ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2004. Вып. 34

УДК 531.38

©2004. **А.Я. Савченко, В.В. Кравченко**

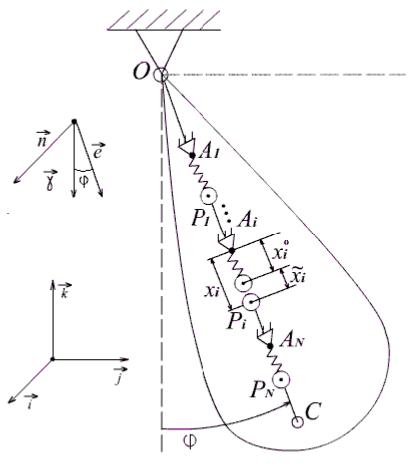
О СКОРОСТИ ЗАТУХАНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ ЕГО РАВНОВЕСИЯ В РЕЖИМЕ ПАССИВНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Рассмотрена задача о пассивной стабилизации [1, 2] колебаний механической системы – физический маятник с "замороженными" в нем точками P_i $(i = \overline{1, N})$ в их положениях равновесия. Показано, что скорость затухания колебаний физического маятника максимальна, когда частота колебаний каждой точки P_i равна удвоенной частоте колебаний исходной механической системы.

В задаче о пассивной стабилизации [1, 2] физического маятника в окрестности положения его равновесия за счет затухающих относительных колебаний материальной точки P вдоль прямой, проходящей через точку подвеса O и центр масс C маятника, был обнаружен небезынтересный эффект – скорость затухания колебаний маятника была наибольшей, если частота λ_1 относительных колебаний точки P была в два раза больше частоты λ колебаний механической системы – физический маятник плюс зафиксированная в нем в своем положении равновесия точка P $(\lambda_1 = 2\lambda)$. Далее такую систему будем называть приведенным физическим маятником.

Примечательно, что скорости переносного движения (а также и скорость центра масс C физического маятника) и относительного движения точки P ортогональны в каждый момент времени. Возникает гипотеза, что такая кинематика движения точки P и порождает вышеуказанный эффект.

Подтверждается ли эта гипотеза при следующем увеличении размерности системы: затухающие колебания вдоль прямой OC совершают N материальных точек P_i $(i = \overline{1, N})$?



Для проверки этого утверждения были получены уравнения движения такой системы (см. рисунок, здесь A_i – неподвижные точки, принадлежащие прямой OC, к которым на пружинах подвешены материальные точки P_i $(i = \overline{1, N})$). Далее, в соответствии с работами [1, 2], была проведена процедура вычисления параметра G, определяющего скорость затухания колебаний физического маятника. Анализ зависимости параметра G от частоты колебаний λ приведенного физического маятника и частот колебаний λ_i материальных точек P_i $(i = \overline{1, N})$ показал справедливость гипотезы и для полученной механической системы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение тяжелого физического маятника с центром масс C относительно неподвижной точки O и N материальных точек P_i $(i = \overline{1, N})$, совершающих относительные движения вдоль прямой OC. На каждую точку P_i $(i=\overline{1,N})$, кроме силы тяжести, действуют упругие силы $\mathbf{F}_i^{el}$, вызванные растяжением или сжатием пружины и определяемые законом Гука, а также силы трения $\mathbf{F}_i^{tr}$, пропорциональные относительной скорости $\dot{x}_i$ точки P_i $(i=\overline{1,N})$, то есть величины этих сил определяются соотношениями:

$$\mathbf{F}_i^{el} = -k_i^*(x_i - x_i^0), \qquad \mathbf{F}_i^{tr} = -\varkappa_i^* \dot{x}_i \quad (i=\overline{1,N}).$$

Здесь x_i – обобщенная координата, определяющая положение точки P_i относительно маятника; x_i^* – длина недеформированной пружины; k_i^*, $\varkappa_i^*$ $(i=\overline{1,N})$ – коэффициенты сил упругости и вязкого трения, приложенных к i-ой точке.

2. Уравнения движения механической системы. Пусть $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, сонаправленный силе тяжести, $\mathbf{e}$ – единичный вектор, сонаправленный вектору $\mathbf{OC}$, $\varphi = (\boldsymbol{\gamma}{}^\wedge\mathbf{e})$ – угол, определяющий положение физического маятника.

