УДК 517.925+531.38

©2005. **А.Д. Брюно**

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вводится понятие локальной интегрируемости вблизи ее неподвижной точки, как конечной, так и бесконечно удаленной. Для локального анализа системы вблизи ее конечной неподвижной точки предлагается вычислять ее нормальную форму [1, 2]. Бесконечно удаленную неподвижную точку предлагается переводить в конечную неподвижную точку с помощью степенного преобразования координат [1, 2] и затем использовать приведение к нормальной форме. Этот подход применяется к частному случаю системы уравнений Эйлера–Пуассона, описывающей движения волчка. Оказалось, что у этой системы вблизи семейств конечных и бесконечно удаленных неподвижных точек есть области локальной интегрируемости.

Введение. Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_j = \varphi_j(X), \quad j = 1, \dots, n, \quad \cdot \stackrel{\text{def}}{=} d/dt, \tag{1}$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)$ и $\varphi_j(X)$ — многочлены. Такая система определена в n-мерном комплексном фазовом пространстве $\mathbb{C}^n$. Будем говорить, что система (1) *локально интегрируема* в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если в этой области она имеет нужное количество независимых первых интегралов вида $a(X)/b(X)$, где функции $a(X)$ и $b(X)$ аналитичны в области D. Конечно, в некоторой окрестности нестационарной точки X^0, где хотя бы одна функция $\varphi_j(X^0) \neq 0$, согласно теореме Коши система (1) имеет $n-1$ аналитический первый интеграл, т.е. интегрируема. Поэтому вопрос об интегрируемости интересен для областей, содержащих особенности типа неподвижной точки или периодического решения.

В окрестности неподвижной точки интегрируемость системы (1) предлагается [3] изучать с помощью нормальной формы [1, 2] системы (1). Приведение системы (1) к ее нормальной форме — это введение таких локальных координат, в которых система (1) принимает наиболее простую (*нормальную*) форму (см. ниже п. 2).

Если нормализующая замена координат сходится, то по нормальной форме можно изучить все решения исходной системы (1) вблизи неподвижной точки. В частности, все периодические и условно периодические решения. Делая преобразование, обратное нормализующему, получим эти решения в исходных координатах.

Если же нормализующая замена расходится, то по нормальной форме можно изучить решения исходной системы лишь приближенно, но с любой степенью точности. Однако, с ростом точности уменьшается окрестность, в которой она достигается. В пределе такая окрестность стягивается в точку. Тем не менее, даже в случае расходимости нормализующего преобразования по нормальной форме можно находить такие семейства периодических и условно периодических решений, которые примыкают к неподвижной точке [1, 2]. Но при этом теряются такие семейства этих решений, которые не примыкают к неподвижной точке. Они находятся по нормальной форме только в случае сходимости нормализующей замены.

Если в окрестности неподвижной точки система (1) локально интегрируема, то там решения ведут себя регулярно, и нормализующая замена, как правило, сходится.

Верно и обратное: если нормализующее преобразование сходится, то исходная система (1) локально интегрируема.

Чтобы исследовать интегрируемость системы (1) вблизи бесконечно удаленных точек, надо компактифицировать фазовое пространство. Например, рассмотреть систему (1) в проективном комплексном пространстве $P\mathbb{C}^n$, где $x_j = y_j/y_0$, или в торическом замыкании пространства $\mathbb{C}^n$, которое является прямым поизведением n комплексных сфер и инвариантно при степенных преобразованиях координат. Тогда данное выше определение локальной интегрируемости переносится на множества, содержащие бесконечно удаленные точки. В частности, – на множества, содержащие неподвижные точки в бесконечности, к которым стремятся решения системы (1). Например, решениям с определенной степенной асимптотикой соответствует определенная неподвижная точка в бесконечности.

Чтобы исследовать решения системы (1) вблизи бесконечно удаленной неподвижной точки, можно перевести эту точку в конечную с помощью степенного преобразования координат (подробнее см. п. 5). После этого систему в окрестности конечной неподвижной точки можно изучать с помощью нормальной формы, как сказано выше. В частности, — ее интегрируемость, периодичские и условно периодические решения, а также — вычислять с любой точностью ее приближенные решения. Сделав затем обратное степенное преобразование, получим эту информацию в координатах исходной системы (1).

Бесконечно удаленные неподвижные точки системы (1) (или степенные асимптотики ее решений) можно найти с помощью техники многогранника Ньютона и укороченных систем, описанной в гл. III книги [2].

Таким образом, можно изучать локальную интегрируемость системы (1) вблизи ее конечных и бесконечных особых точек, а не только ее глобальную интегрируемость во всем фазовом пространстве, как это делалось до сих пор. Первые попытки такого рода предприняты в работе [3]. Здесь они продолжены.

В [4, 5] для уравнений Н. Ковалевского методами степенной геометрии [2] было найдено 22 семейства степенно-логарифмических разложений решений, имеющих степенные асимптотики. Из них 8 семейств степенных разложений имеют наибольшее возможное число произвольных постоянных, т.е. решения этих семейств заполняют некоторую область фазового пространства, в которой имеется полный набор интегралов, соответствующих этим произвольным постоянным. Однако эти локальные интегралы существуют не во всем фазовом пространстве, а лишь в его области. В этих случаях аналогичные области и локальные интегралы имеются в системе Эйлера-Пуассона. Для поиска этих областей и анализа в них строения фазового пространства было использовано приведение системы уравнений Эйлера–Пуассона к нормальной форме. Обычно нормальная форма вычисляется в окрестности неподвижной точки [1]. Но в [2, гл. III] показано, что с помощью степенного преобразования степенная асимптотика решения переводится в неподвижную точку. Это позволяет вычислять нормальную форму в окрестности степенной асимптотики, что и было сделано для трех из указанных 22 семейств. Нормализация проводилась В.Ф. Еднералом с помощью его программы, написанной в системе MATHEMATICA.

