

УДК 531.38

©2005. М.П. Харламов

## БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА ОБОБЩЕНИЯ 4-ГО КЛАССА АППЕЛЬРОТА

Статья является продолжением публикации автора (Механика твердого тела, вып. 34, 2004), в которой получены обобщения классов Аппельрота движений волчка Ковалевской для случая двойного силового поля. Рассматривается аналог 4-го класса Аппельрота. Траектории этого семейства заполняют поверхность, четырехмерную в окрестности своих точек общего положения. Указаны два частных интеграла, образующих полную систему. Найдена их бифуркационная диаграмма и область значений соответствующих постоянных.

**Введение.** Рассмотрим твердое тело, закрепленное в неподвижной точке  $O$ . Пусть главные моменты инерции в  $O$  удовлетворяют отношению  $2 : 2 : 1$ . Предположим, что момент внешних сил относительно точки  $O$  имеет вид

$$\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\beta},$$

где векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  фиксированы в теле и параллельны экваториальной плоскости эллипсоида инерции, а векторы  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  неизменны в инерциальном пространстве.

Как показано в работе [5], без ограничения общности можно считать, что  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  образуют ортонормированную пару (в частности, являются главными осями инерции), а  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  взаимно ортогональны. Положим  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$  и выберем  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  в качестве подвижного триэдра. Вектор мгновенной угловой скорости обозначим через  $\boldsymbol{\omega}$ . В безразмерных переменных вращение тела описывается уравнениями Эйлера – Пуассона

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3 + \beta_3, & 2\dot{\omega}_2 &= -\omega_1\omega_3 - \alpha_3, & \dot{\omega}_3 &= \alpha_2 - \beta_1, \\ \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\beta}_1 &= \beta_2\omega_3 - \beta_3\omega_2 \end{aligned} \quad (123) . \quad (1)$$

Фазовое пространство  $P^6$  системы (1) определено в  $\mathbf{R}^9(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$  геометрическими интегралами

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = a^2, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = b^2, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0. \quad (2)$$

Полагаем

$$a > b > 0. \quad (3)$$

Тогда система (1), (2) не обладает циклическим интегралом и не сводится обычной процедурой к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы. Однако она вполне интегрируема, что обеспечивают первые интегралы в инволюции

$$\begin{aligned} H &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - (\alpha_1 + \beta_2), \\ K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2, \\ G &= (\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \frac{1}{2}\alpha_3\omega_3)^2 + (\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \frac{1}{2}\beta_3\omega_3)^2 + \\ &\quad + \omega_3(\gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_3) - \alpha_1 b^2 - \beta_2 a^2 \end{aligned} \quad (4)$$

(через  $\gamma_i$  обозначены компоненты в подвижных осях постоянного вектора  $\alpha \times \beta$ ).

Интеграл  $K$  впервые указан О.И. Богоявленским [2], а интеграл  $G$  (в более общей форме для задачи о движении гиростата) – А.Г. Рейманом и М.А. Семеновым-Тянь-Шанским [4].

В работе [5] найдено множество критических точек интегрального отображения

$$H \times K \times G : P^6 \rightarrow \mathbf{R}^3. \quad (5)$$

Показано, что оно представимо в виде объединения трех множеств  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{D}$ , каждое из которых является почти всюду гладким четырехмерным подмногообразием в  $P^6$  и в окрестности точек гладкости определяется системой двух инвариантных соотношений.

Первое критическое множество  $\mathfrak{M}$  указано в работе [2]. Оно совпадает с нулевым уровнем интеграла  $K$  и обобщает 1-й класс Аппельрота (класс Делоне) классической задачи Ковалевской [1]. Фазовая топология индуцированной на  $\mathfrak{M}$  динамической системы исследована Д.Б. Зотьевым [9].

Движения на критическом множестве  $\mathfrak{N}$ , найденном в работе [6], исследованы в [7, 8]. Показано, что это семейство движений является обобщением семейства так называемых особо замечательных движений 2-го и 3-го классов Аппельрота. Найдена бифуркационная диаграмма двух почти всюду независимых на  $\mathfrak{N}$  первых интегралов [8], уравнения движения на  $\mathfrak{N}$  разделены, изучены бифуркации двумерных торов Ливилля [7].