Тогда скорость $\boldsymbol{\nu_i}$ $(i=\overline{1,N})$ точки P_i определяется соотношением

$$\boldsymbol{\nu_i} = \dot{x}_i\mathbf{e} + \dot{\varphi}(a_i + x_i)(\mathbf{n}\times\mathbf{e}),$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, $\mathbf{n}\perp\mathbf{e}$, $\mathbf{n}\perp\boldsymbol{\gamma}$, тройка векторов $\boldsymbol{\gamma},\mathbf{e},\mathbf{n}$ – правая, $a_i = |OA_i|$, $(i=\overline{1,N})$. Поэтому кинетическая энергия точки P_i будет такова

$$T_i = \frac{1}{2}m_i\Big[\dot{x}_i^2 + (a_i+x_i)^2\dot{\varphi}^2\Big] \quad (i=\overline{1,N}).$$

Здесь m_i – масса точки P_i.

Поскольку кинетическая энергия маятника определяется соотношением $T=\dfrac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$, где I – его момент инерции относительно оси, определяемой вектором $\mathbf{n}$, то полная кинетическая энергия системы будет

$$T = \frac{1}{2}\Big[I\dot{\varphi}^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i[\dot{x}_i^2 + (a_i+x_i)^2\dot{\varphi}^2]\Big]. \tag{1}$$

Потенциальная энергия определяется соотношением

$$\Pi = -Mg(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{OC}) - g\sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{OP}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} k_i^*(x_i - x_i^*)^2 =$$

$$= -Mga\cos\varphi - g\sum_{i=1}^{N} m_i(a_i+x_i)\cos\varphi + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} k_i^*(x_i - x_i^*)^2. \tag{2}$$

Здесь $a=|\mathbf{OC}|$, M – масса физического маятника.

Уравнения движения примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 0; \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = -\varkappa_i^*\dot{x}_i \quad (i=\overline{1,N}), \end{cases} \tag{3}$$

где $L = T - \Pi$, а T и Π определяются, соответственно, соотношениями (1) и (2). Уравнения (3) допускают решение

$$\varphi = 0, \qquad x_i = x_i^0 \quad (i = \overline{1, N}), \tag{4}$$

где

$$x_i^0 = \frac{m_i g}{k_i^*} + x_i^*. \tag{5}$$

Решению (4) соответствует нижнее положение равновесия физического маятника и фиксированные положения точек P_i $(\overline{1, N})$ на прямой OC, определяемые соотношениями (5).

Исследуем устойчивость решения (4). Переходя в уравнениях (3) к возмущениям, полагая

$$x_i = x_i^0 + \widetilde{x}_i, \qquad \varphi = \widetilde{\varphi}, \qquad \dot{x}_i = \dot{\widetilde{x}}_i, \qquad \dot{\varphi} = \dot{\widetilde{\varphi}},$$

получаем уравнения возмущенного в окрестности решения (4) движения изучаемой механической системы

$$\begin{cases} \ddot{\widetilde{\varphi}} = -\left[\widetilde{q}_0 + \sum\limits_{i=1}^{N}\left(\widetilde{q}_i\widetilde{x}_i + m_i\widetilde{x}_i^2\right)\right]^{-1}\Big(\sum\limits_{i=1}^{N}(\widetilde{q}_i + 2m_i\widetilde{x}_i)\dot{\widetilde{x}}_i\dot{\widetilde{\varphi}} + \\ \quad +Mga\sin\widetilde{\varphi} + \dfrac{g}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}(\widetilde{q}_i + 2m_i\widetilde{x}_i)\sin\widetilde{\varphi}\Big); \\ \ddot{\widetilde{x}}_i = \left(\widetilde{a}_i + gk_i'^{-1} + \widetilde{x}_i\right)\dot{\widetilde{\varphi}}^2 - g(1 - \cos\varphi) - k_i'\widetilde{x}_i - \varkappa_i'\dot{\widetilde{x}}_i \quad (i = \overline{1, N}), \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} \widetilde{a}_i = a_i + x_i^*, \qquad k_i' = m_i^{-1}k_i^*, \qquad \varkappa_i' = m_i^{-1}\varkappa_i^*, \\ \widetilde{q}_0 = I + \sum_{i=1}^{N} m_i(\widetilde{a}_i + gk_i'^{-1})^2, \qquad \widetilde{q}_i = 2m_i(\widetilde{a}_i + gk_i'^{-1}). \end{gathered} \tag{7}$$

