

УДК 531.38

©2004. И.А. Болграбская

ГАШЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МАНИПУЛЯТОРА С УПРУГИМИ ЗВЕНЬЯМИ

Изучается плоское движение двухзвенного манипулятора, состоящего из упругого звена и схвата, находящегося под действием переменной внешней силы. Упругое звено манипулятора связано с неподвижным основанием с помощью цилиндрического шарнира. К упругому звену с помощью телескопического шарнира присоединен схват. Предложена конечномерная модель этой механической системы, представляющая из себя систему $(n+1)$ твердых тел, первые n из которых связаны упругими цилиндрическими шарнирами, а $n+1$ -е соединено с n -тым телом с помощью телескопического шарнира. К манипулятору присоединено два дополнительных тела (гасители колебаний). Определены условия позволяющие с помощью управляемого движения дополнительных тел добиться существования у манипулятора режима, в котором его звенья неподвижны. Установлено, что такой режим возможен только в случае, когда к упругому звену с помощью цилиндрического шарнира присоединено еще одно промежуточное твердое тело, к которому с помощью телескопа присоединен схват.

Введение. При работе манипулятора с различными инструментами зачастую возникают вынужденные колебания его звеньев, которые мешают точности выполнения заданных технологических операций, а иногда и делают невозможным их исполнение. При этом оказывается необходимым тем или иным способом нейтрализовать эти колебания. Один из возможных приемов нейтрализации переменного внешнего воздействия предложен в [1]. Он состоит во введении в систему дополнительных тел (гасителей колебаний), управляемое движение которых обеспечивает существование режима, в котором звенья манипулятора неподвижны, а колебания совершают только гасители. Гасители могут представлять собой как точечные массы, так и твердые тела, упруго прикрепленные к звеньям манипулятора. Количество гасителей может как совпадать, так и не совпадать с количеством звеньев манипулятора [1-3]. В [1-3] полагалось, что звенья манипулятора представляют собой твердые тела, соединенные между собой одностепенными шарнирами, допускающими либо вращательное движение (цилиндрический шарнир), либо линейное перемещение (телескоп).

Однако в случае, когда длина звеньев значительно превосходит их остальные размеры, возникает необходимость учета упругих свойств этих звеньев. Для подобных систем существуют два подхода построения механических моделей. Первый состоит во введении гибридной модели, состоящей из совокупности упругих стержней и твердых тел. Уравнения движения в этом случае содержат как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и уравнения в частных производных с соответствующими граничными условиями. При втором подходе манипулятор моделируется системой n твердых тел, связанных упругими шарнирами. При отсутствии упругости жесткость в шарнире полагается равной нулю. В этом случае уравнения движения представимы системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Как показано в [4-6], при определенном выборе жесткости в упругих сочленениях уравнения движения конечномерной модели и их решения сходятся к соответствующим уравнениям и решениям гибридной системы. Сравнительная же простота конечномерной модели при решении ряда прикладных задач позволяет получить обозримые аналитические результаты [7-9].

В настоящей работе рассмотрена конечномерная модель движения плоского манипулятора. Первое, упругое звено манипулятора, моделировалось системой n твердых тел, связанных упругими цилиндрическими шарнирами. Рассмотрено два варианта крепления схвата к упругому звену манипулятора. В первом случае он непосредственно с помощью телекопа соединяется с этим звеном. Во втором случае, к первому звену с помощью цилиндрического шарнира присоединено дополнительное твердое тело, к которому уже крепится схват. На схват действует переменная внешняя нагрузка. Изучена возможность гашения вынужденных колебаний манипулятора за счет введения в систему двух гасителей колебаний.

1. Постановка задачи. Кинематические соотношения. Пусть манипулятор состоит из двух звеньев. Первое его звено – однородный упругий стержень, а второе – твердое тело (схват). Первое звено прикреплено к неподвижному основанию с помощью цилиндрического шарнира, а второе соединено с первым с помощью телескопического шарнира.

Свяжем с неподвижным основанием систему координат $OXYZ$, (орты $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$), полагая, что ось OZ направлена противоположно вектору силы тяжести \mathbf{g} (см. рис. 1).