Для частного случая системы уравнений Эйлера–Пуассона $A = B$, $x_0 \neq 0$, $y_0 = = z_0 = 0$ вычислялись нормальные формы в окрестности нерезонансных и резонансных неподвижных точек и в окрестности степенных асимптотик решений с различными наборами собственных чисел. Оказалось, что у этой системы имеются множества как конечных, так и бесконечно удаленных особых точек, вблизи которых она локально интегрируема.

Отметим еще, что из глобальной интегрируемости системы (1) следует ее локальная интегрируемость вблизи любой неподвижной точки. Но из локальной интегрируемости системы (1), вообще говоря, не следует ее глобальная интегрируемость.

Ниже все векторы обозначаются заглавными буквами и записываются как матрицы-строки, а звездочка * означает транспонирование.

1. Локальная интегрируемость. В последнее время вырос интерес к интегрируемым системам дифференциальных уравнений. При этом обычно к интегрируемым относят те системы, которые интегрируемы во всем фазовом пространстве, т. е. *глобально интегрируемы*. Однако, имеются системы дифференциальных уравнений вида (1) с полиномиальными правыми частями $\varphi_j(X)$, которые интегрируемы лишь в части фазового пространства и неинтегрируемы в другой его части. Рассмотрим простейший пример такой системы.

Пример 1.1. Система (28) из [6] при $b = 1/2$, $c = -1$ имеет вид

$$\dot{x} = y + 2xy, \quad \dot{y} = -x - x^2 + xy + y^2. \tag{2}$$

Согласно (32) [6] она имеет первый интеграл

$$[(1+x)^2 - (1+x)y + y^2]|1+2x|^{-1} = c \exp\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2+2x-y}{y\sqrt{3}}\right], \tag{3}$$

где c — произвольная постоянная. Система (2) имеет 2 неподвижные точки

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x = y = 0\}, \\ S_2 &= \{x = -1,\ y = 0\} \end{aligned} \tag{4}$$

и инвариантную прямую

$$T = \{x = -1/2\}. \tag{5}$$

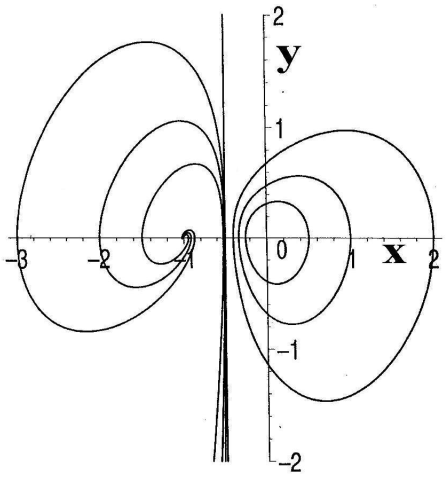

Рис. 1. Фазовый портрет системы (2).

В точке S_1 она имеет центр, а в точке S_2 — фокус. Рис. 1 показывает расположение интегральных кривых системы (2) на плоскости (x, y). Система (2) интегрируема в окрестности неподвижной точки S_1, но она неинтегрируема в окрестности точки S_2. В точке S_2 интеграл (3) имеет существенную особенность и не может быть представлен как отношение двух аналитических функций. Вне окрестности точки S_2 система (2) интегрируема.

Поэтому **задачу об интегрируемости** можно поставить так: в окрестностях каких особенностей система (1) интегрируема, а в окрестности каких ее особенностей она неинтегрируема. Такие *интегрируемость* и *неинтегрируемость* будем называть *локальными.* Полезно также выделять инвариантные локально интегрируемые множества. Максимальное инвариантное множество, где система (2) интегрируема, это полуплоскость $x \geq -1/2$.

2. Нормальная форма. Наиболее просто локальную интегрируемость (или неинтегрируемость) системы (1) вблизи особенности можно установить по ее нормальной форме [1, гл. III; 2, гл. V, § 6]. Это справедливо для таких особенностей, как неподвижная точка, периодическое решение, инвариантный тор и аналогичных особенностей в бесконечности. Здесь напомним лишь нормальную форму системы в окрестности ее неподвижной точки $X = 0$. Там система (1) имеет вид

$$\dot{X}^* = AX^* + \Phi^*(X), \quad \cdot \stackrel{\text{def}}{=} d/dt, \tag{6}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)$, A — постоянная квадратная матрица и векторный многочлен $\Phi(X) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ не содержит свободных и линейных членов, а звездочка * означает транспонирование. Пусть линейная замена

$$X^* = BY^* \tag{7}$$

приводит матрицу A к жордановой форме $J = B^{-1}AB$, а всю систему (6) — к виду

$$\dot{Y}^* = JY^* + \tilde{\Phi}^*(Y). \tag{8}$$

Пусть формальная замена координат

$$Y = Z + \Xi(Z), \tag{9}$$

где $\Xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\xi_j(Z)$ суть формальные степенные ряды без свободных и линейных членов, переводит систему (8) в систему

$$\dot{Z}^* = JZ^* + \Psi^*(Z), \tag{10}$$

где $\Psi(Z)$ — векторный степенной ряд без свободных и линейных членов. Запишем ее в виде

$$\dot{z}_j = z_j g_j(Z) = z_j \sum g_{jQ} Z^Q \text{ по } Q \in \mathbb{N}_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

где $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $Z^Q = z_1^{q_1} \ldots z_n^{q_n}$ и $\mathbb{N}_j = \{Q : Q \in \mathbb{Z}^n, \ \ Q + E_j \geq 0\}$, $j = 1, \ldots, n$, а E_j — j-й единичный вектор. Положим

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{N}_n. \tag{12}$$

Поскольку J — жорданова матрица, то ее диагональ $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ состоит из собственных чисел матрицы A.

Система (10), (11) называется *резонансной нормальной формой*, если:

а) матрица J — жорданова;

б) в записи (11) имеются только *резонансные члены* $g_{jQ}Z^Q$, для которых скалярное произведение

$$\langle Q, \Lambda \rangle \stackrel{\text{def}}{=} q_1\lambda_1 + \ldots + q_n\lambda_n = 0. \tag{13}$$

Теорема 2.1 о нормальной форме. [1, гл. III, § 1]. *Существует формальная замена* (9), *приводящая систему* (8) *к нормальной форме* (10), (11).

