УДК 62-50

©2004. **И.А. Болграбская, В.Ф. Щербак**

СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ГАШЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Рассматривается задача о гашении вынужденных колебаний звеньев манипулятора с помощью управляемого движения симметричных роторов, расположенных в шарнирах манипулятора. Показано, что для систем заданного класса непосредственная компенсация динамических реакций в шарнирах манипулятора, вызванных внешним воздействием, невозможна. Для стабилизации положения равновесия тел основной конструкции предлагается алгоритм синтеза управляемого движения роторов двигателей, заданный в форме статической обратной связи.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача управления гашением вынужденных колебаний для механических систем специального вида: система состоит из n твердых тел, соединенных одностепенными вращательными шарнирами, к которым, дополнительно к телам основной конструкции, прикреплены симметричные роторы. В работах [1,2] предложен способ гашения колебаний для системы связанных твердых тел, вызванных внешней возмущающей силой, в котором для компенсации внешних воздействий используется свойство динамической "избыточности". Согласно этому способу предлагается ввести в конструкцию дополнительные тела (гасители колебаний), которые могут совершать управляемое движение. При этом закон управления выбирается таким, чтобы движение основной системы тел было инвариантным относительно внешних возмущений. В частности, показано, что если каждое из тел системы снабжено управляемым гасителем, то для любого внешнего воздействия с ограниченной амплитудой, координаты точек крепления шарниров и законы их относительного движения могут быть найдены из условий равновесия для части переменных расширенной системы. Выполнение этих условий обеспечивает существование режимов движений для которых тела основной системы покоятся, а колебания совершают лишь дополнительные тела.

Модели систем, в которых структурно можно выделить n основных и n вспомогательных тел, характерны для многих механических конструкций. В частности, практическая реализация любого механизма, кинематическая модель которого задана в виде открытой цепи из n тел (манипуляторы, подъемные краны, спутники с разворачиваемыми на орбите антеннами, приборными штангами и пр.) предполагает использование двигателей, обеспечивающих перемещение соответствующих звеньев. Учет инерциальных характеристик двигателей, податливость при передаче усилий к элементам основного механизма приводит к тому, что в полной динамической модели рассматриваемой механической системы двигатели должны быть промоделированы как n отдельных тел.

В данной работе изучается задача управляемого гашения колебаний для модели манипулятора, представленной в виде открытой кинематической цепи из n твердых тел, соединенных одностепенными вращательными шарнирами. Манипулятор снабжен электродвигателями, обеспечивающими перемещение звеньев. Будем предполагать, что электродвигатели с достаточной степенью точности могут быть промоделированы в виде осесимметричных роторов, оси вращения которых совпадают с осями вращения соответствующих шарниров. Центры масс роторов расположены на совместных осях вращения тел системы и роторов двигателей. Податливость в механизмах передачи усилий представим в виде линейной упругой связи между роторами двигателей и звеньями манипулятора. С учетом этого положение всей системы определяется вектором обобщенных координат звеньев кинематической цепи $\mathbf{q}_1 = (q_{11}, q_{12}, ..., q_{1n})$ и вектором $\mathbf{q}_2 = (q_{21}, q_{22}, ..., q_{2n})$ положений роторов. Так как управляющий момент возникает в электродвигателях, то переменные $\mathbf{q}_1$ соответствуют пассивным звеньям манипулятора, а $\mathbf{q}_2$ – активным. В результате получаем, что полная динамическая модель описывается n телами основной конструкции и n вспомогательными управляемыми телами.

Предположим, что на схват манипулятора действует переменное внешнее воздействие $\mathbf{Q}(t)$. Требуется минимизировать влияние этого возмущения на движение звеньев манипулятора за счет движений вспомогательных тел. В отличие от моделей, рассмотренных в [1, 2], для систем заданного класса не выполняется предположение о возможности произвольного крепления центров масс дополнительных тел. Поэтому возникает вопрос о динамической компенсации реакций в шарнирах звеньев манипулятора, вызванных воздействием $\mathbf{Q}(t)$, с помощью управляемого движения роторов двигателей.