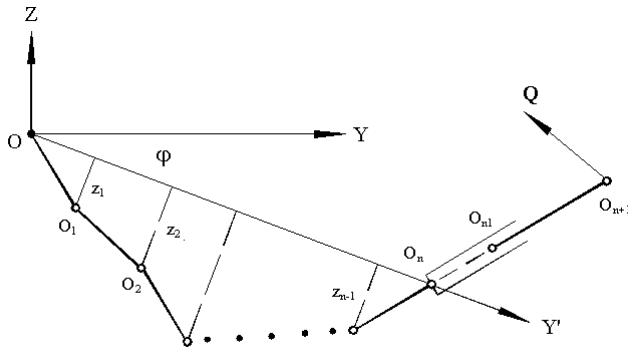


Рис. 1. Схема двумерного манипулятора.

Считаем, что ось цилиндрического шарнира направлена вдоль оси OX и движение манипулятора происходит в плоскости YOZ .

В качестве модели упругого стержня будем рассматривать систему n одинаковых твердых тел S_k , которые связаны цилиндрическими упругими шарнирами (их оси коллинеарны оси OX) с жесткостью равной $\chi^2 = EJ/h$ [7],

где E – модуль Юнга материала, J – момент инерции поперечного сечения стержня, $h = O_k O_{k+1}$ – длина оси симметрии тела S_k . С каждым телом свяжем систему координат $Y_k O_{k-1} Z_k$ (орты $\mathbf{e}_y^k, \mathbf{e}_z^k$), ось $O_{k-1} Y_k$ которой направлена вдоль его оси симметрии.

Кроме того, введем осевую систему координат $Y' O Z'$ (орты $\mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$), ось $O Y'$ коллинеарна $O O_n$, совпадающей с осью симметрии недеформированного стержня.

Центр масс C_k тела S_k полагаем расположенным на оси $O_{k-1} O_k$ и считаем $O_k C_k = h/2$.

Пусть φ – угол между осями $O Y$ и $O Y'$, а φ_k – угол между осями $O Y'$ и $O_{k-1} Y_k$. Вектор $O O_k$ представим в виде

$$O O_k = y_k \mathbf{e}'_y + z_k \mathbf{e}'_z. \quad (1)$$

Тогда в системе $Y' O Z'$ координаты k -го шарнира O_k ($k = \overline{0, n}$) равны

$$y_0 = z_0 = z_n = 0. \quad (2)$$

$$y_k = y_{k-1} + h \cos \varphi_k; \quad z_k = z_{k-1} + h \sin \varphi_k. \quad (3)$$

Поскольку нас интересуют лишь малые деформации моделируемого объекта, то полагаем, что углы φ_k малы, и с точностью до членов первого порядка малости из (2), (3) имеем

$$\varphi_1 = z_1/h, \quad \varphi_k = (z_k - z_{k-1})/h, \quad \varphi_n = -z_{n-1}/h. \quad (4)$$

Тогда из (3), (4) с точностью до членов второго порядка малости следует, что

$$y_k = kh - \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^k (z_i - z_{i-1})^2. \quad (5)$$

Абсолютная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_k$ тела S_k равна $(\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_k)\mathbf{e}_x$, и с учетом (4) имеем

$$\boldsymbol{\omega}_k = [\dot{\varphi} + (\dot{z}_k - \dot{z}_{k-1})/h]\mathbf{e}_x. \quad (6)$$

Обозначим \mathbf{v}_k скорость полюса O_k ($k = \overline{1, n}$). Тогда из (1), (5), (6) следует

$$\mathbf{v}_k = - \left[\frac{1}{h} \sum_{i=1}^k (\dot{z}_i - \dot{z}_{i-1})(z_i - z_{i-1}) + \dot{\varphi} z_k \right] \mathbf{e}'_y + \left[\dot{z}_k + kh\dot{\varphi} - \frac{\dot{\varphi}}{2h} \sum_{i=1}^k (z_i - z_{i-1})^2 \right] \mathbf{e}'_z. \quad (7)$$

