

УДК 531.38

©2004. И.Н. Гашененко

БИФУРКАЦИИ УРОВНЕЙ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА

В задаче о движении тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки изучается бифуркационное множество для трехмерных поверхностей интегральных уровней. Рассмотрен частный случай, когда гиростатический момент направлен вдоль оси, проходящей через центр тяжести гиростата. При таком предположении осями равномерных вращений тела могут быть только образующие конуса Штауде. Исследованы направляющие кривые этого конуса, классифицированы бифуркационные диаграммы на плоскости констант первых интегралов.

Введение. Движение гиростата вокруг неподвижной точки описывается дифференциальными уравнениями

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \mathbf{r} \times \nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (1)$$

где $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции, ω – угловая скорость тела-носителя в подвижных осях, ν – орт вертикали, λ – постоянный гиростатический момент и \mathbf{r} – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс гиростата. Уравнения (1) допускают три первых интеграла

$$H = \frac{1}{2}A\omega \cdot \omega - \mathbf{r} \cdot \nu = h, \quad G = (A\omega + \lambda) \cdot \nu = g, \quad I = \nu \cdot \nu = 1. \quad (2)$$

Введенное английскими механиками понятие гиростата неоднократно обобщалось в прошлом веке. Физически различные конструкции гиростатов обсуждались в работах Э.Дж. Рауса, Н.Е. Жуковского, Т. Леви-Чивита и У. Амальди, К. Магнуса, П.В. Харламова и др. Формальное, но наиболее общее определение понятия гиростата было дано П.В. Харламовым [1]. Далее в этой работе будем изучать гиростаты специального вида, характеризующиеся частным условием

$$\lambda = \varkappa \mathbf{r}, \quad \varkappa \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Это условие в общем случае означает, что гиростатический момент λ направлен вдоль оси, проходящей через центр тяжести гиростата. Заметим, что уравнения движения (1) при условии (3) допускают обобщения некоторых классических решений динамики твердого тела с неподвижной точкой. В частности, аналог интегрируемого случая Лагранжа известен для уравнений (1), (3). Периодические решения В.А. Стеклова, Н. Ковалевского и Дж. Гриоли также были обобщены на рассматриваемый класс механических систем.

Без ограничения общности положим $\varkappa > 0$, так как уравнения (1) инвариантны относительно линейного преобразования $(\omega, \varkappa, t) \rightarrow (-\omega, -\varkappa, -t)$. Случай $\varkappa < 0$ траекторно эквивалентен случаю $\varkappa > 0$. Перенумеруем главные оси инерции так, чтобы выполнялись следующие неравенства

$$A_1 \geq A_2 \geq A_3 > 0, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0, \quad r_3 \geq 0. \quad (4)$$

Семь свободных параметров (A_i, r_i, \varkappa) характеризуют гиростаты рассматриваемого вида, но введением безразмерных переменных можно понизить число конструктивных параметров до пяти.

Основной целью данной работы является изучение топологии типичных интегральных многообразий, возникающих в задаче о движении вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата, распределение масс которого подчинено условию (3). В соответствии с результатами С. Смейла [2], трехмерные интегральные многообразия

$$\mathcal{Q}_{h,g}^3 = \{H = h, G = g, I = 1\} \subset \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega}) \times \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\nu})$$

стандартным образом надстраиваются над областями возможности движения

$$\mathcal{U}_{h,g} = \{U_g(\boldsymbol{\nu}) \leq h\} \subset S^2.$$

Эти области являются многообразиями уровней заданной на сфере $S^2 = \{|\boldsymbol{\nu}| = 1\}$ функции Морса

$$U_g(\boldsymbol{\nu}) = \frac{(g - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu})^2}{2(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu},$$

называемой эффективным потенциалом [3]. Критические точки $U_g(\boldsymbol{\nu})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с равномерными вращениями тяжелого гиростата вокруг вертикали. Следовательно, подробный анализ равномерных вращений является теоретическим фундаментом для дальнейшего применения топологических методов к рассматриваемой задаче механики.

Основное внимание будем уделять только общим принципам классификации многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$, не претендуя на всю полноту исследования. Заметим, что детальное описание всех возможных типов интегральных многообразий задачи о движении гиростата целесообразно начать с рассмотрения различных частных случаев, так как даже для более простых уравнений Эйлера–Пуассона неособые интегральные многообразия полностью изучены и классифицированы лишь при некоторых ограничениях на параметры (например, когда центр масс твердого тела принадлежит главной оси [4] или находится в одной из главных плоскостей инерции [5]).