Данная работа посвящена исследованию некоторых свойств ограничения системы (1) на инвариантное подмножество  $\mathfrak{D}$ , заданное в  $P^6$  системой инвариантных соотношений [5]

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= (\alpha_3\omega_2 - \beta_3\omega_1)\omega_3 - 2\beta_1\omega_1^2 + 2(\alpha_1 - \beta_2)\omega_1\omega_2 + 2\alpha_2\omega_2^2, \\ R_2 &= (\alpha_3\omega_1 + \beta_3\omega_2)\omega_3^2 + [\alpha_3^2 + \beta_3^2 + 2\alpha_1\omega_1^2 + 2(\alpha_2 + \beta_1)\omega_1\omega_2 + 2\beta_2\omega_2^2]\omega_3 + \\ &\quad + 2\alpha_3[(\alpha_1 - \beta_2)\omega_1 + (\alpha_2 + \beta_1)\omega_2] + 2\beta_3[(\alpha_2 + \beta_1)\omega_1 - (\alpha_1 - \beta_2)\omega_2]. \end{aligned}$$

**1. Частные интегралы.** Отметим, что в точках вида

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \alpha_3 = \beta_3 = 0 \quad (7)$$

уравнения (6) зависимы на  $\mathfrak{D}$ . Если предположить, что равенства (7) выполнены на некотором интервале времени (а тогда и тождественно по  $t$  вдоль всей траектории), придем к семейству маятниковых движений вида

$$\begin{aligned} \alpha &= a(\mathbf{e}_1 \cos \theta - \mathbf{e}_2 \sin \theta), \quad \beta = \pm b(\mathbf{e}_1 \sin \theta + \mathbf{e}_2 \cos \theta), \quad \alpha \times \beta \equiv \pm ab\mathbf{e}_3, \\ \omega &= \theta \cdot \mathbf{e}_3, \quad \theta'' = -(a \pm b) \sin \theta, \end{aligned} \quad (8)$$

отмеченному в работе [5]. Постоянные интегралов (4) на таких траекториях удовлетворяют одному из двух условий

$$g = abh, \quad k = (a - b)^2, \quad h \geq -(a + b) \quad (9)$$

или

$$g = -abh, \quad k = (a + b)^2, \quad h \geq -(a - b). \quad (10)$$

Совокупность точек, принадлежащих траекториям (8), обозначим через  $\Omega$ . Пусть  $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D} \setminus \Omega$ .

Напомним, что в классической задаче Ковалевской ( $\beta = 0$ ) имеет место интеграл площадей, в качестве которого традиционно от работ Ковалевской выбирают функцию

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (11)$$

При этом интеграл  $G$  становится равным  $L^2$ .

Пусть  $\ell$  – постоянная интеграла (11). В классификации Г.Г. Аппельрота 4-й класс особо замечательных движений определяется следующими условиями:

1) второй многочлен Ковалевской имеет кратный корень, одна из переменных Ковалевской постоянна и равна кратному корню  $s$  соответствующей резольвенты Эйлера  $\varphi(s) = s(s-h)^2 + (a^2 - k)s - 2\ell^2$ :

$$\varphi(s) = 0, \quad \varphi'(s) = 0; \quad (12)$$

2) первые две компоненты угловой скорости постоянны, причем

$$\omega_1 = -\frac{\ell}{s}, \quad \omega_2 = 0. \quad (13)$$

Следующее утверждение устанавливает аналогию условий (13) для обобщенного волчка.

ТЕОРЕМА 1. На любой траектории, принадлежащей множеству  $\mathfrak{D}^*$ , отношения

$$\frac{\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1}, \quad \frac{\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2}$$

равны между собой и постоянны.

