ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2003. Вып. 33

УДК 531.38

 С.Н.Судаков

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ С ВЯЗКО-УПРУГИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Рассмотрена задача о движении по инерции вокруг центра масс абсолютно твердой эллипсоидальной оболочки, целиком заполненной несжимаемой вязко-упругой средой. Предполагается, что на вязко-упругую среду наложены связи, допускающие только однородные деформации. Тогда движение описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдены стационарные решения уравнений движения, описывающие равномерные вращения эллипсоида и заполняющей его среды вокруг главной оси. В линейной постановке исследовано поведение решения уравнений движения в малой окрестности стационарного решения.

Как известно [1,2], период движения полюсов вращения Земли по ее поверхности, вычисленный в предположении, что Земля является абсолютно твердым телом, называется периодом Эйлера и составляет 305 суток. Наблюдаемый в действительности период движения полюсов, именуемый периодом Чендлера, составляет примерно 427 суток, что существенно отличается от периода Эйлера. Для объяснения такого расхождения между теорией и наблюдениями Хоком (S.S.Hough) было предложено учитывать в теоретических исследованиях упругость Земли, что устранило указанное противоречие. Однако, использование уравнений теории упругости при исследовании вращения Земли оказывается довольно сложной задачей. В то же время для решения многих вопросов желательно иметь как можно более простую модель вращения Земли, обладающую периодом Чендлера. С этой целью в настоящей работе рассмотрена задача о движении по инерции вокруг центра масс абсолютно твердой эллипсоидальной оболочки, целиком заполненной вязко-упругой средой Кельвина-Фойгта [3]. Кроме того предполагается, что на частицы вязко-упругой среды наложены геометрические связи, допускающие только однородные деформации ее внутри эллипсоида. Благодаря этому предположению, конфигурация рассматриваемой системы будет описываться шестью обобщенными координатами и ее движение можно исследовать методами аналитической механики.

Итак, рассмотрим механическую систему, состоящую из абсолютно твердой невесомой эллипсоидальной оболочки с центром O, целиком заполненной несжимаемой вязко-упругой средой Кельвина–Фойгта постоянной плотности ρ. Обозначим через $Ox_1x_2x_3$ жестко связанную с оболочкой декартову систему координат, в которой поверхность оболочки задается уравнением

$$x_1^2/c_1^2 + x_2^2/c_2^2 + x_3^2/c_3^2 = 1, \tag{1}$$

где c_1, c_2, c_3 — длины главных полуосей оболочки. Через $O\xi_1\xi_2\xi_3$ обозначим неподвижную декартову систему координат. Положение подвижных осей $Ox_1x_2x_3$ относительно неподвижных $O\xi_1\xi_2\xi_3$ будем определять углами Эйлера φ, ψ, θ, где угол нутации θ определен как угол между осями Ox_3 и $O\xi_3$; угол прецесси ψ — это угол между осью $O\xi_1$ и линией узлов.

Описание деформаций вязко-упругой среды. Будем предполагать, что на заполняющую оболочку вязко-упругую среду наложены связи, допускающие только однородные деформации, то есть деформации при которых компоненты тензора деформаций не зависят от координат x_1, x_2, x_3.

Построить класс перемещений с однородными деформациями для среды, находящейся в эллипсоидальной оболочке, можно с помощью трех последовательных отображений:

1) деформация заполняющей оболочку среды в шар

$$x_i' = x_{i0}R/c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $R = \sqrt[3]{c_1c_2c_3}$; x_{10}, x_{20}, x_{30} — координаты частиц среды до деформации; x_1', x_2', x_3' — координаты частиц среды после деформации;

2) поворот шара вокруг его центра O

$$x_i'' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j', \quad i = 1, 2, 3,$$

где a_{ij} — компоненты матрицы поворота;

3) деформация шара в область, ограниченную эллипсоидальной оболочкой

$$x_i = x_i''c_i/R, \quad i = 1, 2, 3.$$

Поворот шара будем задавать углами Крылова α, β, γ. Компоненты a_{ij} матрицы поворота A выражаются через углы Крылова следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

В результате получается следующее отображение

$$x_i = c_i \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_{j0}/c_j\,, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

задающее координаты x_1, x_2, x_3 частицы среды как функции от α, β, γ и начальных значений ее координат x_{10}, x_{20}, x_{30}.