В этой работе проанализированы и описаны равномерные вращения тяжелого гиростата, подчиненного условиям (3), (4). Исследования основаны на общих результатах О. Штауде [6] и П.В. Харламова [7]. Сначала найдены возможные положения осей равномерных вращений в подвижном базисе и показано, что эти оси являются образующими конуса второго порядка. Затем определены допустимые дуги сферической кривой, полученной пересечением конуса с единичной сферой. Далее, с помощью найденных критических точек эффективного потенциала $U_g(\boldsymbol{\nu})$ построены бифуркационные диаграммы: плоскость $\mathbb{R}^2(h, g)$ шестью кривыми разделена на несколько (не менее десяти) связных подобластей, для каждой из которых указан топологический тип интегрального многообразия $\mathcal{Q}_{h,g}^3$.

1. Конус Штауде. Если угловая скорость постоянна по отношению к телу-носителю ($\boldsymbol{\omega} = \text{const}$), то она постоянна и в пространстве: гири стат равномерно вращается вокруг неподвижной оси, вдоль которой направлен вектор $\boldsymbol{\omega}$. Из первого уравнения (1) и условия (3) следует отмеченное в работе [8] равенство

$$(A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r} = 0, \quad (5)$$

которое показывает, что три неизменных в теле вектора $A\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}$ лежат в одной плоскости. Уравнение (5) определяет конус Штауде [6], неизменно связанный с телом. Этот конус второго порядка задан в подвижном базисе и является геометрическим местом осей равномерных вращений. В общем случае, когда условие (3) не выполняется, оси равномерных вращений принадлежат сложной конической поверхности четвертого порядка. Уравнение этой поверхности было получено П.В. Харламовым [7] и исследовано А.М. Ковалевым [9]. Некоторые свойства конуса равномерных вращений тяжелого гиростата были изучены также в работах [10, 11].

С помощью первых интегралов (2) можно показать, что единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$ сохраняет свое направление не только в пространстве, но и в подвижном базисе. Следовательно, осью равномерного вращения тела в пространстве может служить только вертикаль

$$\boldsymbol{\omega} = \pm |\boldsymbol{\omega}| \boldsymbol{\nu}. \quad (6)$$

Подставим (6) в равенство (5). Уравнение

$$(A_2 - A_3)\nu_2\nu_3r_1 + (A_3 - A_1)\nu_3\nu_1r_2 + (A_1 - A_2)\nu_1\nu_2r_3 = 0 \quad (7)$$

определяет на единичной сфере Пуассона линию пересечения конуса осей равномерных вращений с этой сферой. Осями равномерных вращений могут быть лишь те из образующих конуса Штауде, для которых векторное уравнение

$$(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu})|\boldsymbol{\omega}|^2 \pm (\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\nu})|\boldsymbol{\omega}| + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu} = 0, \quad (8)$$

полученное подстановкой (6) в первое уравнение (1), позволяет определить действительную величину $|\boldsymbol{\omega}|$. Все такие образующие конуса (5), а также соответствующие им точки сферической кривой (7) О. Штауде называл *допустимыми* [6]. Из уравнения (8)