*Доказательство.* Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \\ M_1 &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1 = 2\omega_1, \quad M_2 = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2 = 2\omega_2, \\ M_\alpha &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 2\alpha_1\omega_1 + 2\alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3, \quad M_\beta = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\beta} = 2\beta_1\omega_1 + 2\beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3. \end{aligned}$$

В предположениях теоремы первое уравнение (6) запишем в виде

$$\frac{M_\alpha}{M_1} - \frac{M_\beta}{M_2} = 0. \quad (14)$$

Введем функцию

$$S = -\frac{M_\alpha M_1 + M_\beta M_2}{M_1^2 + M_2^2}.$$

Вычислим ее производную в силу уравнений (1):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{4(M_1^2 + M_2^2)^2} [(M_1^2 + M_2^2)\omega_3 + 4\alpha_3 M_1 + 4\beta_3 M_2] (M_\beta M_1 - M_\alpha M_2).$$

Тогда в силу (14) выражение в правой части есть тождественный ноль. Следовательно, функция  $S$  является частным интегралом на  $\mathfrak{D}^*$ . Обозначим постоянную этого интеграла через  $s$ :

$$\frac{M_\alpha M_1 + M_\beta M_2}{M_1^2 + M_2^2} = -s. \quad (15)$$

Из (14), (15) получаем  $M_\alpha = -sM_1, M_\beta = -sM_2$  с постоянной величиной  $s$ . Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 1.** В силу условия (14) функцию  $S$  можно также записать в виде

$$S = -\frac{1}{2} \left( \frac{M_\alpha}{M_1} + \frac{M_\beta}{M_2} \right). \quad (16)$$

**Замечание 2.** Отметим интересное геометрическое свойство изменения вектора кинетического момента на рассматриваемых движениях. Введем в плоскости  $O\alpha\beta$  неподвижный ортонормированный базис

$$\nu_1 = \frac{\alpha}{a}, \quad \nu_2 = \frac{\beta}{b}.$$

Пусть  $m_1 = \mathbf{M} \cdot \nu_1, m_2 = \mathbf{M} \cdot \nu_2$ . Тогда  $M_\alpha = am_1, M_\beta = bm_2$ , и условие (14) можно записать в виде

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{b}{a} \frac{m_2}{m_1},$$

или

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \vartheta_0,$$

где  $\vartheta, \vartheta_0$  – полярные углы проекций вектора  $\mathbf{M}$  соответственно на экваториальную плоскость тела и на неподвижную плоскость направляющих векторов силовых полей.

**ТЕОРЕМА 2.** На множестве  $\mathfrak{D}$  система (1) имеет частный интеграл

$$\begin{aligned} \Gamma = & (\alpha_3 \omega_1 + \beta_3 \omega_2) \omega_3 + 2\alpha_1 \omega_1^2 + 2(\alpha_2 + \beta_1) \omega_1 \omega_2 + 2\beta_2 \omega_2^2 - \\ & - 2(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) + a^2 + b^2. \end{aligned} \quad (17)$$

*Доказательство.* Производная функции (17) в силу системы (1) равна

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{4} \omega_3 R_1,$$

то есть обращается в нуль тождественно на  $\mathfrak{D}$ .  $\square$

Постоянную интеграла  $\Gamma$  обозначим через  $\tau$ .

В работе [5] уравнения (6) получены из условия наличия критической точки у функции

$$2G + (\tau - p^2)H + sK$$

с неопределенными множителями Лагранжа  $s, \tau$ . Сопоставляя (16), (17) с выражениями для  $s, \tau$ , имеющимися в [5], убеждаемся, что эти множители являются постоянными приведенных здесь интегралов  $S, \Gamma$ .

С учетом (3) введем положительные параметры  $p, r$ , полагая

$$p^2 = a^2 + b^2, \quad r^2 = a^2 - b^2.$$

Пусть  $h, k, g$  – постоянные общих интегралов (4). Тогда из уравнений (50) работы [5] получим, что на множестве  $\mathfrak{D}^*$  имеет место связь

$$h = s + \frac{p^2 - \tau}{2s}, \quad k = \tau + \frac{\tau^2 - 2p^2\tau + r^4}{4s^2}, \quad g = \frac{1}{2}(p^2 - \tau)s + \frac{p^4 - r^4}{4s}. \quad (18)$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения листа бифуркационной диаграммы отображения (5). Исключение  $\tau$  приводит к уравнениям

$$\psi(s) = 0, \quad \psi'(s) = 0, \quad (19)$$

где

$$\psi(s) = s^2(s - h)^2 + (p^2 - k)s^2 - 2gs + \frac{p^4 - r^4}{4}.$$

При условии  $\beta = 0$  ( $p^2 = r^2 = a^2$ ) имеем  $\psi(s) = s\varphi(s)$ . Таким образом, соотношения (19) аналогичны условиям (12). Следовательно, совокупность траекторий на множестве  $\mathfrak{D}$  является обобщением семейства особо замечательных движений 4-го класса Аппель-рота.