2. Уравнения движения. Так как вспомогательные тела в рассматриваемой модели являются осесимметричными телами вращения, то инерционные характеристики всей конструкции, а также моменты сил тяжести и внешних воздействий, действующие в шарнирах манипулятора, не зависят от обобщенных координат $\mathbf{q}_2$. С учетом этого уравнения движения, записанные в форме Лагранжа, имеют следующую структуру зависимостей коэффициентов от переменных системы:

$$\begin{aligned} &M_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + M_2(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_2 + C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 + \Gamma(\mathbf{q}_1) + K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = \mathbf{Q}(t), \\ &{M_2}^T(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + M_3\ddot{\mathbf{q}}_2 + C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 + \Gamma(\mathbf{q}_1)K(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) = \boldsymbol{\tau}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{Q}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), ..., Q_n(t))$ – вектор проекций внешнего воздействия на оси шарниров, $\boldsymbol{\tau}$ – вектор управляющих моментов, развиваемых двигателями манипулятора, $K = \mathrm{diag}(k_1, ..., k_n)$ – диагональная матрица жесткостей упругих соединений в шарнирах, матрица $M_1(\mathbf{q}_1)$ характеризует инерциальные параметры тел основной конструкции, а матрица $M_2(\mathbf{q}_1)$ – инерциальное взаимодействие между основными и вспомогательными телами системы, M_3 – диагональная матрица осевых моментов инерции присоединенных роторов, матрица C описывает корриолисовы силы и силы трения в шарнирах, а матрица Γ – вектор моментов сил тяжести. Предполагая, что двигатель i-го звена закреплен на теле с номером $i-1$, получаем, что матрица $M_2(\mathbf{q}_1)$ имеет вид

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12}(q_{11}) & \alpha_{13}(q_{11}, q_{12}) & \ldots & \alpha_{1n}(q_{11}, \ldots, q_{1n-1}) \\ 0 & 0 & \alpha_{23}(q_{12}) & \ldots & \alpha_{2n}(q_{12}, \ldots, q_{1n-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{n-1n}(q_{1n-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

В работах [1, 2] управление $\boldsymbol{\tau}$ выбирается из условий, обеспечивающих нулевую динамику системы (1), в предположении, что $\mathbf{q}_1(t)$ является выходом системы (1), а $\boldsymbol{\tau}$ – входом. Получены условия существования режима движения основной системы тел, инвариантного к внешним воздействиям. Для уравнений движения, записанных в форме уравнений Лагранжа второго рода, предложенная схема гашения колебаний может быть представлена в виде последовательности следующих этапов:

1) Фиксируется значение $\mathbf{q}_1(t) \equiv \mathbf{q}_1^0 = \mathrm{const}$ и записываются уравнения нулевой динамики

$$\begin{aligned} &M_2(\mathbf{q}_1^0)\ddot{\mathbf{q}}_2 + \Gamma(\mathbf{q}_1^0) + K(\mathbf{q}_1^0 - \mathbf{q}_2) = \mathbf{Q}(t), \\ &M_3\ddot{\mathbf{q}}_2 + \Gamma(\mathbf{q}_1^0) + K(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^0) = \boldsymbol{\tau}(t). \end{aligned} \tag{2}$$

2) Из первой группы уравнений (2) определяется зависимость $\ddot{\mathbf{q}}_2$ от $\mathbf{Q}(t)$

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 = -M_2^{-1}(\mathbf{q}_1^0)[\Gamma(\mathbf{q}_1^0) + K(\mathbf{q}_1^0 - \mathbf{q}_2) - \mathbf{Q}(t)]. \tag{3}$$

3) Подстановка найденного выражения во вторую группу уравнений (2), описывающих движение вспомогательных тел, определяет искомый закон управления в виде нелинейной алгебраической обратной связи

$$\boldsymbol{\tau}(t) = -M_3M_2^{-1}(\mathbf{q}_1^0)[\Gamma(\mathbf{q}_1^0) + K(\mathbf{q}_1^0 - \mathbf{q}_2) - \mathbf{Q}(t)] + \Gamma(\mathbf{q}_1^0) + K(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^0). \tag{4}$$

Показано, что для любого ограниченного возмущающего воздействия $\mathbf{Q}(t)$ коэффициенты сил трения в шарнирах манипулятора могут быть выбраны такими, что полученное многообразие решений $\mathbf{q}_1(t) \equiv \mathbf{q}_1^0$ является притягивающим для системы (1) с управлением (4).

В нашем случае матрица $M_2(\mathbf{q}_1)$ вырождена и закон управления (4) не может быть реализован. Рассмотрим возможность построения дифференциальной обратной связи, стабилизирующей решения системы (1) в окрестности интегрального многообразия $\mathbf{q}_1(t) \equiv \mathbf{q}_1^0 = \mathrm{const}$.