Кинетическая энергия системы. Величины $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \theta$ полностью описывают конфигурацию рассматриваемой механической системы и могут быть приняты за ее обобщенные координаты. Используя результаты работы [4], запишем выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{m}{10} \sum_{(123)} [(c_2^2 + c_3^2)\omega_1^{o2} + (c_2^2 + c_3^2 + A_1)\omega_1^2 + 4c_2c_3\omega_1^o\omega_1],$$

где символ (123) означает, что остальные члены суммы получаются циклической перестановкой индексов; $m = \frac{4}{3}\pi\rho c_1c_2c_3$ — масса вязко-упругой среды; $A_1 = 5A_1^o/m \quad (123)$; A_1^o, A_2^o, A_3^o — главные моменты инерции эллипсоидальной оболочки; $\omega_1^o, \omega_2^o, \omega_3^0$ — проекции на подвижные оси $Ox_1x_2x_3$ относительной угловой скорости некоторого твердого тела, положение которого относительно осей $Ox_1x_2x_3$ определяется углами Крылова α, β, γ;

$$\begin{aligned} \omega_1^o &= \dot\alpha + \dot\gamma \sin\beta, \\ \omega_2^o &= -\dot\gamma \cos\beta \sin\alpha + \dot\beta \cos\alpha, \\ \omega_3^o &= \dot\gamma \cos\beta \cos\alpha + \dot\beta \sin\alpha; \end{aligned} \tag{3}$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции на оси $Ox_1x_2x_3$ абсолютной угловой скорости эллипсоидальной оболочки;

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \\ \omega_2 &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ \omega_3 &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi. \end{aligned} \tag{4}$$

Точки над символами означают дифференцирование по времени t.

Потенциальная энергия упругих деформаций. Проекции вектора перемещений точек вязко-упругой среды относительно осей $Ox_1x_2x_3$ на эти же оси определяются соотношениями $u_i = x_i - x_{i0}$, $i = 1, 2, 3$, где x_i даются выражениями (2). Используя для вычисления компонент тензора деформаций ε_{11}, $\varepsilon_{12}/2$, $\varepsilon_{21}/2$ (123), где $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ (123), формулы [5]

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{i0}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_{i0}}\Big)^2, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_{20}} + \frac{\partial u_2}{\partial x_{10}} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_{10}} \frac{\partial u_j}{\partial x_{20}} \quad (123),$$

находим

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\Big(-1 + a_{11}^2 + \frac{c_2^2}{c_1^2}\, a_{21}^2 + \frac{c_3^2}{c_1^2}\, a_{31}^2\Big) \quad (123),$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{c_1}{c_2}\, a_{11} a_{12} + \frac{c_2}{c_1}\, a_{21} a_{22} + \frac{c_3^2}{c_1 c_2}\, a_{31} a_{32} \quad (123).$$

Учитывая предположение о несжимаемости среды, зададим потенциальную энергию упругих деформаций выражением

$$\Pi = QG[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + \frac{1}{2}\, (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)],$$

где $Q = \frac{4}{3}\, \pi c_1 c_2 c_3$ — объем эллипсоидальной оболочки; $G = \frac{E}{2(1+\eta)}$; E — модуль Юнга вязко-упругой среды; η — коэффициент Пуассона.