**2. Уравнения интегрального многообразия.** В силу соотношений (18) функции  $S, T$  образуют полную систему первых интегралов на  $\mathfrak{D}^*$ . В частности, система уравнений интегрального многообразия  $\{\zeta \in P^6 : H(\zeta) = h, K(\zeta) = k, G(\zeta) = g\}$  заменяется инвариантными соотношениями (6) и уравнениями

$$S = s, \quad T = \tau. \quad (20)$$

Введем комплексную замену переменных [6], обобщающую замену, предложенную С.В. Ковалевской для волчка в поле силы тяжести [3]:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha_1 - \beta_2) + i(\alpha_2 + \beta_1), & x_2 &= (\alpha_1 - \beta_2) - i(\alpha_2 + \beta_1), \\ y_1 &= (\alpha_1 + \beta_2) + i(\alpha_2 - \beta_1), & y_2 &= (\alpha_1 + \beta_2) - i(\alpha_2 - \beta_1), \\ z_1 &= \alpha_3 + i\beta_3, & z_2 &= \alpha_3 - i\beta_3, \\ w_1 &= \omega_1 + i\omega_2, & w_2 &= \omega_1 - i\omega_2, & w_3 &= \omega_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Переходя к переменным (21), преобразуем систему (6), (20) к виду

$$\begin{aligned} (y_2 + 2s)w_1 + x_1w_2 + z_1w_3 &= 0, \\ x_2w_1 + (y_1 + 2s)w_2 + z_2w_3 &= 0, \\ x_2z_1w_1 + x_1z_2w_2 + (\tau - x_1x_2)w_3 &= 0, \\ 2sw_1w_2 - (x_1x_2 + z_1z_2) + \tau &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

К этим уравнениям необходимо добавить геометрические интегралы (2), которые в переменных (21) примут вид

$$z_1^2 + x_1y_2 = r^2, \quad z_2^2 + x_2y_1 = r^2, \quad x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2 = 2p^2. \quad (23)$$

Пространство переменных (21) девятимерно с учетом комплексной сопряженности пар переменных  $x_2 = \overline{x_1}$ ,  $y_2 = \overline{y_1}$ ,  $z_2 = \overline{z_1}$  и вещественности  $w_3$ . Семь соотношений (22), (23) определяют в нем интегральное многообразие, которое, в случае отсутствия на нем точек зависимости интегралов  $S, T$ , будет состоять из двумерных торов с условно-периодическими траекториями.

**3. Бифуркационная диаграмма.** Введем интегральное отображение  $J$  индуцированной динамической системы на замыкании множества  $\mathfrak{D}^*$ , полагая

$$J(\zeta) = (S(\zeta), T(\zeta)) \in \mathbf{R}^2, \quad \zeta \in \text{Cl}(\mathfrak{D}^*).$$

Ввиду очевидной компактности прообразов точек  $\mathbf{R}^2$ , бифуркационная диаграмма  $\Sigma$  отображения  $J$  совпадает с множеством его критических значений.

**ТЕОРЕМА 3.** Бифуркационная диаграмма отображения

$$J = S \times T : \text{Cl}(\mathfrak{D}^*) \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad (24)$$

состоит из следующих подмножеств плоскости  $(s, \tau)$ :

- 1°)  $\tau = (a + b)^2, s \in [-a, 0) \cup [b, +\infty)$ ;
- 2°)  $\tau = (a - b)^2, s \in [-a, -b] \cup (0, +\infty)$ ;
- 3°)  $s = -a, \tau \geq (a - b)^2$ ;
- 4°)  $s = -b, \tau \geq (a - b)^2$ ;
- 5°)  $s = b, \tau \leq (a + b)^2$ ;
- 6°)  $s = a, \tau \leq (a + b)^2$ ;
- 7°)  $\tau = 0, s \in (0, +\infty)$ ;
- 8°)  $\tau = a^2 + b^2 - 2s^2 + 2\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}, s \in [-b, 0)$ ;
- 9°)  $\tau = a^2 + b^2 - 2s^2 - 2\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}, s \in (0, b]$ ;
- 10°)  $\tau = a^2 + b^2 - 2s^2 + 2\sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}, s \in [a, +\infty)$ .