Свойства нормальной формы и нормализующего преобразования см. там же и в [7]. Пусть k — число линейно независимых решений $Q \in \mathbb{N}$ уравнения (13), оно называется *кратностью резонанса.* Интегрирование нормальной формы (11) сводится к решению системы порядка k относительно k *резонансных переменных*.

Приведение системы к нормальной форме — это введение таких координат, в которых система имеет наиболее простой вид и решения по возможности выпрямлены. Однако, нормализующее преобразование не всегда сходится и дает аналитическую замену локальных координат. Часто оно расходится и может быть использовано лишь для приближенного (с точностью любого порядка) описания решений вблизи неподвижной точки. Но и в случае расходимости оно позволяет находить семейства периодических и условно периодических решений, примыкающие к неподвижной точке. В [7] указаны условия на нормальную форму (11), которые обеспечивают сходимость нормализующего преобразования.

Пример 2.1 (продолжение примера 1.1). В точке S_1 для системы (2) матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Ее собственные числа $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Нормальная форма (11) системы (2) имеет вид

$$\dot{z}_j = z_j \left[\lambda_j + \sum_{l=1}^{\infty} g_{jl}(z_1 z_2)^l \right], \quad j = 1, 2, \tag{15}$$

ибо резонансное уравнение (13) есть

$$\langle Q, \Lambda \rangle \stackrel{\text{def}}{=} q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 = i(q_1 - q_2) = 0$$

и имеет решения $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{N}$ только вида: целые $q_1 = q_2 = l \geq 0$.

Если положить $\rho = z_1 z_2$, то из системы (15) выделяется уравнение

$$\dot{\rho} = \rho \sum_{l=1}^{\infty} (g_{1l} + g_{2l})\rho^l, \tag{16}$$

которое явно интегрируется. Для системы (2) получается, что все

$$g_{1l} + g_{2l} = 0, \quad l = 1, 2,$$

т. е. уравнение (16) имеет решение

$$\rho = \text{const}, \tag{17}$$

а для системы (15) — это первый интеграл. В этом случае нормализующее преобразование сходится в некоторой окрестности точки S_1, а ρ является вещественной величиной для вещественных x и y вида $\rho = x^2 + y^2 + \ldots$, т.е. аналогично квадрату радиуса-вектора. Следовательно, система (2) в окрестности неподвижной точки S_1 имеет первый интеграл (17) , т. е. является локально интегрируемой.

В точке S_2 положим $x = -1 + \xi$, тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные числа

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравнение (13), т. е.

$$\langle Q, \Lambda \rangle \stackrel{\text{def}}{=} q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 = 0,$$

имеет только одно вещественное решение $q_1 = q_2 = 0$. Следовательно, нормальная форма (11) является линейной системой

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j, \quad j = 1, 2 \tag{18}$$

и ее решения суть

$$z_j = \tilde{c} \exp \lambda_j t, \quad j = 1, 2. \tag{19}$$

При этом $\rho = z_1 z_2$ и $\varphi = -i \ln(z_1/z_2)$ являются вещественными для вещественных ξ и y. Они имеют смысл квадрата радиуса-вектора и полярного угла. В этих координатах решения (19) системы (18) имеют вид

$$\rho = \tilde{c}\, e^{-t}, \quad \varphi = \sqrt{3}\,(t + t_0).$$

Следовательно, ее интегральные кривые суть спирали

$$\rho = \tilde{c} \exp(-\varphi/\sqrt{3}).$$

В этом случае нормализующее преобразование сходится в некоторой окрестности точки S_2. Следовательно, система (2) в некоторой окрестности точки S_2 локально неинтегрируема.

3. Первые интегралы нормальной формы. Пусть нормальная форма (11) линейна

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{20}$$

и $\lambda_n \neq 0$. Тогда она имеет $n - 1$ первый интеграл

$$z_j = \begin{cases} c_j, & \text{если} \quad \lambda_j = 0, \\ c_j z_n^{\lambda_j/\lambda_n}, & \text{если} \quad \lambda_j \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{21}$$

где c_j — произвольные постоянные. Пусть α — комплексное число: $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$, $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$. Тогда комплексная функция z^α устроена довольно сложно в окрестности нуля. Поэтому если более чем одно отношение λ_j/λ_n является комплексным числом, то такой случай будем считать неинтегрируемым и в дальнейшем будем рассматривать только случаи, когда все отношения λ_i/λ_n, $i = 1, \ldots, n-1$ вещественны. Это означает, что в комплексной плоскости все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ лежат на одной прямой $\mathcal{L}$, проходящей через ноль. Будем различать три случая:

1. На прямой $\mathcal{L}$ все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ лежат по одну сторону от нуля.

2. Несколько чисел λ_i равны нулю, скажем $\lambda_1 = \ldots = \lambda_l = 0$, а остальные числа $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n$ лежат по одну сторону от нуля.

3. Числа λ_j расположены по разные стороны от нуля.

Сформулируем условия на нормальную форму (10) и вектор Λ, обеспечивающие сходимость нормализующего преобразования в этих случаях [7].

Условие A. В случае 1 нет ограничений на нормальную форму (10); в случае 2 в нормальной форме (10) $\psi_1 \equiv \ldots \equiv \psi_l \equiv 0$; в случае 3 существует такой степенной ряд $a(Z)$, что все

$$\psi_j = \lambda_j z_j \, a(Z), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

В частности, это условие всегда выполнено для линейной нормальной формы (20). Пусть

$$\omega_k = \min |\langle Q, \Lambda \rangle| \text{ по } Q \in \mathbb{N}, \quad \langle Q, \Lambda \rangle \neq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j < 2^k, \quad k = 1, 2 \ldots$$

Условие ω. Сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln \omega_{k+1}}{\omega_k},$$

т.е. эта сумма $> -\infty$.