В точке O_n к телу S_n с помощью телескопического шарнира прикреплено тело S_{n+1} (см. рис. 1). Считаем, что ось телескопа направлена вдоль оси симметрии тела S_n , а перемещение в нем обозначим через s . Тогда скорость точки O_n определяется согласно (7), а скорость точки O_{n1} равна

$$\mathbf{v}_{n1} = \mathbf{v}_n + \dot{s}\mathbf{e}_y^n + s\dot{\varphi}\mathbf{e}_z^n. \quad (8)$$

В точке O_{n+1} , находящейся на оси симметрии схвата, к системе приложена переменная сила $\mathbf{Q} = Q\mathbf{e}_Q$. Как и в [1,2], полагаем, что она носит периодический характер и может быть представлена в виде $\mathbf{Q} = (Q_0 + \sin pt)\mathbf{e}_Q$.

Для гашения колебаний к системе присоединено два дополнительных тела S_{ia} ($i = 1, 2$) – гасители колебаний. S_{1a} – твердое тело прикрепленное к телу S_n в точке O_n с помощью цилиндрического шарнира (полагалось, что $C_{1a} = O_n$, где C_{1a} – центр масс тела S_{1a}). Его абсолютная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_a$ равна $(\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_a)\mathbf{e}_x$. S_{2a} – точечная масса с упругим элементом, помещенная в точке O_a тела S_{n+1} . Полагаем, что эта точка совершает перемещение s_a вдоль оси коллиниарной оси симметрии тела S_{n+1} и находящейся от нее на фиксированном расстоянии d_a . Таким образом,

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{O}\mathbf{O}_a = \mathbf{O}\mathbf{C}_{n+1} + s_a\mathbf{e}_y^n + d_a\mathbf{e}_z^n. \quad (9)$$

Итак, рассматриваемый двухзвенный манипулятор моделируется с помощью системы $n + 1$ твердого тела, первые n из которых моделируют упругое звено, а последнее – схват. К системе присоединено два гасителя колебаний, совершающих заданное движение.

Уравнения движения манипулятора запишем в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n+1}. \quad (10)$$

В качестве обобщенных координат были выбраны переменные z_k ($k = \overline{1, n-1}$), φ , s .

2. Уравнения движения. Кинетическая энергия системы может быть представлена так

$$T = \sum_{k=1}^n T_k + T_{n+1} + T_{1a} + T_{2a}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{2} \{ A\omega_k^2 + m[v_{k-1}^2 + h\mathbf{v}_{k-1} \cdot (\boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{e}_y^k)] \}; \\ T_{n+1} &= \frac{1}{2} \{ A\omega_n^2 + m_1[v_{n1}^2 + 2c_1\mathbf{v}_{n1} \cdot (\boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{e}_y^n)] \}; \\ T_{1a} &= \frac{1}{2} (A_{1a}\omega_a^2 + m_{1a}v_n^2); \quad T_{2a} = \frac{1}{2} m_{2a}\dot{r}_a^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь A, A_1, A_{1a} – соответственно моменты инерции тел S_k, S_{n+1}, S_{1a} ; m, m_1, m_{1a}, m_{2a} – массы тел $S_k, S_{n+1}, S_{1a}, S_{2a}$; $c_1 = O_{n1}C_{n+1}$.

Потенциальную энергию системы представим в виде

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_g, \quad (13)$$

где Π_e – потенциальная энергия упругих сил, а Π_g – потенциальная энергия силы тяжести.

Как и в [7], с учетом (2), (4) полагаем, что потенциальная энергия упругих сил равна

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \kappa^2 \sum_{k=1}^n (z_{k+1} - 2z_k + z_{k-1})^2. \quad (14)$$

Потенциальная энергия силы тяжести может быть представлена так

$$\Pi_g = g\mathbf{e}_z \cdot \{ m \sum_{k=1}^n \mathbf{O}C_k + m_1 \mathbf{O}C_{n+1} + m_{1a} \mathbf{O}O_n + m_{2a} \mathbf{r}_a \}. \quad (15)$$

Поскольку целью настоящей работы является изучение возможности гашения с помощью дополнительных тел вынужденных колебаний манипулятора и стабилизации фиксированного положения равновесия, в котором $\varphi = \varphi_0, s = s_0$, то полагаем далее

