

УДК 539.3

©2003. А.О. Ватульян, И.В. Баранов

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТРЕЩИНЫ В ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Исследованы задачи идентификации одиночной трещины, расположенной в ортотропном упругом слое. Построены граничные интегральные уравнения относительно функции раскрытия трещины. Предложен метод идентификации дефекта, основанный на параметризации трещины конечным числом параметров и минимизации некоторого функционала невязки. Решена задача об идентификации поперечной трещины в ортотропном упругом слое.

Проблема создания эффективных математических моделей дифракции упругих волн на трещинах возникает в первую очередь при разработке ультразвуковых методов обнаружения внутренних трещин с последующим определением их размеров и формы по отраженному полю. Если размеры дефекта соизмеримы или меньше длины волны, то использование надежных математических моделей становится особенно важным в связи с тем, что в этом случае отраженное поле дает "смазанное" из-за дифракции упругих волн изображение, поэтому необходим строгий подход, базирующийся на точном решении соответствующих краевых задач теории упругости. Одним из наиболее эффективных методов исследования является метод сведения к граничным интегральным уравнениям. В рамках модели изотропной теории упругости с помощью этого подхода получены решения широкого класса задач. В работе [1] разработаны методы, позволяющие изучать колебания тел с одиночной трещиной в слое, с системой трещин, расположенных в параллельных плоскостях, и получать решение интегральных уравнений в полуаналитической форме, что не требует больших вычислительных затрат. Для решения прямых задач в случае областей канонической формы имеются разнообразные эффективные методы решения [2, 3]. Отметим, что во многих случаях для построения адекватной модели отражения упругих волн от трещины необходим учет анизотропии, которой обладают многие реальные конструкционные материалы и сплавы, что в значительной степени усложняет их расчет.

Будем рассматривать установившиеся колебания ортотропного упругого тела V , ограниченного поверхностью $S = S_1 \cup S_2$, колебания в котором вызываются нагрузкой p_i , приложенной на части границы $S_{20} \subset S_2$, а часть границы S_1 закреплена. На части границы $S_{21} \subset S_2$ заданы $u_i|_{S_{21}} = g_i$, и $S_{20} \cap S_{21} = \emptyset$. Считаем, что тело V ослаблено трещиной, ограниченной внутренними поверхностями S_0^\pm , на которой компоненты вектора перемещений терпят скачки $\chi_i = u_i|_{S_0^+} - u_i|_{S_0^-}$; примем также, что в процессе колебаний берега трещины не взаимодействуют. В рамках подхода теории дислокации краевая задача для тела с трещиной имеет вид [4, 5]:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i + f_i = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l},$$

$$\sigma_{ij} n_j|_{S_2} = p_i, \text{ причем } p_i \text{ отличны от нуля на } S_{20},$$

$$u_i|_{S_1} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j^\pm|_{S_0^\pm} = 0, \quad (2)$$

а фиктивные массовые силы $f_i = -[c_{ijkl}n_k^+\chi_l\delta(\zeta)]_{,j}$ выражаются через введенные скачки. Обратная задача об идентификации трещины формулируется следующим образом: по заданному полю смещений на части границы S_{21} , свободной от нагрузок, найти поверхность S_0^+ .

На первом этапе исследования строится решение прямой задачи о расчете волновых полей в упругом теле, ослабленном трещиной известной конфигурации. Для этого используются основные идеи теории потенциала, позволяющие свести исходную краевую задачу к системе интегральных уравнений относительно введенных скачков.

На основании теоремы взаимности для анизотропного тела поле упругих смещений внутри V может быть найдено при помощи формул Сомильяны [6]:

$$u_m(\xi) = \int_S \sigma_{ij}n_j U_i^{(m)}(x, \xi) dS_x - \int_S \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_j u_i dS_x + \int_V U_i^{(m)}(x, \xi) f_i dV_x, \quad \xi \in V, \quad (3)$$

где $U_i^{(m)}(x, \xi)$, $\sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)$ – соответственно фундаментальные и сингулярные решения для ортотропной среды; их явные представления построить нельзя, однако возможно построить их интегральные представления в виде однократных интегралов [7].

Учитывая выражения для f_i и выбирая в (3) в качестве $U_i^{(m)}(x, \xi)$ матричную функцию Грина для оператора ортотропной теории упругости (1) с граничными условиями

$$U_i^{(m)}|_{S_1} = 0, \quad \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_j|_{S_2} = 0, \quad (4)$$

получим следующую формулу для расчета полей смещений внутри V :

$$u_m(\xi) = u_m(\xi) + \int_{S_0^+} \sigma_{kl}^{(m)}(x, \xi) \chi_l n_k dS_x, \quad (5)$$

где $u_m(\xi) = \int_{S_{20}} p_i U_i^{(m)}(x, \xi) dS_x$ – поле в среде без дефекта (эталонное поле).