Очевидно, что в случаях 1 и 2 это условие автоматически выполнено. В случае 3 оно выполнено для почти всех векторов $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Теорема 3.1. [7; 1, гл. III]. *Если вектор из собственных чисел Λ удовлетворяет условию ω и нормальная форма* (11) *удовлетворяет условию A, то нормализующее преобразование* (9) *сходится.*

Отметим, что в случае 1 нормальная форма полиномиальна. Если собственные числа λ_j упорядочены по росту $|\lambda_j|$, то нормальная форма имеет треугольный вид

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j + \delta_j z_{j-1} + p_j(z_1, \ldots, z_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $\delta_j = 0$, если $\lambda_{j-1} \neq \lambda_j$, а p_j содержит только такие мономы $z_1^{q_1} \ldots z_{j-1}^{q_{j-1}}$, что

$$\lambda_j = q_1 \lambda_1 + \ldots + q_{j-1} \lambda_{j-1}.$$

В этом случае нормализующее преобразование всегда сходится.

Теорема 3.2.[8]. *Если у исходной системы имеется первый интеграл $\tilde{h}(X) = \mathrm{const}$ в виде ряда по целым степеням X, то в нормальной форме он также является рядом $h(Z) = \sum h_Q Z^Q$ по целым степеням Z, содержащим только резонансные мономы $h_Q Z^Q$ с $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$.*

Отметим, что неинтегрируемость нормальной формы влечет локальную неинтегрируемость исходной системы. Но интегрируемость нормальной формы влечет интегрируемость исходной системы только в случае сходимости нормализующего преобразования, если же оно расходится, то, как правило, исходная система неинтегрируема.

4. Уравнения Эйлера–Пуассона. Систему шести уравнений Эйлера–Пуассона [9], описывающую движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой (волчка), рассмотрим в случае $A = B = 1$, $C = c$, $Mgx_0 = -1$, $y_0 = z_0 = 0$:

$$\dot{p} = (1-c)qr, \quad \dot{q} = (c-1)pr - \gamma_3, \quad \dot{r} = \gamma_2/c, \tag{23}$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \tag{24}$$

Единственный параметр системы $c \in (0, 2]$. Она имеет три общих первых интеграла

$$\begin{aligned} I_1 &\stackrel{\text{def}}{=} p^2 + q^2 + cr^2 + 2\gamma_1 = h = \text{const}, \\ I_2 &\stackrel{\text{def}}{=} p\gamma_1 + q\gamma_2 + cr\gamma_3 = l = \text{const}, \\ I_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \end{aligned} \tag{25}$$

Это интегралы энергии, момента и геометрический. Как известно [9], система (23), (24) интегрируема в квадратурах, если она имеет четвертый (дополнительный) интеграл I_4. Он известен в двух случаях: при $c = 1$ (*случай Лагранжа*)

$$I_4 \stackrel{\text{def}}{=} p = \text{const} \tag{26}$$

и при $c = 1/2$ (*случай С. Ковалевской*)

$$I_5 \stackrel{\text{def}}{=} (p^2 - q^2 + 2\gamma_1)^2 + (2pq + 2\gamma_2)^2 = \text{const}. \tag{27}$$

Теорема 4.1. *Система* (23), (24) *имеет две пары двупараметрических* (*по* c *и* p) *семейств неподвижных точек*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\sigma: \quad & p \in \mathbb{C}, \ q = 0, \ r = 0, \ \gamma_1 = \sigma, \ \gamma_2 = 0, \ \gamma_3 = 0; \ \sigma = \pm 1; \\ \mathbf{T}_\sigma: \quad & p \in \mathbb{C}, \ q = 0, \ r = \sigma\sqrt{1-(c-1)^2p^4}/((c-1)p), \ \gamma_1 = (c-1)p^2, \\ & \gamma_2 = 0, \ \gamma_3 = \sigma\sqrt{1-(c-1)^2p^4}; \ \sigma = \pm 1. \end{aligned}$$

В неподвижных точках этих семейств два собственных числа нулевые $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, а остальные разбиты на пары $\lambda_3 = -\lambda_4$, $\lambda_5 = -\lambda_6$. В [10] показано, что у семейства $\mathbf{S}_+$ имеются шесть множеств, вблизи которых система (23), (24) локально интегрируема, причем два из них вещественные. Для точек этих множеств отношение λ_5/λ_3 невещественно. В работе [3] в семействе $\mathbf{S}_+$ было выделено 2 однопараметрических (по c) подсемейства $\mathbf{S}^{\pm}_{+3}$, на которых имеется резонанс $\lambda_5 = 2\lambda_3$. В окрестностях неподвижных точек этих подсемейств вычислялись нормальные формы системы (23), (24) до членов порядка 6 (т. е. с $\sum q_i \leq 6$ в (11)), а также — интегралы (25) – (27) в нормализованных координатах. Здесь младшими резонансными являются члены порядка 4. Они аннулируются на обоих семействах только при $c = 0.5$ и $c = 1$. В этих случаях система локально интегрируема в окрестностях неподвижных точек обоих семейств, ибо она глобально интегрируема. Кроме того, для четырех значений c члены порядка 4 аннулируются только на одном из двух подсемейств $\mathbf{S}^{\pm}_{+3}$. В [3] было предположено, что в этих случаях система (23), (24) локально интегрируема вблизи одной из двух неподвижных точек и локально неинтегрируема вблизи другой. Однако более тщательный анализ [10] показал, что во всех этих случаях нормальная форма не имеет дополнительного формального интеграла, т.е. является неинтегрируемой. Оказалось, что в этих случаях нормальная форма имеет дополнительные семейства периодических решений, которые примыкают к неподвижной точке.

5. Степенное преобразование. Обозначим $\ln X = (\ln x_1, \ldots, \ln x_n)$. В гл. III книги [2] описывается, как изменяется система (1) при *степенном преобразовании*

$$(\ln X)^* = \alpha (\ln U)^*, \tag{28}$$

где α — неособая вещественная матрица размера $n \times n$. Пусть при замене (28) система (1) переходит в систему

$$\dot{U} = H(U).$$

В этой системе правая часть каждого уравнения является конечной суммой мономов. Для сохранения целочисленности показателей степени в этих мономах надо использовать преобразование (28) с унимодулярной матрицей α, т. е. все ее элементы – целые и $\det \alpha = \pm 1$.