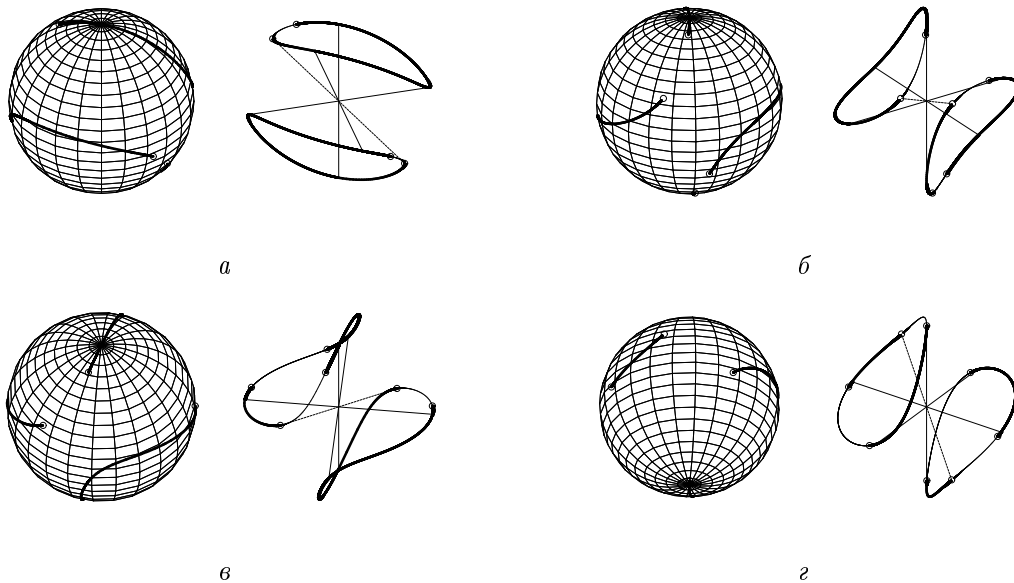


Рис. 1. Допустимые дуги кривой Штауде на сфере $S^2 = \{|\boldsymbol{\nu}| = 1\}$.

следует, что допустимые точки сферической кривой удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} (r_2\nu_3 - r_3\nu_2) [\varkappa^2(r_2\nu_3 - r_3\nu_2) + 4(A_3 - A_2)\nu_2\nu_3] &\geq 0, \\ (r_3\nu_1 - r_1\nu_3) [\varkappa^2(r_3\nu_1 - r_1\nu_3) + 4(A_1 - A_3)\nu_3\nu_1] &\geq 0, \\ (r_1\nu_2 - r_2\nu_1) [\varkappa^2(r_1\nu_2 - r_2\nu_1) + 4(A_2 - A_1)\nu_1\nu_2] &\geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для параметров, удовлетворяющих условиям (3), (4) и неравенствам

$$(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_3 - A_1) \neq 0, \quad r_1 r_2 r_3 \neq 0,$$

все возможные варианты расположения допустимых дуг кривой Штауде на единичной сфере изображены на рис. 1, *a* – *г*; в правой части каждого рисунка для наглядности показаны вся сферическая кривая (7), главные оси инерции и пунктиром отмечена ось, несущая центр масс гиростата. Граничные точки допустимых дуг соответствуют кратным корням уравнений (8) и, в частности, точки $\boldsymbol{\nu} = \pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ всегда являются граничными. Как следует из этих рисунков, одна или две дуги могут принадлежать каждой полости конуса Штауде, то есть число допустимых дуг зависит от параметров гиростата. Рис. 1, *a* соответствует достаточно большим значениям \varkappa , рис. 1, *г* – малым значениям \varkappa .

При неограниченном возрастании $|\boldsymbol{\omega}|$ пространственные кривые, соответствующие множеству равномерных вращений на конусе (5), приближаются к асимптотическим линиям. В $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega})$ асимптотами являются прямые

$$\begin{aligned} l_1 &= \{ \boldsymbol{\omega} : \omega_2 = r_2 \varkappa (A_1 - A_2)^{-1}, \omega_3 = r_3 \varkappa (A_1 - A_3)^{-1} \}, \\ l_2 &= \{ \boldsymbol{\omega} : \omega_1 = r_1 \varkappa (A_2 - A_1)^{-1}, \omega_3 = r_3 \varkappa (A_2 - A_3)^{-1} \}, \\ l_3 &= \{ \boldsymbol{\omega} : \omega_1 = r_1 \varkappa (A_3 - A_1)^{-1}, \omega_2 = r_2 \varkappa (A_3 - A_2)^{-1} \}. \end{aligned}$$

2. Параметризация равномерных вращений. При исследовании равномерных вращений будем использовать параметризацию, успешно применяемую в задачах динамики твердого тела (см., например, работы [11, 12]). Соответствующие равномерным вращениям компоненты векторов $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$ определим следующими формулами

$$\nu_i = \frac{(\mu \varkappa + 1)r_i}{(\sigma - A_i)\mu^2}, \quad \omega_i = \mu \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

при этом зависимость $\mu(\sigma)$ величины угловой скорости вращения от параметра σ зададим уравнением

$$\mu^4 - (\mu \varkappa + 1)^2 S_0 = 0, \quad \text{г} \quad S_0 = \sum_{i=1}^3 \frac{r_i^2}{(A_i - \sigma)^2}. \quad (11)$$

Параметр σ , изменяясь в интервале $(-\infty, \infty)$, взаимно однозначно пробегает все образующие оси конуса Штауде, за исключением единичного вектора центра масс. Уравнение (11) определяет на плоскости $\mathbb{R}^2(\sigma, \mu)$ гладкую кривую, которая преобразованием (10) отображается на допустимые дуги сферической кривой (7).