Диссипативная функция Рэлея. Будем считать, что динамическая вязкость среды является следующей функцией координат x_1, x_2, x_3:

$$\mu = \mu_0 (1 - x_1^2/c_1^2 - x_2^2/c_2^2 - x_3^2/c_3^2),$$

где μ_0 — динамическая вязкость среды в центре эллипсоида (1). Тогда диссипативная функция Рэлея будет иметь вид [6]

$$\mathcal{F} = \frac{1}{5}\, \mu_0 Q \sum_{(123)} \Big(\frac{c_3^2 - c_2^2}{c_3 c_2}\Big)^2 \omega_1^{o2}.$$

Уравнения движения Лагранжа 2-рода. Вводя функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, запишем уравнения движения в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha\beta\gamma\varphi\psi\theta),$$

где символ $(\alpha\beta\gamma\varphi\psi\theta)$ означает, что остальные уравнения получаются циклической перестановкой взятых в скобки символов; $Q_\alpha = Q_\beta = Q_\gamma = 0$; обобщенные силы $Q_\varphi, Q_\psi, Q_\theta$ в общем случае могут быть отличны от нуля, однако в настоящей работе мы будем считать их равными нулю. Учитывая известные соотношения [4]

$$\Omega_1 = \frac{c_3^2 + c_2^2}{2c_3c_2}\ \omega_1^o + \omega_1 \quad (123), \tag{5}$$

где $(2\Omega_1, 2\Omega_2, 2\Omega_3)$ — проекции вихря абсолютной скорости среды на оси $Ox_1x_2x_3$, запишем уравнения Лагранжа в развернутом виде

$$\frac{2}{5}\ m(c_2c_3\dot\Omega_1 + c_3c_1\Omega_2\omega_3^o - c_1c_2\Omega_3\omega_2^o) + \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha} + \frac{2}{5}\ \mu_0 Q\Big(\frac{c_3^2 - c_2^2}{c_3c_2}\Big)^2\omega_1^o = 0,$$

$$\frac{2}{5}\ m(c_3c_1\dot\Omega_2\cos\alpha + c_1c_2\dot\Omega_3\sin\alpha - c_2c_3\Omega_1\dot\gamma\cos\beta - c_3c_1\Omega_2\omega_1^o\sin\alpha + c_1c_2\Omega_3\omega_1^o\cos\alpha) +$$

$$+\frac{\partial\Pi}{\partial\beta} + \frac{2}{5}\ \mu_0 Q\Big[\Big(\frac{c_1^2 - c_3^2}{c_1c_3}\Big)^2\omega_2^o\cos\alpha + \Big(\frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2c_1}\Big)^2\omega_3^o\sin\alpha\Big] = 0,$$

$$\frac{2}{5}\ m[c_2c_3\dot\Omega_1\sin\beta - c_3c_1\dot\Omega_2\cos\beta\sin\alpha + c_1c_2\dot\Omega_3\cos\beta\cos\alpha +$$

$$+c_2c_3\Omega_1\dot\beta\cos\beta + c_3c_1\Omega_2(\dot\beta\sin\beta\sin\alpha - \dot\alpha\cos\beta\cos\alpha) -$$

$$-c_1c_2\Omega_3(\dot\beta\sin\beta\cos\alpha + \dot\alpha\cos\beta\sin\alpha)] + \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma} +$$

$$+\frac{2}{5}\ \mu_0 Q\Big[\Big(\frac{c_3^2 - c_2^2}{c_3c_2}\Big)^2\omega_1^o\sin\beta - \Big(\frac{c_1^2 - c_3^2}{c_1c_3}\Big)^2\omega_2^o\cos\beta\sin\alpha + \Big(\frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2c_1}\Big)^2\omega_3^o\cos\beta\cos\alpha\Big] = 0,$$

$$\dot X_3 - X_1\omega_2 + X_2\omega_1 = 0, \tag{6}$$

$$\dot X_1\sin\theta\sin\varphi + \dot X_2\sin\theta\cos\varphi + \dot X_3\cos\theta + X_1(\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi) +$$

$$+X_2(\dot\theta\cos\theta\cos\varphi - \dot\varphi\sin\theta\sin\varphi) - X_3\dot\theta\sin\theta = 0,$$

$$\dot X_1\cos\varphi - \dot X_2\sin\varphi - X_1\omega_3\sin\varphi - X_2\omega_3\cos\varphi + X_3\dot\psi\sin\theta = 0,$$

где $X_1 = (c_2^2 + c_3^2 + A_1)\omega_1 + 2c_2c_3\omega_1^o \quad (123)$, а $\omega_i^o, \omega_i, \Omega_i,$ выражены через $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \theta$ и их производные по формулам (3)–(5).