Пусть система (1) имеет степенную асимптотику решений

$$x_j = b_j \tau^{p_j}, \quad b_j \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{29}$$

В гл. III книги [2] показано, как с помощью степенного преобразования (28) и степенной замены времени $dt = U^R\, d\tau$ перевести эту асимптотику в неподвижную точку. Окрестность неподвижной точки можно исследовать с помощью нормальной формы, в том числе — и на интегрируемость. Для исходной системы это даст ее анализ в окрестности кривой (29).

Пример 5.1 (продолжение примеров 1.1 и 2.1). Система (2) имеет инвариантную прямую $x = -0.5$. Изучим поведение решений системы вблизи этой прямой при $y \to \infty$. Сделаем степенное преобразование и замену времени

$$y = 1/u, \quad dt = u\, d\tau. \tag{30}$$

Тогда система (2) перейдет в систему

$$x' = 1 + 2x, \quad u' = u(-1 + xu + xu^2 + x^2u^2), \qquad ' \stackrel{\text{def}}{=} d/d\tau. \tag{31}$$

У этой системы неподвижная точка имеется при $x = -1/2$, $u = 0$. Положим $x = -1/2 + v$, тогда неподвижная точка есть $v = u = 0$. Для нее матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

диагональна; ее собственные числа суть 2 и -1, т. е. $\Lambda = (2, -1)$. Нормальная форма (11) имеет вид

$$z_j' = z_j \left[\lambda_j + \sum_{l=1}^{\infty} g_{jl} (z_1 z_2^2)^l \right], \quad j = 1, 2, \tag{32}$$

ибо уравнение (13) для $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{N}$ имеет решения $Q = (l, 2l)$, целое $l \geq 0$. Однако для системы (31) в ее нормальной форме (32) все коэффициенты $g_{jl} = 0$, и ее нормальная форма линейна

$$z_1' = 2z_1, \quad z_2' = -z_2.$$

Она имеет первый интеграл
$$I \overset{\text{def}}{=} z_1 z_2^2 = \text{const}.$$
По теореме 3.1 нормализующее преобразование сходится. Следовательно, система (31) интегрируема в окрестности неподвижной точки, а система (2) — в окрестности прямой $x = -0.5$ при больших $|y|$.

В [4, 5, 11] описано 22 семейства $\mathcal{F}_1$–$\mathcal{F}_{22}$ степенных асимптотик решений уравнений Эйлера–Пуассона в случае $B \neq C$, $x_0 \neq 0$, $y_0 = z_0 = 0$. Из них 15 имеются при $A = B$, т.е. для системы (23), (24) с $c \neq 1$. Мы хотим исследовать окрестности асимптотик семейства $\mathcal{F}_{10}$. Для этого делаем степенное преобразование

$$\begin{array}{lll} p = x_4 x_5 x_6^{-1}, & q = x_5 x_6^{-1}, & r = x_6^{-1}, \\ \gamma_1 = x_1 x_6^{-2}, & \gamma_2 = x_2 x_6^{-2}, & \gamma_3 = x_3 x_5 x_6^{-2} \end{array} \tag{32$'$}$$

с матрицей
$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det \alpha = 1, \tag{33}$$
и замену времени $dt = x_6\, d\tau$. Тогда система (23), (24) принимает вид

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 - 2x_1x_2/c - x_3x_5^2, \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2^2/c + x_3x_4x_5^2, \\ x_3' &= x_1 - x_2x_4 - (c-1)x_3x_4 + x_3^2 - x_2x_3/c, \\ x_4' &= 1 - c + (1-c)x_4^2 + x_3x_4, \\ x_5' &= [(c-1)x_4 - x_3 - x_2/c]x_5, \\ x_6' &= -x_2x_6/c. \end{aligned} \tag{34}$$

При этом первые интегралы (25)–(27) принимают вид

$$\begin{aligned} I_1 &= x_6^{-2}[c - 2x_1 + (x_4^2+1)x_5^2], \\ I_2 &= x_6^{-3}x_5(x_1x_4 + x_2 + cx_3), \\ I_3 &= x_6^{-4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2x_5^2), \\ I_4 &= x_4x_5x_6^{-1}, \\ I_5 &= x_6^{-4}[(2x_1 + x_4^2x_5^2 - x_5^2)^2 + 4(x_2 + x_4x_5^2)^2]. \end{aligned} \tag{35}$$

Теорема 5.1. *При $x_5 = x_6 = 0$ система (34) имеет три семейства неподвижных точек, у которых одинаковы $x_1 = c/2$, $x_2 = i\,c/2$:*

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A}: & x_3 = -i\,\dfrac{4c-3}{4c-2}, & x_4 = i\,\dfrac{2c-2}{2c-1}; \\ \mathbf{B}: & x_3 = 0, & x_4 = -i; \\ \mathbf{C}: & x_3 = ic\,(2-c), & x_4 = i\,(1-c). \end{array} \tag{36}$$

Семейства $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *при $c \in (1/2, 1)$ соответствуют двум ветвям семейства $\mathcal{F}_{10}$, которые соединяются при $c = 3/4$. Семейство* $\mathbf{A}$ *при $c \in (0, 1/2)$ и семейство* $\mathbf{B}$ *при*

$c \in (1, 2)$ *соответствуют семейству* $\mathcal{F}_8$. *Семейство* **C** *соответствует семейству* $\mathcal{F}_6$.