Замена переменных (10) позволяет записать (9) в виде следующих неравенств

$$\begin{aligned}\frac{r_2^2 r_3^2 (A_3 - A_2)^2 (\mu \varkappa + 1)^2 (\mu \varkappa + 2)^2}{\mu^6 (\sigma - A_2)^2 (\sigma - A_3)^2} &\geq 0, \\ \frac{r_3^2 r_1^2 (A_1 - A_3)^2 (\mu \varkappa + 1)^2 (\mu \varkappa + 2)^2}{\mu^6 (\sigma - A_3)^2 (\sigma - A_1)^2} &\geq 0, \\ \frac{r_1^2 r_2^2 (A_2 - A_1)^2 (\mu \varkappa + 1)^2 (\mu \varkappa + 2)^2}{\mu^6 (\sigma - A_1)^2 (\sigma - A_2)^2} &\geq 0.\end{aligned}$$

С их помощью можно показать, что значения $\mu = -2\varkappa^{-1}$ и $\mu = \pm\infty$ всегда соответствуют граничным точкам допустимых дуг кривой Штауде.

Дискриминант уравнения (11) относительно переменной μ имеет вид

$$d = 16S_0^3(\varkappa^4 S_0 - 16).$$

Для фиксированных значений σ , удовлетворяющих неравенству $S_0 < 16\varkappa^{-4}$, уравнение (11) имеет два действительных корня:

$$-\infty < \frac{2}{\varkappa}(1 - \sqrt{2}) < \mu_2 < 0 < \mu_1 < \frac{2}{\varkappa}(1 + \sqrt{2}) < \infty. \quad (12)$$

При $\sigma \rightarrow \pm\infty$ оба корня стремятся к нулю.

Если значение $\sigma \neq A_i$ соответствует неравенству $S_0 > 16\varkappa^{-4}$, то уравнение (11) имеет четыре действительных корня:

$$-\infty < \mu_4 < -\frac{2}{\varkappa} < \mu_3 < -\frac{1}{\varkappa} < \mu_2 < \frac{2}{\varkappa}(1 - \sqrt{2}) < 0 < \frac{2}{\varkappa}(1 + \sqrt{2}) < \mu_1 < \infty. \quad (13)$$

Для $\sigma = A_i$ действительные корни имеют вид $\mu_{1,4} = \pm\infty$, $\mu_{2,3} = -\varkappa^{-1}$. Следствием этого является характерное свойство рассматриваемой задачи, которое впервые было отмечено в [8]: если гиростат равномерно вращается вокруг главной оси инерции, то $|\boldsymbol{\omega}| = \varkappa^{-1}$. Кривая (11) имеет самопересечения в точках $(\sigma, \mu) = (A_i, -\varkappa^{-1})$, угловые коэффициенты касательных в этих точках равны $d\mu/d\sigma = \pm\varkappa^{-3}r_i^{-1}$.

При нулевом значении дискриминанта d уравнение (11) допускает кратный корень:

$$\mu_4 = \mu_3 = -\frac{2}{\varkappa} < \mu_2 = \frac{2}{\varkappa}(1 - \sqrt{2}) < 0 < \mu_1 = \frac{2}{\varkappa}(1 + \sqrt{2}). \quad (14)$$

Зафиксируем значение $\mu \neq -\varkappa^{-1}$. Тогда (11), рассматриваемое как уравнение относительно σ , имеет не менее двух, но не более шести действительных корней: по одному корню в интервалах $(-\infty, A_3)$, (A_1, ∞) ; в интервалах (A_3, A_2) , (A_2, A_1) оно имеет либо два, либо ни одного корня [11].

Найдем параметр μ из уравнения (11) и подставим его в соотношения (10). Тогда параметрические зависимости компонент векторов $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$, соответствующих равномерным вращениям тела, имеют следующий вид

$$\nu_i = \begin{cases} r_i (\sigma - A_i)^{-1} S_0^{-1/2}, & \text{если } S_0 < 16\varkappa^{-4}, \\ \pm r_i (\sigma - A_i)^{-1} S_0^{-1/2}, & \text{если } S_0 \geq 16\varkappa^{-4}; \end{cases} \quad (15)$$

$$\omega_i = \begin{cases} r_i (\sigma - A_i)^{-1} (\varkappa/2 \pm \sqrt{\varkappa^2/4 + S_0^{-1/2}}), & \text{если } S_0 < 16\varkappa^{-4}, \\ r_i (\sigma - A_i)^{-1} (\varkappa/2 \pm \sqrt{\varkappa^2/4 \pm S_0^{-1/2}}), & \text{если } S_0 \geq 16\varkappa^{-4}. \end{cases} \quad (16)$$