*Доказательство.* Отметим, что точки зависимости уравнений системы (6) по определению считаются критическими для отображения (24). Поэтому в бифуркационную диаграмму необходимо включить значения, отвечающие тем из траекторий (8), которые принадлежат замыканию множества  $\mathfrak{D}^*$ , то есть значения  $(s, \tau)$ , при которых равенства (18) дают значения вида (9), (10).

Легко проверить, что луч (10) целиком содержится в поверхности (18). Ему соответствует множество точек случая 1°.

В то же время поверхности (18) принадлежат лишь точки луча (9), удовлетворяющие неравенству  $h^2 \geq 4ab$ . Им соответствует множество точек случая 2°.

Сегмент луча (9) в пределах

$$-2\sqrt{ab} < h < 2\sqrt{ab}$$

представляет собой одномерную часть бифуркационной диаграммы отображения (5). Для соответствующих траекторий (8) значение  $s$  не определено. Это означает, что такие траектории не имеют сколь угодно близких траекторий из множества  $\mathfrak{D}^*$ . Наличие явления, порождающего изолированную точку в бифуркационных диаграммах приведенных систем или систем на изоэнергетических уровнях, наблюдалось ранее лишь в случае Клебша.

Для движений из  $\mathfrak{D}^*$  преобразуем систему (22), (23).

Введем переменные  $x, z$ , полагая

$$x^2 = x_1 x_2, \quad z^2 = z_1 z_2. \quad (25)$$

Из последнего уравнения (23) выразим

$$y_1 y_2 = 2p^2 - x^2 - 2z^2, \quad (26)$$

а первые два представим в виде

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2)^2 &= 2r^2 - (x_1y_2 + x_2y_1) + 2z^2, \\ (z_1 - z_2)^2 &= 2r^2 - (x_1y_2 + x_2y_1) - 2z^2.\end{aligned}\tag{27}$$

Запишем условие совместности (23) по  $z_1, z_2$ :

$$(r^2 - x_1y_2)(r^2 - x_2y_1) = z^4.$$

Отсюда с учетом (26) найдем

$$r^2(x_1y_2 + x_2y_1) = r^4 + 2p^2x^2 - (x^2 + z^2)^2.\tag{28}$$

Обозначим

$$\Phi_{\pm}(x, z) = (x^2 + z^2 \pm r^2)^2 - 2(p^2 \pm r^2)x^2.$$

Из (27), (28) имеем следующие выражения:

$$r^2(z_1 + z_2)^2 = \Phi_+(x, z), \quad r^2(z_1 - z_2)^2 = \Phi_-(x, z).$$

Поэтому область изменения  $x, z$  определяется неравенствами

$$\Phi_+(x, z) \geq 0, \quad \Phi_-(x, z) \leq 0.\tag{29}$$

Заметим, что положения равновесия системы (1) включены в семейство траекторий  $\Omega$ , на остальных же движениях определитель трех первых уравнений (22) по  $w_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) тождественно равен нулю. Исключая из этого условия  $z_1^2, z_2^2$  и произведение  $y_1y_2$  с помощью (23), (26), получим

$$\begin{aligned}2s[(r^2x_1 - \tau y_1) + (r^2x_2 - \tau y_2)] &= -r^2(x_1y_2 + x_2y_1) + \\ &+ 2[2s^2(\tau - x^2) + p^2(\tau + x^2) - \tau(x^2 + z^2)].\end{aligned}\tag{30}$$

С другой стороны, непосредственное вычисление с учетом (25), (26) дает

$$(r^2x_1 - \tau y_1)(r^2x_2 - \tau y_2) = r^4x^2 + \tau(2p^2 - x^2 - 2z^2) - r^2\tau(x_1y_2 + x_2y_1).\tag{31}$$