Разлагая правые части уравнений (6) в ряды по возмущениям и выписывая в явном виде слагаемые до третьего порядка малости включительно относительно возмущений $\widetilde{x}_i, \dot{\widetilde{x}}_i, \widetilde{\varphi}, \dot{\widetilde{\varphi}}$, получим уравнения возмущенного движения в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{\varphi}} = w, \\ \dot{w} = -\widetilde{A}\widetilde{\varphi} + \widetilde{\Omega}^{(2)} + \widetilde{\Omega}^{(3)} + \ldots \ ; \\ \dot{\widetilde{x}}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = -k_i'\widetilde{x}_i - \varkappa_i' y_i + (a_i + k'^{-1}_i g + \widetilde{x}_i)w^2 - \dfrac{1}{2}g\widetilde{\varphi}^2 + \ldots \quad (i = \overline{1, N}), \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\widetilde{A} = g\widetilde{q}_0^{-1}\Big[Ma + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\widetilde{q}_i\Big];$$

$$\widetilde{\Omega}^{(2)} = \widetilde{\varphi}\widetilde{q}_0^{-1}\sum_{i=1}^{N}(\widetilde{A}\widetilde{q}_i - gm_i)\widetilde{x}_i - w\widetilde{q}_0^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widetilde{q}_i y_i;$$

$$\widetilde{\Omega}^{(3)} = \frac{1}{6}\widetilde{A}\widetilde{\varphi}^3 - 2w\widetilde{q}_0^{-1}\sum_{i=1}^{N}m_i\widetilde{x}_i y_i + w\widetilde{q}_0^{-2}\Big(\sum_{i=1}^{N}\widetilde{q}_i\widetilde{x}_i\Big)\ \Big(\sum_{i=1}^{N}\widetilde{q}_i y_i\Big) +$$

$$+ g\widetilde{\varphi}\widetilde{q}_0^{-2}\Big(\sum_{i=1}^{N}\widetilde{q}_i\widetilde{x}_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{N}m_i\widetilde{x}_i\Big) + \widetilde{A}\widetilde{\varphi}\widetilde{q}_0^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{N}m_i\widetilde{x}_i^2 - \widetilde{q}_0^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{N}\widetilde{q}_i\widetilde{x}_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{N}\widetilde{q}_i\widetilde{x}_i\Big)\Big];$$

$\widetilde{q}_0,\ \ \widetilde{q}_i,\ \ {k'}_i,\ \ \varkappa'_i$ записаны в (7).

В уравнениях (8) многоточием обозначены члены порядка малости выше третьего относительно возмущений $\widetilde{x}_i,\ y_i,\ \widetilde{\varphi},\ \ w$.

Отметим, что частота λ_i колебаний точки P_i равна $\sqrt{{k'}_i}$, а частота λ колебаний физического маятника с «замороженными» в нем точками P_i в их положениях равновесия равна $\sqrt{\widetilde{A}}$.

3. Построение функции Ляпунова, вычисление коэффициента устойчивости. Перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$\widetilde{\varphi} = \varphi'; \quad t = \frac{t'}{\sqrt{\widetilde{A}}}; \quad w = \sqrt{\widetilde{A}}\ w'; \quad \widetilde{x}_i = ax'_i; \quad y_i = a\sqrt{\widetilde{A}}\ y'_i,$$

и, опуская в дальнейшем знаки «штрих» и «тильда», получим следующие уравнения возмущенного движения:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = w, \\ \dfrac{dw}{dt} = -\varphi + \Omega^{(2)} + \Omega^{(3)} + \dots\ ; \\ \dfrac{dx_i}{dt} = y_i, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = -k_iA^{-1}x_i - \varkappa_iA^{-\frac{1}{2}}y_i + (a_ia^{-1} + gk_i^{-1}a^{-1})w^2 - \\ \qquad -\dfrac{1}{2}ga^{-1}A^{-1}\varphi^2 + x_iw^2 + \dots \quad (i = \overline{1, N}), \end{cases}$$

где $q_0 = I + \sum\limits_{i=1}^{N}m_i(a_i + gk_i^{-1})^2, \quad q_i = 2m_i(a_i + gk_i^{-1}), \quad A = gq_0^{-1}\Big[Ma + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}q_i)\Big],$

$$\Omega^{(2)} = aA^{-1}\varphi q_0^{-1}\sum_{i=1}^{N}(Aq_i - gm_i)x_i - awq_0^{-1}\sum_{i=1}^{N}q_iy_i,$$

$$\Omega^{(3)} = \frac{1}{6}\varphi^3 - 2a^2wq_0^{-1}\sum_{i=1}^{N}m_ix_iy_i + a^2wq_0^{-2}\Big(\sum_{i=1}^{N}q_ix_i\Big)\ \Big(\sum_{i=1}^{N}q_iy_i\Big) +$$

$$+ ga^2A^{-1}\varphi q_0^{-2}\Big(\sum_{i=1}^{N}q_ix_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{N}m_ix_i\Big) + a^2\varphi q_0^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{N}m_ix_i^2 - q_0^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{N}q_ix_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{N}q_ix_i\Big)\Big].$$

