{3} - \frac{k^2}{2} \right) (9 \sin^2 \tau + 3 \sin^4 \tau + 40 \sin^6 \tau - 9\tau^2) \right],$$

$$y(\tau) = \frac{9J_r^2 a_r^2 a_p^3}{5m^2 l^3} \sin^9 \tau.$$

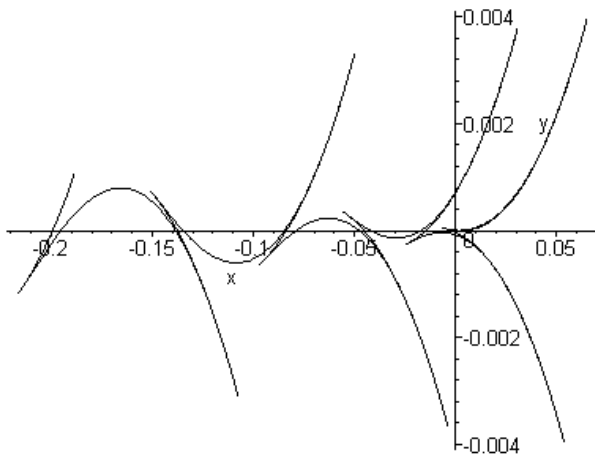


Рис. 10. Траектория центра масс при резонансе 3:1 .

Вид траектории центра масс системы на плоскости  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  при резонансе 3:1 представлен на рис. 10.

Таким образом, исследованы основные типы движения райдера на снейкборде. Показано, при каких условиях возможно движение вперед, при каких осуществляется разворот и т.п. Полученные результаты во многом согласуются с тем, что было замечено при наблюдении за движением райдеров и в опытах с реальным снейкбордом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04-01-00398), гранта "Научные школы" (НШ-2000.2003.1)

1. Lewis A.D, Ostrowski J.P, Murray R.M. and Burdick J.W. Nonholonomic mechanics and locomotion: the Snakeboard example // Proc. of the IEEE ICRA – 1994. – P. 2391-2400.
2. Ostrowski J.P., Burdick J.W., Lewis A.D. and Murray R.M. The Mechanics of Undulatory Locomotion: The Mixed Kinematic and Dynamic Case // Ibid. – 1995. – P. 1945-1951.
3. Ostrowski J.P. The Mechanics and Control of Undulatory Robotic Locomotion // Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California – 1995.
4. Ostrowski J.P., Desai J.P. and Kumar V. Optimal gait selection for nonholonomic locomotion systems // Internat. Journ. Robotics Res. – 2000. – **19**, № 5 – P. 225-237.
5. Bloch A.M, Krishnaprasad P.S., Marsden J.E. and Murray R.M. Nonholonomic Mechanical Systems with Symmetry // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1996. – **136**, № 1. – P. 21-99.
6. Koon W.S. and Marsden J.E. Optimal control for holonomic and nonholonomic mechanical systems with symmetry and Lagrangian reduction // SIAM J. Control Optim. – 1997. – **35**, № 3. – P. 901-929.
7. Bullo F., Lewis A.D. Kinematic controllability and motion planning for the snakeboard // IEEE Transactions on Robotics and Automation – 2003. – **19**, № 3. – P. 494-498.
8. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 519 с.
9. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры, 1961. – 824 с.
10. Ispolov Yu. G., Smolnikov B.A. Skateboard Dynamics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1996. – **131**. – P. 327-333.
11. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1995. – 560 с.