Согласно [4, 5, 11] этим семействам соответствуют такие степенные асимптотики решений системы (23), (24) при $t \to 0$:

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{A}: & p = b_1 t^{1-2c}, & q = b_2 t^{1-2c}, & r = b_3 t^{-1}, \\ & \gamma_1 = b_4 t^{-2}, & \gamma_2 = b_5 t^{-2}, & \gamma_3 = b_6 t^{-2c}; \\ \mathbf{B}: & p = b_1 t^{2c-2}, & q = b_2 t^{2c-2}, & r = b_3 t^{-1}, \\ & \gamma_1 = b_4 t^{-2}, & \gamma_2 = b_5 t^{-2}, & \gamma_3 = b_6 t^{2c-3}; \\ \mathbf{C}: & p = b_1 t^{2}, & q = b_2 t^{2}, & r = b_3 t^{-1}, \\ & \gamma_1 = b_4 t^{-2}, & \gamma_2 = b_5 t^{-2}, & \gamma_3 = b_6 t, \end{array} \tag{37}$$

где b_j — некоторые комплексные постоянные. Матрица линейной части системы вблизи этих неподвижных точек имеет блочный вид

$$A = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ E & F & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где D, E, F, G – матрицы размера 2×2:

$$D = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -1 & -2i \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \lambda_5 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

у матрицы F элементы разные на разных семействах и все отличны от нуля. Следовательно, для всех семейств

$$\lambda_1 = -i, \quad \lambda_2 = -2i, \quad \lambda_6 = -i/2. \tag{40}$$

Рассмотрим семейства **A**, **B** и **C** по отдельности.

6. Семейство A. Семейство **A** нас интересует при $c \in (0, 1)$, $c \neq 1/2$. Для этого семейства в (39) $e_{12} = -i\,(2c-3)/(2c)$, а матрица

$$F = \begin{pmatrix} -i\,\dfrac{4c^2+2c-3}{4c-2} & i\,\dfrac{2c^2-6c+3}{4c-2} \\ i\,\dfrac{2c-2}{2c-1} & -i\,\dfrac{8c^2-12c+5}{4c-2} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Ее собственные числа $\lambda_3 = -(i/2)\,(2c+1)$, $\lambda_4 = -(i/2)\,(4c-3)$. Кроме того, согласно (34) и (36) $\lambda_5 = i\,(c-1)$. Итак, доказана

Лемма 6.1. *Вектор собственных чисел неподвижных точек семейства* **A** *есть*

$$\Lambda = -i\,(1, 2, (2c+1)/2, (4c-3)/2, 1-c, 1/2). \tag{42}$$

При $c \neq 1/2$ все элементарные делители матрицы A из (38) простые, поэтому ее жорданова форма диагональна с диагональю (42). Преобразование, включающее параллельный перенос начала координат в неподвижную точку и линейную замену, имеет вид

$$\begin{aligned} &x_1 = x_1^0 + y_1, \quad x_2 = x_2^0 + iy_1 + y_2, \\ &x_3 = x_3^0 + b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + (2c^2 - 6c + 3)\mu y_3 - y_4/2, \\ &x_4 = x_4^0 + b_{41}y_1 + b_{42}y_2 + 2(c-1)\mu y_3 + y_4, \\ &x_5 = y_5, \quad x_6 = y_6, \end{aligned} \tag{43}$$

где μ — произвольное число, отличное от нуля, а $x_1^0, \ldots, x_4^0$ — значения из (36). Система (34) принимает вид

$$y_j' = \lambda_j y_j + \tilde{\tilde{\varphi}}_j(Y), \quad j = 1, \ldots, 6. \tag{44}$$

Интегралы (35) принимают вид

$$\begin{aligned} &I_1 = y_6^{-2}\,[\alpha y_1 + h_1(\tilde{Y})\,y_5^2], \\ &I_2 = y_6^{-3}y_5\,[\beta y_3 + h_2(\tilde{Y})], \\ &I_3 = y_6^{-4}\,[\gamma y_2 + h_3(\tilde{Y})\,y_5^2], \\ &I_4 = y_6^{-1}y_5\,[y_4 + h_4(\tilde{Y})], \end{aligned} \tag{45}$$

где α, β, γ — некоторые рациональные функции от c, $\tilde{Y} \overset{\text{def}}{=} (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $h_i(\tilde{Y})$ — многочлены от $\tilde{Y}$, причем $h_2(\tilde{Y})$ и $h_4(\tilde{Y})$ — без свободных и линейных членов.

Здесь нормализующее преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} &y_j = z_j + \xi_j(\tilde{\tilde{Z}}), \quad j = 1, 2, 3, 4, \\ &y_k = z_k(1 + \xi_k(\tilde{\tilde{Z}})), \quad k = 5, 6, \end{aligned} \tag{46}$$

где $\tilde{\tilde{Z}} \overset{\text{def}}{=} (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5^2)$ и ξ_j, ξ_k — степенные ряды по $\tilde{\tilde{Z}}$ без свободных членов, а ξ_j — и без линейных. Оно переводит систему (44) в нормальную форму

$$\begin{aligned} &z_j' = \lambda_j z_j + \psi_j(\tilde{\tilde{Z}}), \quad j = 1, 2, 3, 4, \\ &z_k' = z_k(\lambda_k + \psi_k(\tilde{\tilde{Z}})), \quad k = 5, 6, \end{aligned} \tag{47}$$

а интегралы (45) принимают вид

$$\begin{aligned} &I_1 = z_6^{-2}\,[\alpha z_1 + g_1(\tilde{\tilde{Z}})], \\ &I_2 = z_6^{-3}z_5\,[\beta z_3 + g_2(\tilde{\tilde{Z}})], \\ &I_3 = z_6^{-4}\,[\gamma z_2 + g_3(\tilde{\tilde{Z}})], \\ &I_4 = z_6^{-1}z_5\,[z_4 + g_4(\tilde{\tilde{Z}})], \end{aligned} \tag{48}$$

где g_j — степенные ряды без свободных и линейных членов и интегралы содержат лишь резонансные члены.

Теперь заметим, что вектор Λ из (42) при $c \in (3/4, 1)$ относится к случаю 1 из п. 3, при $c = 3/4$ — к случаю 2, а при $c \in (0, 3/4)$ — к случаю 3. Поэтому для $c \in (3/4, 1)$ нормализующее преобразование всегда сходится, а нормальная форма является полиномиальной. В § 6 препринта [12] показано, что у семейства $\mathcal{F}_{10}$ имеются *опасные значения*

$$c = \frac{4k+3}{4(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{49}$$

на ветви, соответствующей семейству **A**. При этих значениях c не выполнены условия совместности (разрешимости) и нельзя решения разложить в ряд по степеням независимой переменной (в этих разложениях возникают логарифмы). При всех других значениях $c \in (0, 1)$ условия совместности выполнены. Заметим, что все опасные значения (49) лежат в интервале $c \in (3/4, 1)$.