Следуя работам [1, 2] ищем функцию Ляпунова в виде

$$V = V^{(2)} + V^{(3)} + V^{(4)}.$$

Здесь

$$V^{(2)} = \varphi^2 + w^2 + \sum_{i=1}^{N} \mu_i (f_0^{(i)} x_i^2 + 2 f_1^{(i)} x_i y_i + f_2^{(i)} y_i^2),$$

$$V^{(3)} = \sum_{i=1}^{N} (b_0^{(i)} \varphi^2 + 2 b_1^{(i)} \varphi w + b_2^{(i)}) x_i + \sum_{i=1}^{N} (c_0^{(i)} \varphi^2 + 2 c_1^{(i)} \varphi w + c_2^{(i)} w^2) y_i,$$

$$V^{(4)} = (b\varphi^4 + c\varphi^2 w^2 + f\varphi^3 w + p\varphi w^3 + hw^4) + \sum_{i=1}^{N} (A_1^{(i)} x_i^2 + 2B_1^{(i)} x_i y_i + C_1^{(i)} y_i^2)\varphi^2 +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j (p_0^{(i,j)} \varphi^2 + 2 p_1^{(i,j)} \varphi w + p_2^{(i,j)} w^2),$$

где $f_0^{(i)}, f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \ldots, p_0^{(i,j)}, p_1^{(i,j)}, p_2^{(i,j)}$ $(i, j = \overline{1, N})$ – пока неопределенные постоянные коэффициенты. Тогда

$$\dot V = W^{(2)}(x_i, y_i) + W^{(3)}(x_i, y_i, w, \varphi) + W^{(4)}(x_i, y_i, w, \varphi) + \ldots .$$

Здесь $W^{(2)}, W^{(3)}, W^{(4)}$ – формы порядка малости соответственно второго, третьего и четвертого, коэффициенты которых выражаются через коэффициенты форм $V^{(2)}, V^{(3)}, V^{(4)}$. Находим коэффициенты $f_0^{(i)}, \ldots, p_2^{(i,j)}$ $(i, j = \overline{1, N})$ из условий, что

$$\begin{cases} W^{(2)} = -2 \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_i (x_i^2 + y_i^2); \\ W^{(3)} \equiv 0; \\ W^{(4)} = -\big(G + \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_i G_i\big)(\varphi^2 + w^2)^2, \end{cases} \tag{9}$$

где μ_i $(i = \overline{1, N})$ – некоторые постоянные. Соотношения (9) выполняются, если

$$f_0^{(i)} = {\varkappa''}_i^{-1}(1 + k''_i) + {k''}_i^{-1} \varkappa''_i; \quad f_1^{(i)} = {k''}_i^{-1}; \quad f_2^{(i)} = {\varkappa''}_i^{-1}(1 + {k''}_i^{-1}),$$

$$c_0^{(i)} = \Delta_i^{-1} \big\{ \mu_i {k''}_i^{-2} [2a^{-1}(a_i + g{k''}_i^{-1} A^{-1}) - g a^{-1} A^{-1}][2{\varkappa''}_i^2 + (4 - k''_i)(2 - k''_i)] -$$
$$-2\mu_i [3a^{-1}(a_i + g{k''}_i^{-1} A^{-1}) + g a^{-1} A^{-1} - {k''}_i^{-1} [2a^{-1}(a_i + g{k''}_i^{-1} A^{-1}) - g a^{-1} A^{-1}]] +$$
$$+2\varkappa''_i (4 m_i a q_0^{-1}(a_i + g{k''}_i^{-1} A^{-1}) - a A^{-1} q_0^{-1}(A q_i - g m_i)) \big\},$$

$$c_2^{(i)} = \Delta_i^{-1} \big\{ \mu_i {k''}_i^{-2} [2a^{-1}(a_i + g{k''}_i^{-1} A^{-1}) - g a^{-1} A^{-1}][2{\varkappa''}_i^2 + 2(4 - k''_i)] +$$
$$+2\mu_i [3a^{-1}(a_i + g{k''}_i^{-1} A^{-1}) + g a^{-1} A^{-1} - {k''}_i^{-1} [2a^{-1}(a_i + g{k''}_i^{-1} A^{-1}) - g a^{-1} A^{-1}]] -$$
$$-2\varkappa''_i (4 m_i a q_0^{-1}(a_i + g{k''}_i^{-1} A^{-1}) - a A^{-1} q_0^{-1}(A q_i - g m_i)) \big\},$$

где $k''_i = k'_i \widetilde{A}^{-1}$; $\varkappa''_i = \varkappa'_i \widetilde{A}^{-1/2}$, $\Delta_i = 4{\varkappa''}_i^2 + (k''_i - 4)^2$ $(i = \overline{1, N})$.