Зафиксируем параметры гиригоста A_i, r_i, \varkappa . Если эллипсоид инерции гиригоста является трехосным и центр масс занимает “общее положение”, то все возможные расположения кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(\sigma, \mu)$ показаны на рис. 2. Разделяющие значения

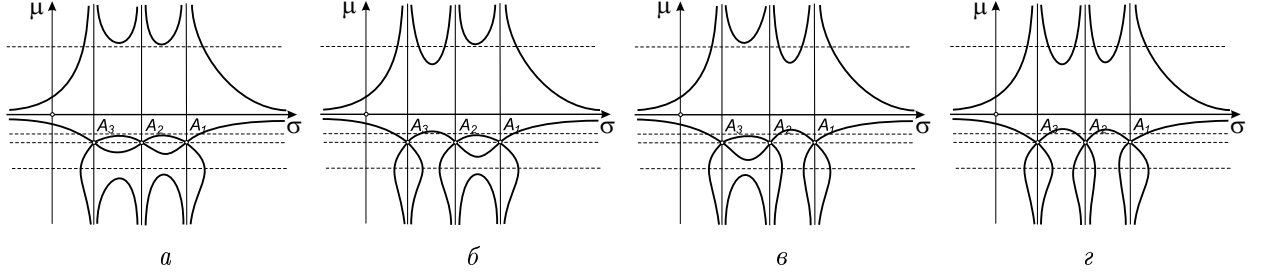


Рис. 2. Кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(\sigma, \mu)$.

параметров A_i, r_i, \varkappa , при которых происходит изменение типа кривой $\mu(\sigma)$, найдем из условий совместности решений двух уравнений

$$S_0 - 16\varkappa^{-4} = 0, \quad S'_0 \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{2r_i^2}{(\sigma - A_i)^3} = 0. \quad (17)$$

При малых значениях \varkappa приближенные значения параметров, соответствующие решениям системы (17), удовлетворяют уравнению

$$\varkappa^4 \left[\frac{r_1^2 + r_2^2}{(A_1 - A_2)^2} + \frac{r_2^2 + r_3^2}{(A_2 - A_3)^2} + \frac{r_3^2 + r_1^2}{(A_3 - A_1)^2} \right] = \frac{16}{3}. \quad (18)$$

Дифференцированием уравнения (11) найдем выражение

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{(\mu\varkappa + 1)\mu S'_0}{2(\mu\varkappa + 2)S_0},$$

которое позволяет исследовать направления касательных в точках кривой $\mu(\sigma)$.

Если условие (3) не выполняется, то кривая $\mu(\sigma)$ может иметь гораздо более сложный вид. Исследованию общего случая посвящена работа [11], в которой авторам удалось изучить основные свойства этой кривой. Полная классификация возможных видов кривой $\mu(\sigma)$ пока, к сожалению, отсутствует.

3. Бифуркационные диаграммы. Подставим компоненты постоянных векторов ν, ω , заданные формулами (10), в интегралы H, G . После элементарных преобразований найдем параметрические уравнения бифуркационных кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}\sigma\mu^2 + \frac{(\mu\varkappa + 1)(\mu\varkappa + 3)}{2\mu^2}U_0, \\ g &= \sigma\mu + \frac{(\mu\varkappa + 1)}{\mu^3}U_0, \quad \text{г} \quad U_0 = \sum_{i=1}^3 \frac{r_i^2}{(A_i - \sigma)}. \end{aligned} \quad (19)$$

В этих соотношениях $\sigma \in (-\infty, A_3) \cup (A_3, A_2) \cup (A_2, A_1) \cup (A_1, \infty)$, а зависимость $\mu(\sigma)$ по-прежнему определена уравнением (11). Непосредственным дифференцированием уравнений (19) найдем равенство

$$2\mu^2 \left(\frac{dg}{d\sigma} \mu - \frac{dh}{d\sigma} \right) = \mu^4 - (\mu\kappa + 1)^2 S_0,$$

из которого, учитывая (11), получим соотношение

$$\frac{dh}{dg} = \mu. \quad (20)$$

Таким образом, значение μ определяет направление наклона касательной в соответствующей точке кривой (19). В частности, из (20), (11) следует, что на любой бифуркационной диаграмме существуют не менее двух, но не более шести различных точек с равными угловыми коэффициентами касательных в этих точках.