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha, \quad s = s_0 + \beta \quad (16)$$

и считаем α и β малыми величинами. Тогда выражения для обобщенных сил, соответствующих координатам z_k ($k = \overline{1, n-1}$), α, β с точностью до членов первого порядка малости таковы

$$\begin{aligned} Q_{z_k} &= F_1(z_{k+1} - 2z_k + z_{k-1})/h \quad (k = \overline{1, n-2}); \\ Q_{z_{n-1}} &= \{ F_1[z_{n-2} - 2z_{n-1} + (s_0 + h_1)(\alpha - z_{n-1}/h)] + F_2(s_0 + h_1 + \beta) \}/h; \\ Q_\alpha &= F_1[(s_0 + h_1)z_{n-1}/h - L\alpha] - F_2(L + \beta) + U_1; \quad Q_\beta = F_1 + F_2(z_{n-1}/h - \alpha) + U_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1 &= Q_y \cos \varphi_0 + Q_z \sin \varphi_0 = F_{10} + F_{11} \sin pt; \\ F_2 &= Q_y \sin \varphi_0 - Q_z \cos \varphi_0 = F_{20} + F_{21} \sin pt; \quad L = l + h_1 + s_0, \end{aligned}$$

где Q_y, Q_z – компоненты внешней силы в неподвижной системе координат; $l = nh$ – длина упругого звена; $h_1 = O_{n1}O_{n+1}$; U_1, U_2 – соответственно управляющий момент и управляющая сила, действующие в точках O и O_n крепления звеньев манипулятора.

Подставим (11), (13), (17) с учетом (6) – (9), (12), (14) – (16) в (17). Уравнения движения системы могут быть представлены так

$$(mh\hat{I} - A'\hat{A})\ddot{Z} + mh[kh\ddot{\alpha} + g(\cos\varphi_0 - \alpha\sin\varphi_0)\hat{I} + [(m_{2a}\ddot{s}_a - F_1 + gM_k\sin\varphi_0)\hat{A} + h\chi^2\hat{A}^2 + gm\sin\varphi_0\hat{A}_1]Z + \delta_{k,n-1}[a_{11}\ddot{z}_{n-1} + a_{12}\ddot{\alpha} + a_{13}\ddot{\beta} + m_{2a}d_a\ddot{s}_a + g(g_{10} + g_{11}z_{n-1} + g_{12}\alpha + g_{13}\beta - m_{2a}\cos\varphi_0s_a - F_1(s_0 + h_1)(\alpha - \frac{z_{n-1}}{h}) - F_2(s_0 + h_1 + \beta))] = 0; \quad (18)$$

$$a_{21}\ddot{\alpha} + mh\sum_{k=1}^{n-1}k\ddot{z}_k + a_{22}\ddot{z}_{n-1} + A_{1a}\ddot{\varphi}_a + m_{2a}(d_a + l\frac{z_{n-1}}{h})\ddot{s}_a - 2m_{2a}l\dot{s}_a\frac{\dot{z}_{n-1}}{h} - 2m_{2a}d_a\ddot{\beta} + g\{\cos\varphi_0[g_{20} + (m_1 + m_{2a})\beta + m_{2a}(s_a + d_a\frac{z_{n-1}}{h})] - \sin\varphi_0[m\sum_{k=1}^{n-1}z_k - m_1(s_0 + c_1)\frac{z_{n-1}}{h} + m_{2a}(-s_a\frac{z_{n-1}}{h} + d_a)]\} = U_1 + F_1[(s_0 + h)\frac{z_{n-1}}{h} + L\alpha] - F_2(L + \beta); \quad (19)$$

$$m_1\ddot{\beta} + m_{2a}\ddot{s}_a - m_{2a}d_a(\ddot{\alpha} - \frac{\ddot{z}_{n-1}}{h}) + g(g_{30} + g_{31}\alpha + g_{32}z_{n-1}) = U_2 + F_1 + F_2(\frac{z_{n-1}}{h} - \alpha).$$

Здесь $Z = (z_1, \dots, z_{n-1})^T$, \hat{A} – симметричная трехдиагональная матрица, в которой $a_{ii} = -2$, $a_{i\ i+1} = 1$; \hat{A}_1 – матрица, в которой $a_{ii} = -1$, $a_{i\ i+1} = 1$, а остальные элементы равны нулю; $A' = A/h - mh/2$; $M_k = m_1 + m_{1a} + m_{2a} - m(n - k + 1/2)$; $\delta_{k,n-1}$ – символ Кронекера; коэффициенты a_{ij}, g_{ij} – функции геометрических и массовых параметров системы.