Для определения функций раскрытия обычным в теории трещин способом формулируется система граничных уравнений путем вычисления компонент вектора напряжений на S_0^+ и выполнения граничного условия (2):

$$K_\chi = \int_{S_0^+} k_{jl}(x, y) \chi_l(x) dS_x = F_j(y), \quad y \in S_0^+. \quad (6)$$

Ядра $k_{jl}(x, y)$ в (6) являются гиперсингулярными и соответствующие интегралы понимаются в смысле конечного значения по Адамару [7], функции $F_j(y)$ выражаются через эталонное поле смещений. На основании (5), (6) и решения прямой задачи на втором этапе исследования формулируется система операторных уравнений относительно $\chi_l(x)$ и S_0^+ в обратной задаче:

$$\int_{S_0^+} k_{ml}^0(x, \xi) \chi_l dS_x = g_m^0(\xi) = g_m(\xi) - u_m(\xi), \quad \xi \in S_{21},$$

$$\int_{S_0^+} k_{jl}(x, y) \chi_l(x) dS_x = F_j(y), \quad y \in S_0^+, \quad (7)$$

причем $k_{ml}^0(x, \xi) = \sigma_{kl}^{(m)}(x, \xi) n_k$.

Задача нахождения S_0^+ из системы (7) является нелинейной и неустойчивой по отношению к малым возмущениям заданных функций $g_j(x)$. Способ нахождения S_0^+ в настоящей работе основан на предварительной параметризации поверхности при помощи введения конечного числа параметров c_k ; в частности, для плоской эллиптической трещины таковыми являются восемь параметров (три координаты центра, три компоненты вектора нормали и полуоси эллипса). Способ нахождения этих параметров основан на дискретном представлении интегрального оператора (6) через узловые значения функций раскрытия и определении параметров c_k из условия минимума некоторого функционала невязки $\Phi(c_k)$, который является неквадратичным.

В качестве иллюстрации предлагаемого подхода рассмотрим ортотропный слой толщины H с жестко зашеченной нижней гранью и поперечной трещиной, находящейся на оси Ox_3 , с вершинами a, b ($0 < a < b < H$). Система координат совпадает с осями упругой симметрии материала. Колебания в слое вызываются вертикальной сосредоточенной силой, приложенной к его верхней грани. Из компонент вектора смещений отличны от нуля $u_1 = u_1(x_1, x_3)$, $u_3 = u_3(x_1, x_3)$, а уравнения движения и граничные условия имеют вид

$$c_{11}u_{1,11} + c_{55}u_{1,33} + (c_{13} + c_{55})u_{3,13} + \rho\omega^2u_1 = f_1, \quad (8)$$

$$c_{55}u_{3,11} + c_{33}u_{3,33} + (c_{13} + c_{55})u_{1,13} + \rho\omega^2u_3 = f_3,$$

$$u_1(x_1, 0) = u_3(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{33}|_{x_3=H} = -P\delta(x_1 - L), \quad \sigma_{13}|_{x_3=H} = 0, \quad (9)$$

где c_{ij} – упругие постоянные.

Представление волнового поля в слое находится при помощи преобразования Фурье по координате x_1 , применяемого к (8), (9) и решения получающейся краевой задачи. Используя соответствующие граничные условия, получим систему граничных интегральных уравнений относительно скачков χ_j , которая в данном случае распадается на два независимых уравнения

$$\int_a^b \chi_j(\xi_3) k_{jj}(\xi_3, x_3) d\xi_3 = F_j(x_3), \quad x_3 \in [a, b], \quad (10)$$

причем их ядра представимы в виде

$$k_{jj}(\xi_3, x_3) = \int_{\sigma} \frac{D_{jj}(\alpha_1, \xi_3, x_3)}{D(\alpha_1)} d\alpha_1,$$

где контур σ выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения [5], а D_{jj}, D – известные функции своих аргументов, которые из-за громоздкости не приводятся.