Переход к уравнениям в неголономных переменных. Обозначим левые части уравнений (6) через $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, f_\varphi, f_\psi, f_\theta$ и составим из них следующие линейные комбинации:

$$f_\alpha = 0, \quad f_\alpha\sin\alpha\sin\beta + f_\beta\cos\beta\cos\alpha - f_\gamma\sin\alpha = 0,$$

$$-f_\alpha\sin\beta\cos\alpha + f_\beta\cos\beta\sin\alpha + f_\gamma\cos\alpha = 0,$$

$$f_\psi\sin\varphi - f_\varphi\sin\varphi\cos\theta + f_\theta\cos\varphi\sin\theta = 0,$$

$$f_\psi \cos\varphi - f_\varphi \cos\varphi \cos\theta - f_\theta \sin\varphi \sin\theta = 0, \quad f_\varphi = 0.$$

Используя равенства (3)–(5), приводим эти уравнения к виду

$$\dot\Omega_1 = (1-\varepsilon_3)\omega_3\Omega_2 - (1+\varepsilon_2)\omega_2\Omega_3 + (\varepsilon_2+\varepsilon_3)\Omega_2\Omega_3 - \sigma_1(\Omega_1-\omega_1) + \Pi_1 \quad (123), \tag{7}$$

$$A_1^*\dot\omega_1 + 4\frac{c_3^2c_2^2}{c_3^2+c_2^2}\,\dot\Omega_1 = (A_2^*-A_3^*)\omega_2\omega_3 + 4\frac{c_1^2c_3^2}{c_1^2+c_3^2}\,\omega_3\Omega_2 - 4\frac{c_1^2c_2^2}{c_1^2+c_2^2}\,\omega_2\Omega_3 \quad (123), \tag{8}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{c_3^2-c_2^2}{c_3^2+c_2^2}, \quad A_1^* = A_1 + \frac{(c_3^2-c_2^2)^2}{c_3^2+c_2^2}, \quad \sigma_1 = 2\nu_0\,\frac{c_3^2+c_2^2}{c_3^2c_2^2}\,\varepsilon_1^2 \quad (123), \quad \nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho},$$

$$\Pi_1 = -\frac{5}{2mc_2c_3}\,\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}, \quad \Pi_2 = -\frac{5}{2mc_3c_1}\Big(\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}\,\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta + \frac{\partial\Pi}{\partial\beta}\,\cos\alpha - \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\Big),$$

$$\Pi_3 = -\frac{5}{2mc_1c_2}\Big(-\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}\,\cos\alpha\mathrm{tg}\beta + \frac{\partial\Pi}{\partial\beta}\,\sin\alpha + \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\Big).$$

Будем считать величины α,β,γ малыми. Тогда для $\dfrac{\partial\Pi}{\partial\alpha}, \dfrac{\partial\Pi}{\partial\beta}, \dfrac{\partial\Pi}{\partial\gamma}$ можно использовать их линеаризованные выражения

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha} = GQ\Big(\frac{c_3^2-c_2^2}{c_3c_2}\Big)^2\alpha, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\beta} = GQ\Big(\frac{c_1^2-c_3^2}{c_1c_3}\Big)^2\beta, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma} = GQ\Big(\frac{c_2^2-c_1^2}{c_2c_1}\Big)^2\gamma.$$

Уравнения (8) с учетом (7) приводятся к виду

$$\dot\omega_1 = a_1\omega_2\omega_3 + p_1\omega_2\Omega_3 - q_1\omega_3\Omega_2 + b_1\Omega_2\Omega_3 + \sigma_1^*(\Omega_1-\omega_1) - r_1\Pi_1 \quad (123), \tag{9}$$