Считаем, что управляемое движение дополнительных тел подчинено закону

$$\varphi_a = \Phi_a \sin pt, \quad s_a = S_a \sin pt. \quad (20)$$

Итак, (18), (19) – уравнения движения манипулятора, находящегося под действием периодической нагрузки. Посмотрим при каких условиях возможно существование режима, в котором гасители движутся согласно (20), а звенья манипулятора неподвижны.

3. Режим равновесия звеньев манипулятора. В положении равновесия считаем $\varphi = \varphi_0, s = s_0$. Тогда условие равновесия звеньев таковы

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad Z = Z_0 = (z_1^0, \dots, z_{n-1}^0)^T. \quad (21)$$

Подставим (20), (21) в (18), (19). Получим

$$mhg\cos\varphi_0\hat{I} + [(-m_{2a}p^2S_a\sin pt - F_1 + gM_k\sin\varphi_0)\hat{A} + h\chi^2\hat{A}^2 + mg\sin\varphi_0\hat{A}_1]Z_0 + \delta_{k,n-1}[-m_{2a}p^2d_aS_a\sin pt + g(g_{10} + g_{11}z_{n-1}^0 - m_{2a}\cos\varphi_0S_a\sin pt) + F_1(s_0 + h_1)z_{n-1}^0/h - (s_0 + h_1)F_2 = 0; \quad (22)$$

$$-p^2\sin pt[A_{1a}\Phi_a + m_{2a}S_a(d_a + l\frac{z_{n-1}^0}{h})] + g\{\cos\varphi_0[g_{20} + m_{2a}(S_a\sin pt + d_a\frac{z_{n-1}^0}{h})] -$$

$$\begin{aligned}
 & -\sin \varphi_0 \left\{ m \sum_{k=1}^{n-1} z_k^0 - m_1(s_0 + c_1) \frac{z_{n-1}^0}{h} + m_{2a}(d_a - S_a \sin pt) \frac{z_{n-1}^0}{h} \right\} = \\
 & = U_1 + (s_0 + h_0) \frac{z_{n-1}^0}{h} F_1 - LF_2; \\
 & -m_{2a}p^2 S_a \sin pt + g(g_{30} + g_{32} z_{n-1}^0) = U_2 + F_1 + F_2 \frac{z_{n-1}^0}{h}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $F_i = F_{i0} + F_{i1} \sin pt$ ($i = 1, 2$), из равенства нулю слагаемых в уравнениях (22), не зависящих от времени, получим систему уравнений

$$F^j(\varphi_0, s_0, Z_0, g, \alpha^2, U_1, U_2, F_{10}, F_{20}, P_j) = 0, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (23)$$

где P_j – функция геометрических и массовых параметров системы.

Решение уравнений (23) позволяют определить форму статического прогиба упругого звена и величины управляющего момента и силы, действующих в шарнирах манипулятора.

Из равенства нулю коэффициентов системы (22) при $\sin pt$ имеем

$$\begin{aligned}
 & -m_{2a}p^2 S_a = F_{11}; \quad -m_{2a}p^2 S_a = F_{11} + F_{21} z_{n-1}^0/h; \\
 & m_{2a} S_a (d_a p^2 + g \cos \varphi_0) = -F_{11}(s_0 + h_1) z_{n-1}^0 - (s_0 + h_1) F_{21}; \\
 & -p^2 A_{1a} \Phi_a - m_{2a}p^2 S_a (d_a + l z_{n-1}^0/h) = F_{11}(s_0 + h_1) z_{n-1}^0/h.
 \end{aligned} \quad (24)$$