Нулевое значение угловой скорости соответствует точкам

$$P_0 = (|\mathbf{r}|, -\kappa|\mathbf{r}|), \quad P_1 = (-|\mathbf{r}|, \kappa|\mathbf{r}|)$$

бифуркационных кривых (19). Проведем прямую

$$l = \{h, g : h\kappa + g = 0\} \subset \mathbb{R}^2(h, g)$$

через точки P_0, P_1 . Условие пересечения прямой l с кривыми (19) приводит к простому равенству $(\mu\kappa + 2)\mu = 0$. Таким образом, прямая l пересекает бифуркационную диаграмму только в тех точках, где $\mu = 0$ или $\mu = -2\kappa^{-1}$. Соответствующее условиям (17) ветвление кривых (19) также происходит на прямой l .

Если значения $r_i \neq 0$, то любая точка $(\sigma, \mu) = (A_i, -\kappa^{-1})$ самопересечения кривой (11) подстановкой в уравнения (19) преобразуется в две различные точки бифуркационной диаграммы. Координаты этих точек таковы: $(h, g) = (\frac{1}{2}A_i\kappa^{-2} \mp r_i, -A_i\kappa^{-1} \pm \kappa r_i)$.

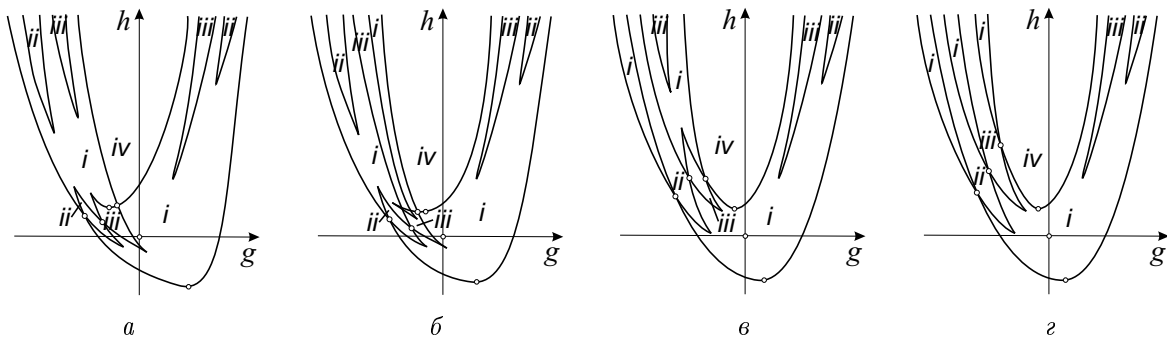


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$.

Типичные бифуркационные диаграммы на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$ показаны схематично на рис. 3: а) $\kappa = 1.5$, б) $\kappa = 1.1$, г) $\kappa = 0.5$, эти диаграммы построены для значений параметров $A = (2, 1.5, 1)$, $\mathbf{r} = (\sqrt{0.5}, \sqrt{0.3}, \sqrt{0.2})$; в) $\kappa = 0.5$, диаграмма построена для значений $A = (2, 1.8, 1.7)$, $\mathbf{r} = (\sqrt{0.3}, \sqrt{0.5}, \sqrt{0.2})$. Диаграммы на рис. 3 соответствуют кривым на рис. 2 и допустимым дугам сферических кривых, изображенным на рис. 1.

Равномерные вращения гиростата по инерции, их устойчивость и бифуркации изучены достаточно подробно (см. работу [13], где также имеются ссылки на исследования других авторов). При $|\boldsymbol{\lambda}|/|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ кривые на рис. 3, a приближаются к бифуркационной диаграмме гиростата, движущегося по инерции (см. рис. 5 в работе [14]). В этом предельном случае диаграмма симметрична относительно прямой $g = 0$, точки P_0, P_1 имеют координаты $(0, \pm|\boldsymbol{\lambda}|) \in \mathbb{R}^2(h, g)$, две симметричные ветви пересекаются в точке $((A^{-1}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})/2, 0) \in \mathbb{R}^2(h, g)$. С другой стороны, диаграмма на рис. 3, z существует лишь при малых значениях параметра \varkappa , при $\varkappa \rightarrow 0$ отмеченные точки пересечения ветвей уходят на бесконечность. Предельная диаграмма соответствует хорошо известному случаю $\boldsymbol{\lambda} = 0$.