3. Сведение задачи успокоения колебаний к задаче отслеживания. Рассмотрим плоский манипулятор с двумя звеньями, которые приводятся в движение с помощью двух двигателей, закрепленных соответственно в основании манипулятора и в шарнире, соединяющем первое и второе звено. Двигатели моделируются как симметричные тела вращения, связанные с управляемыми звеньями посредством линейных пружин. Уравнения движения всей конструкции имеют вид (1), где величины $\mathbf{q}_1 = (q_{11}, q_{12})$, $\mathbf{q}_2 = (q_{21}, q_{22})$ определяют положение звеньев и роторов двигателей соответственно, матрица инерции

$$M(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} M_1(\mathbf{q}_1) & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{pmatrix}$$

является симметричной и положительно определенной. Матрица M_2, характеризующая инерциальную взаимосвязь между звеньями и двигателями, имеет вид

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Проведем частичную линеаризацию уравнений (1), вводя новое управление $\mathbf{u}$ с помощью обратной связи

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = &- M_2^T M_1^{-1}(\mathbf{q}_1)[C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 + K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \Gamma(\mathbf{q}_1) - \mathbf{Q}(t)] + \\ &+ C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 + K(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) + \Gamma(\mathbf{q}_1) + [M_3 - M_2^T M_1^{-1}(\mathbf{q}_1)M_2]\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда система (1) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_1 &= -M_1^{-1}(\mathbf{q}_1)[C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 + \Gamma(\mathbf{q}_1) + K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - \mathbf{Q}(t)] - M_1^{-1}M_2\mathbf{u}, \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 &= \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{6}$$

Перепишем систему (6)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_1 &= J(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + M_1^{-1}(K\mathbf{q}_2 - M_2\mathbf{u}), \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 &= \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $J(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) = (J_1, J_2)^T = -M_1^{-1}(\mathbf{q}_1)(C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 + \Gamma(\mathbf{q}_1) + K\mathbf{q}_1 - \mathbf{Q}(t))$. Обозначим элементы матрицы $M_1^{-1}(\mathbf{q}_1)$ через $\alpha_i(\mathbf{q}_1)$

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1(\mathbf{q}_1) & \alpha_2(\mathbf{q}_1) \\ \alpha_2(\mathbf{q}_1) & \alpha_3(\mathbf{q}_1). \end{pmatrix}$$

Пусть в отсутствие внешних возмущений система находится в положении равновесия $\mathbf{q}_1^0 = (q_{11}^0, q_{12}^0), \mathbf{q}_2^0 = (q_{21}^0, q_{22}^0)$. Рассмотрим задачу синтеза управлений u_1, u_2 таких, чтобы при появлении возмущений $\mathbf{Q}(t)$ ($\mathbf{Q}(0) = \mathbf{0}$) равновесие относительно части переменных $\mathbf{q}_1^0 = (q_{11}^0, q_{12}^0)$ сохранялось. На первом шаге выберем управление u_2 таким образом, чтобы

$$\ddot{q}_{11} = q_{12} - q_{12}^0. \tag{8}$$

Для этого из равенства $J_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + (\alpha_1(\mathbf{q}_1), \alpha_2(\mathbf{q}_1))(K\mathbf{q}_2 - M_2\mathbf{u}) = q_{12} - q_{12}^0$ определяем

$$u_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{\alpha_1(\mathbf{q}_1)m_{12}}[J_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + (\alpha_1(\mathbf{q}_1), \alpha_2(\mathbf{q}_1))K\mathbf{q}_2 - q_{12} + q_{12}^0]. \tag{9}$$

В результате система (7) преобразуется к треугольному виду

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{11} &= q_{12} - q_{12}^0, \\ \ddot{q}_{12} &= f_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + h_1(\mathbf{q}_1)q_{22}, \\ \ddot{q}_{22} &= f_2(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1, q_{22}) + h_2 q_{21}, \\ \ddot{q}_{21} &= u_1, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= J_2(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + \frac{\alpha_2(\mathbf{q}_1)}{\alpha_1(\mathbf{q}_1)}[q_{12} - q_{12}^0 - J_1(\mathbf{q}_1, \quad h_1 = [\alpha_3(\mathbf{q}_1) - \frac{\alpha_2^2(\mathbf{q}_1)}{\alpha_1(\mathbf{q}_1)}]k_2, \dot{\mathbf{q}}_1)], \\ f_2 &= \frac{1}{\alpha_1(\mathbf{q}_1)m_{12}}[J_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) - q_{12} + q_{12}^0 + \alpha_2(\mathbf{q}_1)k_2 q_{22}], \qquad h_2 = \frac{k_1}{m_{12}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Полагая в (10) $\mathbf{q}_1(t) \equiv \mathbf{q}_1^0$ запишем соотношения, характеризующие нулевую динамику системы. Для удобства записи введем вектор $\mathbf{x} \in R^4$, компоненты которого соответственно равны $x_1 = q_{22}$, $x_2 = \dot{q}_{22}$, $x_3 = q_{21}$, $x_4 = \dot{q}_{21}$. Из (10) получаем, что эти переменные должны удовлетворять линейной системе дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = \psi(t) + bx_1 + h_2 x_3, \qquad dotx_3 = x_4, \qquad \dot{x}_4 = v \tag{12}$$