Коэффициенты $b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, c_1^{(i)}$ определяются по формулам

$$b_0^{(i)} = E^{(i)} - 2c_1^{(i)} + \varkappa''_i c_2^{(i)}, \quad c_1^{(i)} = \varkappa''^{-1}_i [b_1^{(i)} + c_0^{(i)} - c_2^{(i)}],$$

$$b_1^{(i)} = C^{(i)} + \tfrac{1}{2} k''_i c_2^{(i)}, \quad b_2^{(i)} = A^{(i)} - 2c_1^{(i)} + \varkappa''_i c_2^{(i)} \quad (i = \overline{1,N}),$$

где

$$A^{(i)} = 4m_i a q_0^{-1}(a_i + g k''^{-1}_i A^{-1}) - 2\mu_i a^{-1} f_2^{(i)} (a_i + g k''^{-1}_i A^{-1}),$$

$$C^{(i)} = -\mu_i f_1^{(i)} (a_i + g k''^{-1}_i A^{-1}), \quad E^{(i)} = \mu_i f_2^{(i)} g a^{-1} A^{-1} \quad (i = \overline{1,N}),$$

а остальные коэффициенты $A_1^{(i)}, ..., p_2^{(i,j)}$ в явном виде выписывать нет необходимости. При этом

$$G_i = \{\Delta_i^{-1} k''^{-2}_i\}\big\{(2a'_i - g a^{-1} A^{-1})\big[2\varkappa''^2_i + 2(4 - k'')\big(\frac{1}{4} g a^{-1} A^{-1} - \frac{1}{2} a^{-1}\big) -$$

$$- k''_i \big(\frac{3}{16} g a^{-1} A^{-1} - \frac{1}{8} a'_i\big)\big] - 2k''^2_i (3a'_i + g a^{-1} A^{-1} +$$

$$+ k''^{-1}_i (2a'_i - g a^{-1} A^{-1}))\big(\frac{1}{4} g a^{-1} A^{-1} - \frac{1}{2} a'_i\big)\big\} \quad (i = \overline{1,N}),$$

$$\text{где} \quad a'_i = a_i + g k''^{-1}_i A^{-1} \quad (i = \overline{1,N});$$

$$G = \Big\{\prod_{i=1}^{N} \Delta_i\Big\}^{-1} \left\{\frac{1}{4} a^{-1} A^{-2} q_0^{-1} \sum_{i=1}^{N} \Big[\varkappa''_i (4m_i a'_i A a^2 - q_i A a + m_i g a)(g + 2Aaa'_i) \prod_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{N} \Delta_j\Big]\right\}, \quad (10)$$

где

$$\Delta_i = 4\varkappa''^2_i + (x^{(i)})^2, \qquad x^{(i)} = k''_i - 4 \quad (i = \overline{1,N}).$$

В соответствии с работами [1, 2], скорость затухания колебаний физического маятника определяется величиной (10). Исследуя G как функцию $x^{(i)}$ $(i = \overline{1,N})$ обычным образом на экстремум, можно убедиться, что максимум G достигается при $x^{(i)} = 0$ $(i = \overline{1,N})$ или, возвращаясь к исходным параметрам, получаем:

$$k''_i = 4, \quad k'_i = 4\widetilde{A} m_i \quad (i = \overline{1,N}).$$

То есть частоты колебаний λ_i точек P_i $(i = \overline{1,N})$ равны $2\sqrt{\widetilde{A}}$. Поэтому скорость затухания колебаний физического маятника максимальна, когда частоты колебаний λ_i – точек P_i $(i = \overline{1,N})$ и частота физического маятника λ связаны соотношением:

$$\lambda_i = 2\lambda \quad (i = \overline{1,N}).$$

Таким образом, скорость затухания колебаний физического маятника максимальна, когда частота колебаний каждой точки P_i $(i = \overline{1,N})$ равна удвоенной величине частоты колебаний физического маятника с «замороженными» в нем точками P_i в их положениях равновесия, определяемых формулами (5).

1. *Peiffer K., Savchenko A.Ya.* On passive stabilization in critical cases // J. of Math. Analysis and Applications. – 2000. – **244**. – P. 106-119.
2. *Peiffer K., Savchenko A.Ya.* On the some asymptotic behavior of a passively stabilized system with one critical variable // Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli. – 2000. – **LXVII**. – P. 157-168.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Получено 01.10.04