где

$$a_1 = \frac{A_2^*-A_3^*}{A_1^*}, \quad p_1 = \frac{4c_1^2c_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2}{(c_1^2+c_2^2)A_1^*}, \quad q_1 = \frac{4c_1^2c_3^2\varepsilon_1\varepsilon_3}{(c_1^2+c_3^2)A_1^*}, \quad r_1 = \frac{4c_3^2c_2^2}{(c_3^2+c_2^2)A_1^*},$$

$$b_1 = \frac{8c_1^2c_2^2c_3^2\varepsilon_1}{(c_1^2+c_2^2)(c_1^2+c_3^2)A_1^*}, \quad \sigma_1^* = \frac{8\nu_0\varepsilon_1^2}{A_1^*} \quad (123).$$

Разрешая уравнения (3) относительно $\dot\alpha,\dot\beta,\dot\gamma$ и используя соотношения (5), будем иметь

$$\dot\alpha = \frac{2c_2c_3}{c_2^2+c_3^2}\,(\Omega_1-\omega_1) + \frac{2c_3c_1}{c_3^2+c_1^2}\,(\Omega_2-\omega_2)\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta - \frac{2c_1c_2}{c_1^2+c_2^2}\,(\Omega_3-\omega_3)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta,$$

$$\dot\beta = \frac{2c_3c_1}{c_3^2+c_1^2}(\Omega_2-\omega_2)\cos\alpha + \frac{2c_1c_2}{c_1^2+c_2^2}(\Omega_3-\omega_3)\sin\alpha, \tag{10}$$

$$\dot\gamma = -\frac{2c_3c_1}{c_3^2+c_1^2}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\,(\Omega_2-\omega_2) + \frac{2c_1c_2}{c_1^2+c_2^2}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\,(\Omega_3-\omega_3).$$

Уравнения (7),(9),(10),(4) полностью описывают движение рассматриваемой механической системы. Уравнения (7),(9),(10) решаются независимо от уравнений (4). Система (7),(9),(10) имеет частное решение

$$\Omega_3 = \omega_3 = \omega_0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \omega_1 = \omega_2 = \alpha = \beta = \gamma = 0, \tag{11}$$

которому соответствуют равномерные вращения эллипсоида и заполняющей его вязкоупругой среды вокруг третьей главной оси с угловой скоростью ω_0.

Исследуем в линейной постановке движение рассматриваемой механической системы в малой окрестности равномерных вращений, описываемых стационарным решением (11). Для этого введем новые переменные Ω_3' и ω_3' по формулам

$$\Omega_3 = \omega_0 + \Omega_3', \quad \omega_3 = \omega_0 + \omega_3'. \tag{12}$$

Подставим выражения (12) в систему (7),(9),(10) и считая переменные $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3'$, ω_1, ω_2, ω_3', α, β, γ малыми, выполним по ним линеаризацию. В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{y}, \tag{13}$$

$$\begin{gathered}
\dot{\Omega}_3' = -\sigma_3(\Omega_3' - \omega_3') - \frac{5G(c_2^2 - c_1^2)^2}{2\rho c_1^3 c_2^3}\ \gamma, \\
\dot{\omega}_3' = \sigma_3^*(\Omega_3' - \omega_3') + \frac{10G\varepsilon_3^2}{\rho c_1 c_2 A_3^*}\ (c_2^2 + c_1^2)\gamma, \\
\dot{\gamma} = \frac{2c_1 c_2}{c_1^2 + c_2^2}\ (\Omega_3' - \omega_3'),
\end{gathered} \tag{14}$$