Теорема 6.1. *Если $c \in (3/4, 1)$ и отлично от опасных значений* (49), *то для семейства* **A** *нормальная форма линейна.*

Согласно (42) линейная нормальная форма (47) имеет первый интеграл

$$\tilde{I} = z_4 z_5^2 z_6^{-1}, \tag{50}$$

ибо $\lambda_4 + 2\lambda_5 - \lambda_6 = 0$. Он функционально независим с интегралами I_1, I_2, I_3 из (48) и является дополнительным. В исходных координатах $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ интеграл $\tilde{I}$ будет дополнительным аналитическим первым интегралом в окрестности соответствующей степенной асимптотики (37). Следовательно, в этой окрестности система (23), (24) локально интегрируема.

При опасных значениях (49) нормальная форма нелинейна, но линейны два ее последних уравнения, ибо в них ψ_j содержат лишь мономы $\tilde{\tilde{Z}}^{\tilde{Q}}$, где целочисленные $\tilde{Q} = (q_1, \ldots, q_5) \geq 0$, $q_1 + \ldots + q_5 > 0$ и $q_1\lambda_1 + \ldots + q_4\lambda_4 + 2q_5\lambda_5 = 0$. Но поскольку все $\lambda_j/i < 0$, то это уравнение не имеет неотрицательных решений. При значениях (49) $\lambda_5 = -i/(4k+4)$. Следовательно, нормальная форма (47) имеет первый интеграл

$$\tilde{\tilde{I}} = z_5^{2(k+1)}/z_6. \tag{51}$$

Он функционально независим с интегралами I_1, I_2, I_3 в (48) и является дополнительным. Следовательно, система (23), (24) локально интегрируема вблизи соответствующей степенной асимптотики (37) также в случаях (49).

Пусть теперь $c \in (0, 3/4)$, $c \neq 1/2$. Если c — иррациональное число, то согласно (42) уравнение $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$ для целочисленных Q эквивалентно системе двух уравнений

$$\begin{gathered} q_1 + 2q_2 + q_3/2 - 3q_4/2 + q_5 + q_6/2 = 0, \\ q_3 + 2q_4 - q_5 = 0. \end{gathered}$$

Из второго уравнения получаем равенство

$$q_5 = q_3 + 2q_4. \tag{52}$$

Подставляя его в первое уравнение, получаем уравнение

$$q_1 + 2q_2 + 3q_3/2 + q_4/2 + q_6/2 = 0.$$

В неотрицательных q_i это уравнение имеет только тривиальное решение

$$q_1 = \ldots = q_4 = q_6 = 0.$$

Согласно (52) тогда $q_5 = 0$. Следовательно, в нормальной форме (47) последние три уравнения линейны. Но тогда нормальная форма (47) имеет первый интеграл (50). Если иррациональное c таково, что выполнено условие ω из п. 3, то по теореме 3.1

нормализующее преобразование сходится и система (23), (24) вблизи соответствующей степенной асимптотики (37) имеет дополнительный аналитический первый интеграл, т.е. локально интегрируема. Итак, доказана

Теорема 6.2. *Вблизи степенной асимптотики* (37), *соответствующей семейству* **A**, *система* (23), (24) *локально интегрируема, если* $c \in (3/4, 1)$ *или если иррациональное* $c \in (0, 3/4)$ *таково, что выполнено условие* ω.

В.Ф. Еднерал в системе MATHEMATICA создал программу для вычисления нормальной формы [13]. С помощью этой программы он вычислил нормальные формы (11) вблизи семейства **A** для нескольких рациональных значений $c \in (0, 3/4)$ до членов больших порядков $\sum q_i \geq 6$. Всегда вычисленная нормальная форма получалась линейной. Следовательно, можно предположить, что вблизи семейства **A** система (23), (24) всегда локально интегрируема для $c \in (0, 3/4)$.

При $c = 3/4$ семейства **A** и **B** совпадают. Согласно (42)

$$\Lambda = -i\,(1, 2, 5/4, 0, 1/4, 1/2).$$

Нормальная форма была вычислена до 10 порядка. Она нелинейна и не удовлетворяет условию A. Это согласуется с [1], где показано, что при $c = 3/4$ уравнения Н. Ковалевского имеют нестепенную асимптотику решений с двупараметрическим логарифмом. По-видимому, при $c = 3/4$ вблизи неподвижной точки семейств $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ система локально неинтегрируема.

7. Семейство B. Оно интересно при $c \in (1/2, 2]$. На нем вектор собственных чисел

$$\Lambda = -i\,(1, 2, (3 - 4c)/2, 2 - c, (2c - 1)/2, 1/2). \tag{53}$$

Если $c \in (1/2, 3/4)$, то Λ относится к случаю 1 из п. 3, а для $c \in (3/4, 2]$ — к случаю 3. Здесь можно доказать такой аналог теоремы 6.2.

Теорема 7.1. *Вблизи степенной асимптотики* (37), *соответствующей семейству* **B**, *система* (23), (24) *локально интегрируема, если* $c \in (1/2, 3/4)$ *или если иррациональное* $c \in (3/4, 2)$ *таково, что* Λ *из* (53) *удовлетворяет условию* ω.

Были вычислены нормальные формы для нескольких рациональных значений $c \in (3/4, 2)$. Для $c \neq 1, 3/2, 7/4$ все они оказались линейными.

Для $c = 1$

$$\Lambda = -i\,(1, 2, -1/2, 1, 1/2, 1/2)$$

согласно (53), а вычисленная нормальная форма удовлетворяет условию A, где $a(Z)$ — ряд по положительным степеням $z_3^2 z_5^2$.