Бифуркационные кривые (19) делят плоскость $\mathbb{R}^2(h, g)$ на подобласти с различными типами неособых многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ (см. рис. 3). Анализ особых точек эффективного потенциала $U_g(\boldsymbol{\nu})$ на сфере Пуассона позволяет описать топологию $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ по стандартной схеме. Основные типы $\mathcal{Q}_{h,g}^3$, как и для $\boldsymbol{\lambda} = 0$, гомеоморфны следующим трехмерным компактным ориентируемым многообразиям: *i*) S^3 , *ii*) $S^3 \cup S^3$, *iii*) $S^1 \times S^2$, *iv*) $\mathbb{R}P^3$.

Особые точки плоских кривых (19) найдем из условий $dh/d\sigma = dg/d\sigma = 0$. Дополнительное уравнение

$$2(\mu\varkappa + 2)^2 S_0^2 + [(\mu\varkappa + 1)^2 \sigma S_0 - (2\mu\varkappa + 3)U_0] S_0' = 0,$$

рассматриваемое совместно с (11), (19), позволяет изучить особые точки бифуркационных кривых и найти значения параметров гиростата, при которых меняется структура бифуркационных диаграмм.

4. Центр масс принадлежит главной оси инерции. Пусть вектор \mathbf{r} коллинеарен вектору гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}$ и, кроме того, направлен вдоль одной из главных осей инерции. Вместо неравенств (4) в этом случае положим

$$A_1 > 0, \quad A_2 > A_3 > 0, \quad r_1 > 0, \quad r_2 = r_3 = 0. \quad (21)$$

Тогда равномерным вращениям гиростата соответствуют четыре семейства стационарных решений уравнений (1), зависящие от параметра $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1), 2) \quad & \nu_1 = \pm 1, \quad \omega_1 = \tau, \quad \nu_2 = \nu_3 = \omega_2 = \omega_3 = 0; \\ 3) \quad & \nu_1 = \frac{(\tau\varkappa + 1)r_1}{(A_2 - A_1)\tau^2}, \quad \nu_2 = 1 - \frac{(\tau\varkappa + 1)^2 r_1^2}{(A_2 - A_1)^2 \tau^4}, \quad \nu_3 = 0, \quad \omega_i = \tau\nu_i; \\ 4) \quad & \nu_1 = \frac{(\tau\varkappa + 1)r_1}{(A_3 - A_1)\tau^2}, \quad \nu_3 = 1 - \frac{(\tau\varkappa + 1)^2 r_1^2}{(A_3 - A_1)^2 \tau^4}, \quad \nu_2 = 0, \quad \omega_i = \tau\nu_i. \end{aligned}$$

Бифуркационное множество состоит из дуг четырех плоских кривых, описываемых следующими уравнениями:

$$h = \frac{(g \pm \varkappa r_1)^2}{2A_1} \pm r_1, \quad (22)$$

$$h = \frac{1}{2}A_2\tau^2 + \frac{(\tau\varkappa + 1)(\tau\varkappa + 3)}{2\tau^2}\sigma_2, \quad g = A_2\tau + \frac{(\tau\varkappa + 1)}{\tau^3}\sigma_2, \quad \tau \in \Gamma_2, \quad (23)$$

$$h = \frac{1}{2}A_3\tau^2 + \frac{(\tau\varkappa + 1)(\tau\varkappa + 3)}{2\tau^2}\sigma_3, \quad g = A_3\tau + \frac{(\tau\varkappa + 1)}{\tau^3}\sigma_3, \quad \tau \in \Gamma_3, \quad (24)$$

где

$$\sigma_i = r_1^2(A_1 - A_i)^{-1}, \quad \Gamma_i = \{\tau^4 - (\tau\kappa + 1)r_1^{-2}\sigma_i^2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}, \quad i = 2, 3.$$

Уравнения (22) описывают на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$ две параболы, пересекающиеся в точке с координатами $(h, g) = (A_1\kappa^{-2}/2 + \kappa^2 r_1^2/2/A_1, -A_1\kappa^{-1})$. Вершины парабол расположены в точках P_0, P_1 . Все точки этих двух кривых принадлежат бифуркационному множеству.