Обозначим

$$\sigma = \tau^2 - 2p^2\tau + r^4, \quad \chi = \sqrt{k} \geq 0.$$

Из второго соотношения (18) следует тождество

$$4s^2\chi^2 = \sigma + 4s^2\tau.\tag{32}$$

Введем комплексно сопряженные переменные

$$\mu_1 = r^2x_1 - \tau y_1, \quad \mu_2 = r^2x_2 - \tau y_2.$$

Исключая из (30), (31) выражение  $x_1y_2 + x_2y_1$  с помощью (28), получим систему

$$\begin{aligned}2s(\mu_1 + \mu_2) &= (x^2 + z^2 - \tau)^2 - 4s^2x^2 - 4s^2\chi^2, \\ \mu_1\mu_2 &= \tau(x^2 + z^2 - \tau)^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma.\end{aligned}\tag{33}$$

Пусть

$$\lambda_1 = \sqrt{2s\mu_1 + \sigma}, \quad \lambda_2 = \sqrt{2s\mu_2 + \sigma}$$

выбраны комплексно сопряженными. Тогда система (33) запишется в виде

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = \Psi_+(x, z), \quad (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \Psi_-(x, z),$$

где

$$\Psi_{\pm}(x, z) = (x^2 + z^2 - \tau \pm 2s\chi)^2 - 4s^2x^2.$$

Условия ее разрешимости

$$\Psi_+(x, z) \geq 0, \quad \Psi_-(x, z) \leq 0. \quad (34)$$

Система неравенств (29), (34) задает на плоскости  $(x, z)$  область возможности движения (ОВД) – проекцию интегрального многообразия. При заданных  $s, \tau$  исходные переменные алгебраически выражаются через  $x, z$ . Бифуркационной диаграмме отвечают случаи перестройки ОВД при изменении  $s, \tau$  как параметров.

Введем на плоскости  $(x, z)$  криволинейные координаты  $s_1, s_2$ , полагая

$$s_1 = \frac{x^2 + z^2 + r^2}{2x}, \quad s_2 = \frac{x^2 + z^2 - r^2}{2x}.$$

Неравенства (29) мгновенно разрешаются

$$s_1^2 \geq a^2, \quad s_2^2 \leq b^2. \quad (35)$$

Соответствующая область на плоскости  $(x, z)$  показана на рис. 1 для первого квадранта. Указана также и координатная сеть  $(s_1, s_2)$ .

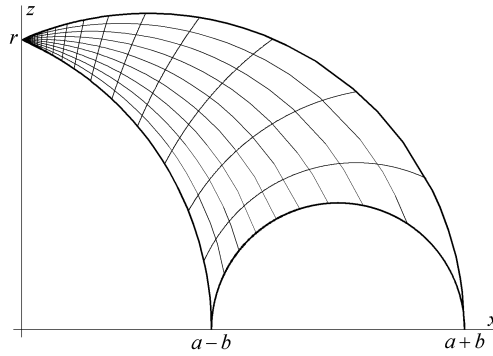


Рис. 1. Допустимая область на плоскости  $(x, z)$ .

Пусть  $\Pi_1$  – прямоугольник на плоскости  $(s_1, s_2)$  с вершинами  $s_1 = \pm a, s_2 = \pm b$ . Для решения системы (34) выразим

$$x^2 + z^2 - \tau = [s_1 + s_2 - \frac{\tau}{r^2}(s_1 - s_2)]x, \quad (36)$$

$$\Psi_+(x, z) = x^2\Lambda_+\Lambda_-, \quad \Psi_-(x, z) = x^2M_+M_-,$$

где

$$\Lambda_{\pm}(s_1, s_2) = s_1 + s_2 - \frac{\tau - 2s\chi}{r^2}(s_1 - s_2) \pm 2s,$$

$$M_{\pm}(s_1, s_2) = s_1 + s_2 - \frac{\tau + 2s\chi}{r^2}(s_1 - s_2) \pm 2s.$$



Из (34), (36) имеем

$$\Lambda_+(s_1, s_2)\Lambda_-(s_1, s_2) \geq 0, \quad M_+(s_1, s_2)M_-(s_1, s_2) \leq 0. \quad (37)$$

Рассмотрим параллелограмм  $\Pi_2$ , образованный прямыми  $\Lambda_{\pm} = 0$ ,  $M_{\pm} = 0$ . Решения системы неравенств (37) заполняют две полуполосы, примыкающие к сторонам  $\Pi_2$ , лежащим на прямых  $\Lambda_{\pm} = 0$ .