где $\mathbf{y} = (\Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2, \alpha, \beta)$; D — кваратная матрица с постоянными коэффициентами d_{ij}, которые имеют вид

$$d_{11} = -2\nu_0 \frac{c_3^2 + c_2^2}{c_3^2 c_2^2}\ \varepsilon_1^2, \quad d_{12} = \frac{2c_1^2}{c_1^2 + c_3^2}\ \omega_0, \quad d_{13} = -d_{11}, \quad d_{14} = d_{12},$$

$$d_{15} = -\frac{5G(c_3^2 - c_2^2)^2}{2\rho c_2^3 c_3^3}, \quad d_{16} = 0,$$

$$d_{21} = -\frac{2c_2^2}{c_2^2 + c_3^2}\ \omega_0, \quad d_{22} = -2\nu_0\ \frac{c_1^2 + c_3^2}{c_1^2 c_3^2}\ \varepsilon_2^2,$$

$$d_{23} = -d_{21}, \quad d_{24} = -d_{22}, \quad d_{25} = 0, \quad d_{26} = -\frac{5G(c_1^2 - c_3^2)^2}{2\rho c_3^3 c_1^3},$$

$$d_{31} = 8\nu_0 \varepsilon_1^2 / A_1^*, \quad d_{32} = \frac{4c_1^2 c_3^2 \varepsilon_1}{(c_1^2 + c_3^2) A_1^*}\ \omega_0, \quad d_{33} = -d_{31}, \quad d_{34} = (a_1 + p_1)\omega_0,$$

$$d_{35} = 10 \frac{G\varepsilon_1^2 (c_3^2 + c_2^2)}{\rho c_2 c_3 A_1^*}, \quad d_{36} = 0,$$

$$d_{41} = \frac{4c_2^2 c_3^2 \varepsilon_2}{(c_2^2 + c_3^2) A_2^*}\ \omega_0, \quad d_{42} = 8\nu_0 \varepsilon_2^2 / A_2^*, \quad d_{43} = (a_2 - q_2)\omega_0, \quad d_{44} = -d_{42}, \quad d_{45} = 0,$$

$$d_{46} = 10 \frac{G\varepsilon_2^2 (c_1^2 + c_3^2)}{\rho c_1 c_3 A_2^*},$$

$$d_{51} = \frac{2c_2 c_3}{c_2^2 + c_3^2}, \quad d_{53} = -d_{51}, \quad d_{52} = d_{54} = d_{55} = d_{56} = 0,$$

$$d_{62} = \frac{2c_3c_1}{c_3^2 + c_1^2}, \quad d_{64} = -d_{62}, \quad d_{61} = d_{63} = d_{65} = d_{66} = 0.$$

Системы линейных дифференциальных уравнений (13) и (14) решаются независимо друг от друга. Введем безразмерное время $\tau = t/T$, где T — размерность времени, и запишем систему (13) в виде

$$\frac{d\mathbf{y}'}{d\tau} = D'\mathbf{y}', \tag{15}$$

где $\mathbf{y}' = (\Omega_1', \Omega_2', \omega_1', \omega_2', \alpha, \beta)$; $\quad \Omega_i' = \Omega_i T, \quad \omega_i' = \omega_i T\,,$ $\quad$ i=1,2. Элементы матрицы D' получаются из элементов матрицы D по формулам

$$d_{ij}' = d_{ij}T, \quad i,j = 1,...,4;$$

$$d_{ij}' = d_{ij}T^2, \quad i = 1,...,4, \quad j = 5,6;$$

$$d_{ij}' = d_{ij}, \quad i = 5,6, \quad j = 1,...,6.$$

Общее решение системы (15) имеет вид

$$\mathbf{y}' = \sum_{j=1}^{6} h_j \mathbf{l}_j e^{\lambda_j \tau}\,, \tag{16}$$

где λ_j — собственные значения матрицы D'; $\mathbf{l}_j$ — собственные векторы матрицы D', соответствующие собственным значениям λ_j; h_j — произвольные постоянные.