Исследуем кривую, заданную уравнением (23). В зависимости от значений параметров множество Γ_2 может состоять из двух (при $\kappa^4 r_1^2 < 16(A_1 - A_2)^2$) или трех (при $\kappa^4 r_1^2 > 16(A_1 - A_2)^2$) сегментов действительной оси. В особых точках (точках возврата) этой кривой переменная $\tau \in \Gamma_2$ и удовлетворяет дополнительному уравнению

$$A_2\tau^4 - (2\tau\kappa + 3)\sigma_2 = 0. \quad (25)$$

Число корней уравнения (25), находящихся внутри различных связных компонент множества Γ_2 , зависит от параметров гиростата. Разделяющие значения этих параметров являются решениями уравнений

$$A_2 r_1^2 \kappa^4 \pm 2(4A_2 - A_1)(A_2 - A_1)r_1 \kappa^2 + (A_2 - A_1)(4A_2 - 3A_1)^2 = 0.$$

Кроме того, на бифуркационных диаграммах существуют точки ветвления, в которых ветви кривой (23) “присоединяются” к параболом (22). В этом случае переменная τ принадлежит границе множества Γ_2 . При фиксированных параметрах диаграмма может содержать либо две, либо четыре точки ветвления рассматриваемого вида. Их координаты (h, g) найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} (A_1 - A_2)g^2 + (A_1 - 2A_2)\varepsilon r_1 \kappa g - A_2 r_1^2 \kappa^2 - \varepsilon r_1 A_1^2 = 0, \\ 2(h - \varepsilon r_1)A_1 - (g + \varepsilon \kappa r_1)^2 = 0, \quad \text{где } \varepsilon = \pm 1. \end{cases}$$

Бифуркационная кривая, заданная уравнением (24), имеет аналогичную структуру.

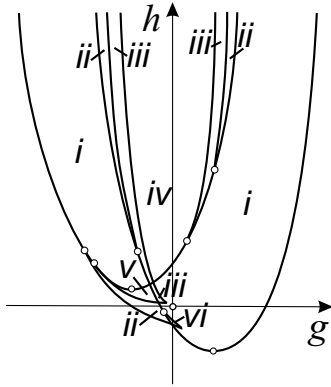


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для случая $r_2 = r_3 = 0$.

В качестве примера рассмотрим диаграмму для значений параметров $A = (2, 1.5, 1)$, $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, $\kappa = 1.5$. Семь ветвей бифуркационных кривых (22)–(24) изображены на рис. 4. Они разделяют плоскость $\mathbb{R}^2(h, g)$ на двенадцать связных подобластей с различной топологией $\mathcal{Q}_{h,g}^3$. Неособые интегральные многообразия $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ в этом случае гомеоморфны следующим 3-многообразиям: *i*) S^3 , *ii*) $S^3 \cup S^3$, *iii*) $S^1 \times S^2$, *iv*) $\mathbb{R}P^3$, *v*) $(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$, *vi*) $S^3 \cup S^3 \cup S^3$. Предпоследнее многообразие *v*) встречается во многих задачах динамики твердого тела – это связная сумма двух экземпляров $S^1 \times S^2$ [14]. Для других значений параметров диаграммы могут иметь более сложный вид.

Основные свойства, отмеченные в данном пункте, позволяют классифицировать бифуркационные диаграммы и полностью исследовать (по предложенной в работе [4] методике) топологию интегральных многообразий гиростата, параметры которого удовлетворяют условиям (3), (21). Кроме того, полученные результаты позволяют делать выводы об устойчивости некоторых классов равномерных вращений тяжелого гиростата вокруг вертикали и находить точные границы областей устойчивости.

1. Харламов П.В. Ги́ростати// Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 37–40.
2. Смейл С. Топология и механика// Успехи матем. наук. – 1972. – 27, вып. 2. – С. 77–121.
3. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 200 с.
4. Каток С.Б. Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела// Успехи матем. наук. – 1972. – 27, вып. 2. – С. 126–132.
5. Гашененко И.Н. Интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела// Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 20–32.
6. Staudé O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt// J. reine und angew. Math. – 1894.– 113, Н. 4. – S. 318–334.
7. Харламов П.В. О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку// Прикл. математика и механика. – 1965. – 29, вып. 2. – С. 373–375.
8. Дрофа В.Н. О перманентных осях движения тяжелого ги́ростата около неподвижной точки// Там же. – 1961. – 25, вып. 5. – С. 941–945.
9. Ковалев А.М. О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку// Математическая физика. – 1968. – Вып. 5. – С. 87–102.
10. Анчев А. О перманентных вращениях тяжелого ги́ростата, имеющего неподвижную точку// Прикл. математика и механика. – 1967. – 31, вып. 1. – С. 49–58.
11. Ковалев А.М., Киселев А.М. О конусе осей равномерного вращения ги́ростата// Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 36–45.
12. Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой// Теоретична и приложна механика. – София, 1974. – 5, № 4. – С. 55–70.
13. Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела// Прикл. математика и механика. – 1974. – 38, вып. 4. – С. 616–627.
14. Oshemkov A.A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations// Advances in Sov. Math. – 1991. – 6. – P. 67–146.