Очевидно, что уравнения (24) могут быть удовлетворены, если

$$z_{n-1}^0 = 0. \quad (25)$$

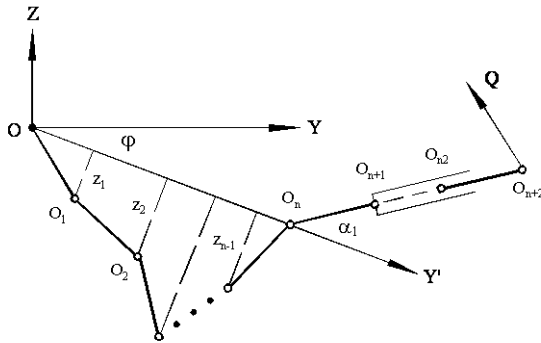


Рис. 2. Схема трехмерного манипулятора.

схвата к манипулятору, предусматривающий наличие промежуточного твердого звена.

4. Трехзвенный манипулятор. Рассмотрим манипулятор, у которого первое звено по-прежнему считается упругим. Второе звено – твердое тело, прикрепленное к нему с помощью цилиндрического шарнира, и третье звено – хват связан со вторым звеном с помощью телескопического шарнира (см. рис. 2).

Считаем второе и третье тела одинаковыми и для массовых и геометрических параметров оставляем обозначения, введенные в предыдущем пункте для тела S_{n+1} .

Однако одновременное выполнение (23) и (25) возможно при условии отсутствия тяжести ($g = 0$), а этот случай здесь не рассматривается.

Итак, если хват прикреплен непосредственно к упругому звену, то невозможно за счет движения гасителей колебаний добиться режима равновесия звеньев манипулятора. В этой связи рассмотрим второй вариант крепления

Обозначим угол между \mathbf{e}'_y и \mathbf{e}_y^{n+1} через α_1 и будем считать его малой величиной (при этом угол отклонения оси симметрии тела S_{n+1} от горизонтали равен $\varphi + \alpha_1$).

Абсолютная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_{n+1}$ тел S_{n+1} и S_{n+2} равна $(\dot{\alpha} + \dot{\alpha}_1)\mathbf{e}_x$. Ось телескопа считаем направленной вдоль оси симметрии тела S_{n+1} . Тогда имеем $\mathbf{e}_y^{n+1} = \mathbf{e}'_y + \cos \alpha_1 \mathbf{e}'_z$, откуда, очевидно, следует, что направление оси телескопа не зависит от прогиба упругого звена.

Для рассматриваемой системы тел первые $n - 1$ уравнения совпадают с системой (18), в которой выражение при $\delta_{k,n-1}$ равно нулю. Оставшиеся три уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{\alpha}_1 + a_{12}\ddot{\alpha} - m_{2a}d_a\ddot{\beta} + mh \sum_{k=1}^{n-1} k\ddot{z}_k + A_{1a}\ddot{\varphi}_a - m_{2a}\ddot{s}_a(l\alpha_1 - d_a) + m_{2a}l\dot{s}_a\dot{\alpha}_1 + \\ + g\{\sin \varphi_0[+m \sum_{k=1}^{n-1} z_k + m_{2a}d_a + \alpha_1 a_{13}] + \cos \varphi_0[a_{14} + m_{2a}d_a\alpha_1 + m_{2a}s_a]\} = \\ = LF_2 - (L\alpha + L_1\alpha_1)F_1 + U_1; \\ a_{21}\ddot{\alpha} + a_{22}\ddot{\alpha}_1 - m_{2a}d_a(\ddot{\beta}_a + \ddot{s}_a) + g[a_{23} + a_{24}\alpha + a_{25}\alpha_1 + a_{26}\beta + m_{2a}s_a \cos \varphi_0] = \\ = L_1[F_2 - (\alpha + \alpha_1)F_1] + U_2; \\ (m_1 + m_{2a})\ddot{\beta} - m_{2a}d_a(\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}_1) + m_{2a}\ddot{s}_a + (m_1 + m_{2a})g \sin \varphi_0 + 2m_1g \cos \varphi_0 = \\ = F_1 + F_2(\alpha + \alpha_1) + U_3. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $L_1 = 2h_1 + s_0$; a_{1i}, a_{2j} ($i = \overline{1,4}, j = \overline{1,6}$) – коэффициенты, зависящие от геометрических и массовых параметров системы.