Используя численные методы, вычислим собственные значения $\lambda_j, \quad j = 1,...,6$ в случае

$$T = 24 \cdot 60^2\,\text{с}\,, \quad \omega_0 = 2\pi/T, \quad \rho = 5518\,\text{кг/м}^3, \quad \eta = 0,5\,, \quad E = 2,44 \cdot 10^{11}\text{н/м}^2,$$

$$C_1 = C_2 = 6378160\,\text{м}, \quad C_3 = 6356777\,\text{м}, \quad \delta C = 500\,\text{м}, \tag{17}$$

$$c_1 = C_1 + \delta C; \quad c_2 = C_2 - \delta C, \quad c_3 = \frac{C_1C_2C_3}{c_1c_2}\,,$$

$$\mu_0 = 10^{11}\,\text{м}^5/(\text{кг}\cdot\text{с}).$$

Выбранные значения параметров (17) соответствуют угловой скорости, размерам и массовым характеристикам планеты Земля. Величина вязкости μ_0 имеет порядок, указанный в работах [7,8]. Модуль Юнга E выбран несколько больше чем в работах [1,2]. Для сравнения в работе [1] $E = 2,2 \cdot 9.8 \cdot 10^{10}$ н/м^2.

Для указанных значений параметров с помощью пакета MATLAB были найдены следующие собственные значения матрицы D'

$$\lambda_{1,2} = -0,077183158282 \pm 200,582696409953\,i,$$

$$\lambda_{3,4} = -0,077292784805 \pm 194,130595322961\,i, \tag{18}$$

$$\lambda_{5,6} = -0,000000443398 \pm 0,014701370499\,i.$$

Из равенств (18) следует, что первые две пары слагаемых в решении (16) описывают быстро затухающие высокочастотные колебания с периодами

$$T_1 = 2\pi/\text{Im}\,\lambda_1 = 0,03132\,\text{суток}, \quad T_2 = 2\pi/\text{Im}\,\lambda_3 = 0,03237\,\text{суток}.$$

Третья пара слагаемых в решении (16) описывает колебания с периодом

$$T_3 = 2\pi/\mathrm{Im}\,\lambda_5 = 427,3877\,\text{суток},$$

который совпадает с периодом Чендлера.

Заключение. Движение по инерции вокруг центра масс модели абсолютно твердой эллипсоидальной оболочки с вязко-упругим заполнением описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющей стационарное решение, соответствующее равномерным вращениям эллипсоида и его вязко-упругого заполнения вокруг наименьшей главной оси. В окрестности этого равномерного вращения возможны малые колебания, при которых вектор абсолютной угловой скорости будет совершать обход вокруг меньшей главной оси эллипсоида за период времени T_3. В случае, когда массовые характеристики и размеры модели выбраны равными массовым характеристикам и размерам Земли, можно легко подобрать модуль Юнга вязко-упругого заполнения таким, что период T_3 будет равен периоду Чендлера. Интересно отметить, что в рассмотренной модели при деформациях вязко-упругого заполнения не происходит изменения моментов инерции.

Рассмотренная модель может быть использована при решении различных вопросов, связанных с вращением Земли и планет.

1. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels.– New York: Johnson Reprint Corporation, 1965.– 966 с.
2. *Жуковский Н.Е.* Геометрическая интерпретация теории движения полюсов вращения Земли по ее поверхности // Собрание сочинений.– Т.1.– М.– Л.: Гостехиздат, 1948.– С.419–440.
3. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды.–М.: Физматгиз, 1962.– 432 с.
4. *Судаков С.Н.* Канонические уравнения движения твердого тела с вихревым заполнением // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11.– С. 67 – 71.
5. *Новожилов В.В.* Теория упругости.– М.: Судпромгиз, 1958.– 372 с.
6. *Судаков С.Н.* Об уравнениях движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной жидкостью переменной вязкости // Труды ИПММ НАН Украины.– 2000.– **5**.– С. 141 – 144.
7. *Бражкин В.В.* Универсальный рост вязкости металлических расплавов в мегабарном диапазоне давлений:стеклообразное состояние внутреннего ядра Земли //Усп. физических наук.– 2000.– **170**, N 5.– С. 535 – 551.
8. *Судаков С.Н.* Движение тела с жидкостью переменной вязкости в поле неповижного притягивающего центра // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31.– С. 111 – 118.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
techmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 01.11.02