На рис. 2 приведен пример области возможности движения в плоскости  $(s_1, s_2)$  – решения системы неравенств (35), (37).

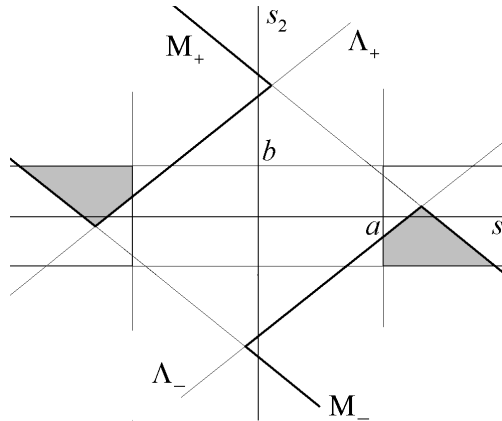


Рис. 2. Пример области возможности движения ( $a = 1$ ,  $b = 0.4$ ,  $\tau = 1.2$ ,  $s = -0.6$ ).

Дальнейшее исследование является чисто техническим. Бифуркации ОВД происходят в одном из следующих случаев: попадание вершины одного из параллелограммов  $\Pi_1, \Pi_2$  на границу другого, соответственная параллельность сторон параллелограммов  $\Pi_1, \Pi_2$  (уход вершин ОВД на бесконечность), вырождение полуполос в луч. Перечислив все такие случаи, придем к уравнениям, фигурирующим в теореме. Пусть  $\Delta$  – определяемое этими уравнениями множество в плоскости  $\mathbf{R}^2(s, \tau)$ . Перебирая связные компоненты множества  $\mathbf{R}^2(s, \tau) \setminus \Delta$ , отбросим те из них, для которых область возможности движения пуста. Оставшиеся компоненты (область возможности движения в пространстве констант интегралов) затенены на рис. 3. В бифуркационную диаграмму включаются те участки  $\Delta$ , которые являются граничными для оставшихся компонент, за исключением отрезков координатной оси  $s = 0$ , так как нулевое значение  $s$  недопустимо в силу (18). Отсюда получаем необходимые неравенства. Теорема доказана.  $\square$

#### 4. О возможности разделения переменных. Обозначим

$$\xi = x^2 + z^2 - \tau$$

и рассмотрим в пространстве  $(x, \xi, \mu)$  поверхность второго порядка

$$\mu^2 = \tau\xi^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma. \quad (38)$$

В силу второго уравнения (33), любая траектория изображается кривой на этой поверхности.

Очевидно, постоянные  $\tau, \sigma$  не могут быть одновременно отрицательными. Поэтому поверхность (38) имеет два семейства прямолинейных образующих.

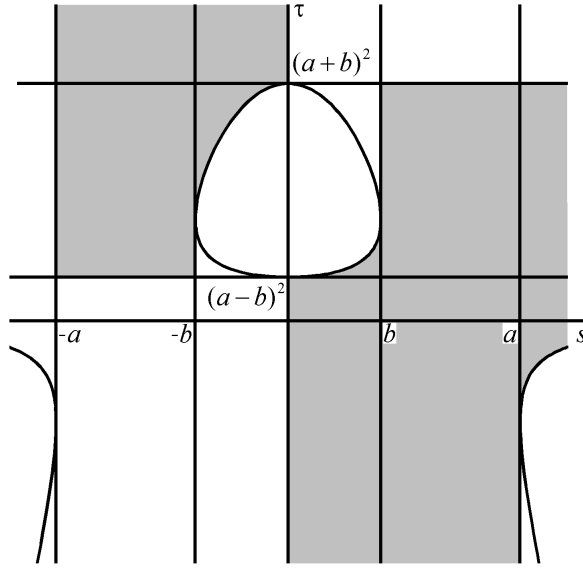


Рис. 3. Область существования движений в плоскости  $(s, \tau)$ .