и тождеству $x_1 \equiv \varphi(t)$. В формуле (12) $b = ak_2\alpha_2(\mathbf{q}_1^0)$, $\varphi(t) = f_1(t, \mathbf{q}_1^0, 0)h_1^{-1}(\mathbf{q}_1^0)$, $\psi(t) = a[J_1(t, \mathbf{q}_1^0, 0) - q_{12}^0]$, $a = [m_1 2\alpha_1(\mathbf{q}_1^0)]^{-1}$, $v = u_1$.

Далее задачу синтеза управлений, обеспечивающих нулевую динамику для основной системы тел при действии $\mathbf{Q}(t)$, будем рассматривать как задачу нахождения управления v, при котором значения выхода системы (12) – переменной $x_1(t)$ – сходятся к значениям заданной функции времени $\lim x_1(t) = \varphi(t)$.

Проведем ряд упрощающих преобразований. В силу линейности системы (12) ее решение можно представить в виде суммы двух решений системы $\mathbf{x}^v$ и $\mathbf{x}^\psi$, соответствующих случаям, когда 1) $\psi \equiv 0$ и 2)$v \equiv 0 : \mathbf{x} = \mathbf{x}^v + \mathbf{x}^\psi$. Поскольку решение $\mathbf{x}^\psi$ не зависит от управления, то далее будем рассматривать только первый случай, заменив функцию времени, которую должен отслеживать выход системы, на функцию $\varphi(t) - x_1^\psi(t)$. Кроме того, сделаем невырожденную замену переменных в системе (12), приводящую ее к каноническому треугольному виду. Сохраняя для преобразованной системы и программы движения выхода прежние обозначения, получаем следующую задачу отслеживания:

Найти управление v такое, что

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = v, \tag{13}$$

и $\lim x_1(t) = \varphi(t)$.

Предположим, что дополнительно к данным о значениях сил $Q_i(t)$, получаемых с помощью силовых датчиков в шарнирах манипулятора, известны или могут быть оценены с достаточной степенью точности значения их производных $Q_i^{(j)}(t), i = 1, 2; j = \overline{1, 4}$. Тогда по этим данным после проведения описанных выше преобразований могут быть найдены значения функций $\psi(t), \varphi^{(i)}(t), i = \overline{0, 4}$. В соответствии со стандартной техникой теории автоматического регулирования, управление, гарантирующее экспоненциальное стремление выхода системы (13) к функции $\varphi(t)$, имеет вид

$$v = \varphi^{(4)} + \sum f_i e_i, \tag{14}$$

где $e_i = x_i - \varphi^{(i-1)}, i = \overline{1, 4}$ и коэффициенты f_i таковы, что все корни полинома $\lambda^4 + f_1\lambda^3 + f_2\lambda^2 + f_3\lambda + f_4$ имеют отрицательные вещественные части.

Таким образом, основной проблемой реализации предложенного алгоритма гашения колебаний для рассматриваемого класса систем является проблема численного дифференцирования функции $\mathbf{Q}(t)$, значения которой известны по результатам измерений. Известно, что численная оценка производных по времени от измеряемого сигнала сопряжена с большими вычислительными погрешностями. Одним из возможных способов решения этой задачи является представление возмущения в виде конечной суммы гармоник, частоты и амплитуды которых должны быть определены по имеющейся информации. Вопросам построения адаптивных методов гашения колебаний будут посвящены следующие публикации.

1. *Ковалев А. М., Болграбская И.А., Чебанов Д.А., Щербак В. Ф.* Гашение вынужденных колебаний в системе связанных твердых тел // Прикл. механика. - 2003. – № 3. – С. 47-59.
2. *Bolgrabskaya I.A., Shcherbak V.F* Damping of manipulator forced oscillations as control problem for underactuated multibody systems // Synergies between information processing and automotion: Proc. of 49 intern. kolloq. (27.-30.09.2004). – Ilmenau: Shaker Verlag Aachen, 2004. – V.1. – P. 424-429.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
shvf@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 12.09.04