Итак, вблизи асимптотик (37), соответствующих семейству **B**, система (23), (24), по-видимому, локально интегрируема.

8. Семейство C. Оно интересно при $c \in (0, 2]$. На нем

$$\Lambda = -i\,(1, 2, -(2c + 1)/2, c - 2, 3/2, 1/2) \tag{54}$$

и всегда относится к случаю 3 из п. 3. Для семейства **C** нет опасных значений и аналога теорем 6.2 и 7.1.

Были вычислены нормальные формы для нескольких рациональных значений c. Для $c \neq 1/2, 2/3, 3/4, 1, 3/2, 7/4, 2$ и некоторых других все они оказались линейными.

По теореме 3.1 в этих случаях нормализующее преобразование сходится. Линейная нормальная форма имеет пять первых интегралов вида (21).

Таким образом, в окрестностях степенных асимптотик (37), соответствующих семейству **C**, система (23), (24) локально интегрируема. При $c = 1$

$$\Lambda = -i\,(1, 2, -3/2, -1, 3/2, 1/2)$$

согласно (54), а вычисленная нормальная форма удовлетворяет условию A, где $a(Z)$ – ряд от $z_1 z_4$ и $z_3^2 z_5^2$.

Заключение. Получается, что система Эйлера–Пуассона локально интегрируема вблизи некоторых ее стационарных решений и локально интегрируема вблизи некоторых степенных асимптотик ее решений. Все рассмотренные асимптотики комплексные. Однако, локальная интегрируемость и неинтегрируемость могут распространяться на большие области в комплексном фазовом пространстве, содержащие куски вещественного пространства. На рис. 2 и 3 показаны отображения Пуанкаре, вычисленные И.Н. Гашененко для вещественных решений уравнений Эйлера–Пуассона. Видно четкое разделение на зоны интегрируемости и неинтегрируемости.

Предварительная версия этой работы — препринт [14].

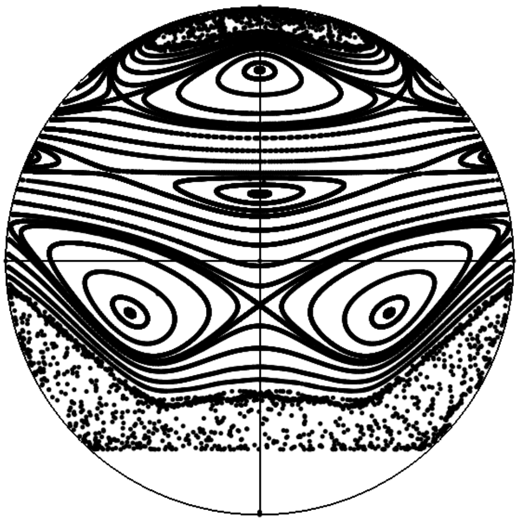

Рис. 2. A=B=1.3646, C=1, h=0.75, l=0.

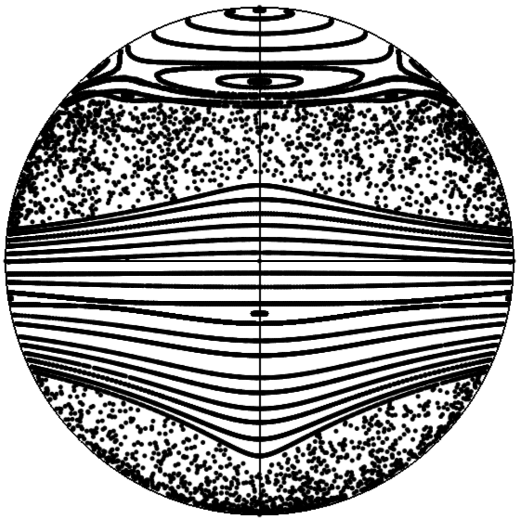

Рис. 3. A=B=1.1084, C=1, h=1.5, l=1.

Автор благодарит В.Ф. Еднерала за вычисление нормальных форм, а И.Н. Гашененко — за рис. 2, 3 и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00050) и Программы Президиума РАН "Математические методы в нелинейной динамике".

1. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
2. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. – М.: Физматлит, 1998. – 288 с.

3. *Bruno A.D., Edneral V.F.* Normal forms and integrability of ODE systems // Proc. of CASC 2005/ V.G. Ganzha, E.W. Mayr, and E.V. Vorozhtsov Eds., LNCS 3718. – Berlin;Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – P. 65–74.
4. *Брюно А.Д.* Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 3–15.
5. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Семейства степенных разложений модифицированных движений твердого тела // Докл. РАН. – 2002. – **387**, № 3. – С. 287–303.
6. *Лункевич В.А., Сибирский К.С.* Интегралы общей квадратичной дифференциальной системы в случаях центра // Диф. уравнения. – 1982. – **18**, № 5. – С. 786–792.
7. *Брюно А.Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1971. – **25**. – С. 119–262.
8. *Брюно А.Д., Садов С.Ю.* Формальный интеграл бездивергентной системы // Мат. заметки. – 1995. – **57**, № 6. – С. 803–813.
9. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. – М.: Гостехиздат, 1953. – 287 с.
10. *Брюно А.Д.* Теория нормальных форм уравнений Эйлера–Пуассона. – М., 2005. – 27 с. – (Препринт / РАН Ин-т прикл. математики, № 100).
11. *Брюно А.Д.* Степенные свойства движений твердого тела // Докл. РАН. – 2002. – **387**, № 6. – С. 727–732.
12. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Локальные разложения модифицированных движений твердого тела. – М., 2001. – 39 с. – (Препринт / РАН Ин-т прикл. математики, № 73).
13. *Edneral V.F., Khanin R.* Application of the resonant normal form to high order nonlinear ODEs using MATHEMATICA // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A. – 2003. – **502**, no. 2–3. – P. 643–645.
14. *Брюно А.Д.* Нормальные формы и интегрируемость уравнений Эйлера–Пуассона. – М., 2005. – 22 с. – (Препринт / РАН Ин-т прикл. математики, № 66).

Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва
bruno@keldysh.ru

Получено 29.11.05