Отметим два тождества, которым удовлетворяют введенные константы

$$\sigma + 2\tau(p^2 \pm r^2) = (\tau \pm r^2)^2. \quad (39)$$

Легко видеть, что в силу (32), (39) уравнения  $\Phi_{\pm} = 0$ ,  $\Psi_{\pm} = 0$  на плоскости  $(x, \xi)$  определяют систему прямых, каждая из которых касается сечения поверхности (38) плоскостью  $\mu = 0$  и является проекцией какой-либо из образующих поверхности (38). Поскольку через каждую точку поверхности (38) проходит ровно две образующих, то их параметры могут быть взяты в качестве локальных координат в той области на плоскости  $(x, \xi)$ , которая накрывается поверхностью (38).

Не уточняя вопросы вещественности переменных, положим формально

$$\xi = \sqrt{\sigma} \frac{uv + 1}{u + v}, \quad x = \sqrt{\tau} \frac{u - v}{u + v}.$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \Phi_+ &= \frac{1}{(u+v)^2} \varphi_1(u) \varphi_1(v), & \Phi_- &= \frac{1}{(u+v)^2} \varphi_2(u) \varphi_2(v), \\ \Psi_+ &= \frac{1}{(u+v)^2} \psi_1(u) \psi_1(v), & \Psi_- &= \frac{1}{(u+v)^2} \psi_2(u) \psi_2(v), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(w) &= \sqrt{\sigma}(1+w^2) + 2(\tau+r^2)w, & \varphi_2(w) &= \sqrt{\sigma}(1+w^2) + 2(\tau-r^2)w, \\ \psi_1(w) &= \sqrt{\sigma}(1+w^2) + 4s\chi w, & \psi_2(w) &= \sqrt{\sigma}(1+w^2) - 4s\chi w. \end{aligned}$$

В плоскости переменных  $(u, v)$  неравенства (29), (34) определяют совокупность прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Тот факт, что каждая связная компонента любого интегрального многообразия изображается таким прямоугольником (а при бифуркациях – отрезком или парой прямоугольников с общей стороной), свидетельствует о том, что в этих переменных уравнения движения разделяются.

Соответствующие выкладки слишком громоздки и выходят за рамки данной работы. Укажем лишь связь с установленным выше результатом.

Рассмотрим многочлен

$$Q(w) = \varphi_1(w)\varphi_2(w)\psi_1(w)\psi_2(w) \quad (40)$$

и установим все случаи наличия у него кратного корня.

Результант  $Q(w)$  и  $Q'(w)$  по  $w$  с точностью до постоянного множителя равен

$$s^4\tau^{12}(\tau^2 - 2p^2\tau + r^4)^{14}[2s^2 - (p^2 - r^2)]^4[2s^2 - (p^2 + r^2)]^4[\tau^2 - 2(p^2 - 2s^2)\tau + r^4]^2. \quad (41)$$

Как отмечалось, в силу соотношений (18), на рассматриваемом классе движений  $s \neq 0$ . Остальные случаи обращения в нуль выражения (41) приводят к уравнениям, перечисленным в теореме 3. Поэтому найденная бифуркационная диаграмма содержится в дискриминантном множестве многочлена (40). Такое явление типично именно для систем с разделяющимися переменными.

1. *Аппельрот Г.Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – 1940. – М.-Л.: Изд-во АН СССР. – С. 61–156.
2. *Богоявленский О.И.* Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле // Докл. АН СССР. – 1984. – **275**, № 6. – С. 1359–1363.
3. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Научн. работы. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 153–220.
4. *Рейман А.Г., Семенов-Тянь-Шанский М.А.* Лаково представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений // Функци. анализ и его приложения. – 1988. – **22**, № 2. – С. 87–88.
5. *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 47–58.
6. *Харламов М.П.* Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле // Там же. – 2002. – Вып. 32. – С. 32–38.
7. *Харламов М.П., Савушкин А.Ю.* Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской // Укр. математ. вестник. – 2004. – **1**, вып. 4. – С. 548–565.
8. *Харламов М.П., Савушкин А.Ю., Шведов Е.Г.* Бифуркационное множество в одной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 10–19.
9. *Zotев D.B.* Fomenko-Zieschang invariant in the Bogoyavlenskiy case // Регулярная и хаотическая динамика. – 2000. – **5**, № 4. – С. 437–458.