Как и в предыдущем пункте, считаем закон движения гасителей определенным в виде (20). Режим равновесия для системы $n + 2$ тел

$$\alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad Z = Z_0 = (z_1^0, \dots, z_{n-1}^0)^T. \quad (27)$$

Подставляя в систему (18), (26) решение (20), (27), получим систему уравнений (23), определяющую стационарное положение манипулятора, учитывающее жесткость упругого звена, а также равенства, при выполнении которых существует это стационарное положение. Они имеют вид

$$\begin{aligned} -m_{2a}p^2 S_a = F_{11}; \quad m_{2a}S_a(g \cos \varphi_0 + p^2 d_a) = L_1 F_{21}; \\ -p^2(A_{1a}\Phi_a - m_{2a}d_a S_a) + m_{2a}g \cos \varphi_0 S_a = L F_{21}. \end{aligned}$$

Откуда следует

$$S_a = -\frac{F_{11}}{m_{2a}p^2}; \quad \Phi_a = -\frac{2gF_{11} \cos \varphi_0/p^2 + (L - L_1)F_{21}}{p^2 A_{1a}}; \quad d_a = -L_1 \frac{F_{21}}{F_{11}} + \frac{g \cos \varphi_0}{p^2}. \quad (28)$$

Итак, определены значения амплитуд S_a и Φ_a колебаний гасителей и расстояние d_a , определяющее положение точки прикрепления гасителя к телу S_{n+2} . Выполнение условий (28) обеспечивает существование режима, в котором звенья манипулятора неподвижны, а колебания совершают только дополнительные тела (гасители).

Заключение. В настоящей работе изучено плоское движение манипулятора, находящегося под действием периодической нагрузки, в предположении, что первое звено манипулятора является упругим. Выбрана конечномерная модель упругого звена, представляющая из себя систему тел, связанных упругими цилиндрическими шарнирами. Рассмотрено два варианта присоединения схвата манипулятора к упругому звену. В первом случае схват непосредственно связан с этим звеном, а во втором – вводится дополнительно промежуточное твердое звено, связывающее схват с упругим звеном. Для гашения колебаний звеньев манипулятора, являющихся следствием действия внешней нагрузки, в систему введено два дополнительных тела (гасители колебаний). Установлено, что режим равновесия звеньев манипулятора может быть реализован лишь при втором варианте крепления схвата, когда используется промежуточное твердое тело. Дополнительное звено дает возможность установить необходимое направление оси гасителя, что и позволяет добиться режима равновесия.

1. Елфимов В.С., Ковалев А.М. Исследование колебаний манипулятора произвольной структуры при работе с виброинструментом на основе его динамической модели // Механика твердого тела. – 1989. – Вып. 21. – С. 47–56.
2. Ковалев А.М., Болграбская И.А., Чебанов Д.А., Щербак В.Ф. Гашение вынужденных колебаний в системах связанных твердых тел // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 3. – С.110-117.
3. Bolgrabskaya I.A., Shcherbak V.F. The damping of forced oscillations in systems of connected rigid bodies // 7-th Conf. on dynamical systems theory and applications (Lodz, Poland, December 8-10, 2003): Proc. – 2003. – V.1 – P. 329–336.
4. Болграбская И.А. Решение задачи о колебании консоли с помощью системы твердых тел и малые колебания упругих стержней // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 75–83.
5. Болграбская И.А. Исследование решения задачи о движении системы связанных твердых тел, моделирующих малые колебания упругой консоли // Там же – 1998. – Вып. 26(II). – С. 138–134.
6. Болграбська І.О. Дослідження динамічних властивостей систем зв'язаних твердих тіл і їх застосування до вивчення властивостей стержневих конструкцій. – Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Донецк, 1999. – 33 с.
7. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыгин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 168 с.
8. Болграбская И.А. Влияние сдвиговых деформаций в системе двух гироскопов Лагранжа на резонансные частоты // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 33–36.
9. Bolgrabskaya I.A. Resonance velocities with half-closed chain // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. Междунар. сб. – Казань, 2001. – **7**, вып. 1(13). – С. 22–28.