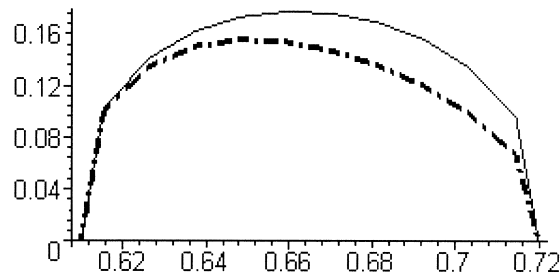
Решение интегральных уравнений вида (10) производится на основании метода коллокаций [8] и для случая антиплоской задачи реализовано в [9].

Обратная задача состоит в отыскании вершин трещины a и b по известным смещениям u_k^{0m} , заданным в точках x^m на части слоя S_{21} , и сводится к совместному решению системы граничных интегральных уравнений (10) и минимизации функционала невязки

$$\Phi(a, b) = \sum_m |u_k^m|_{S_{21}} - u_k^{0m}|^2.$$

Граничные интегральные уравнения были сведены к системе нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров трещины a, b и узловых значений χ_k^n . Построен итерационный процесс определения значений a и b . Для выбора начального приближения был применен поиск на равномерной сетке в треугольнике $0 \leq a < b < H$.

В качестве примера расчетов ниже приведены результаты решения модельной задачи для слоя из аустенитной стали с упругими постоянными $c_{11} = 26, 27; c_{13} = 14, 5; c_{33} = 21, 6; c_{55} = 12, 9 (\times 10^{10} \text{ Н/м}^2)$, поперечной трещиной, имеющей координаты вершин $\theta_0 = a/H = 0, 61; \theta_1 = b/H = 0, 72$ и параметрами $L_0 = L/H = -0, 5$, на частоте $\kappa = H\omega\sqrt{\rho/c_{33}} = 2, 2$, где имеется две распространяющихся волны в слое.



На рисунке приведены графики вещественных частей функций раскрытия $\chi_1(\theta/H)$ (сплошная) и $\chi_3(\theta/H)$ (штрихпунктирная) линии. Отметим достаточную устойчивость нахождения параметров трещины, что иллюстрирует таблица:

Номер итерации	θ_0	θ_1	Относительная погрешность идентификации вершин
0	0,500	0,666	100 %
1	0,562	0,677	43,2 %
2	0,559	0,682	45,5 %
3	0,579	0,690	28,1 %
4	0,592	0,707	16,3 %
5	0,590	0,702	18,2 %
6	0,592	0,705	16,1 %
7	0,623	0,732	12,3 %
8	0,616	0,725	5,2 %
9	0,608	0,718	1,9 %
10	0,609	0,72	0,2 %

Анализ результатов численных экспериментов по предлагаемой методике показал, что в области низких и средних частот для определения размера заглубленной трещины с погрешностью порядка одного процента достаточно 5-8 итераций метода, а для идентификации координат ее концов требуется в среднем 4-12 итераций. Следует отметить, что при уменьшении размера трещины, функционал невязки становится сильно "овражистым" в направлении, близком к $a = b$, поэтому следует применять специальные методы минимизации. Для приповерхностной трещины с уменьшением частоты колебаний работоспособность метода ухудшается, и через некоторое количество итераций наблюдается медленное "подтягивание" вершин a и b к точным значениям. При небольшом количестве точек зондирования x^m иногда возможно появление "фантомного" (зеркального) изображения трещины, при этом ее размер восстанавливается правильно. Для исключения "фантомов" необходимо использовать либо большее число точек регистрации поля, либо частотное зондирование.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 02-01-01124, 00-15-96087).

1. *Бабешко В.А., Розлин С.И., Хуанг В., Бужан В.В.* К проблеме дефектоскопии сварных швов // Докл. АН. – 1994. – **337**, № 6. – С. 732-736.
2. *Партон В.З., Борисковский В.Г.* Динамика хрупкого разрушения. – М.: Машиностроение, 1988. – 240 с.
3. *Vostrem A.* Acoustic scattering by a sound-hard rectangle // J. Acoust. Soc Am. –1991. – 90 (6). – P. 3344-3347.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – Т.7. – 246 с.
5. *Ворович И.И., Бабешко В.В.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
6. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
7. *Ватульян А.О., Гусева И.А., Сюнякова И.М.* О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применения // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. науки. - 1989. - № 2. – С. 81-85.
8. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М.: Наука, 1985. – 253 с.
9. *Ватульян А.О., Баранов И.В.* SH-колебания составного ортотропного слоя с трещиной на границе раздела. Интегро-дифференциальные операторы и их приложения //Межвуз. сб. науч. тр. – Ростов-на-Дону, 2001. – Вып. 5. – 128 с.