УДК 531.38

©2003. **Е.К. Узбек**

О ПОЛУРЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЯХ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Исследованы условия существования полурегулярных прецессий первого типа в задаче о движении гиростата, описываемом дифференциальными уравнениями Г.Кирхгофа. При определенных условиях на параметры этой задачи проинтегрированы уравнения движения.

В динамике твердого тела найдены многочисленные классы движений [1, 2], среди которых важное место занимают прецессионные движения. Эти движения характеризуются тем свойством, что в течение всего времени движения постоянен угол между двумя осями, одна из которых неизменно связана с гиростатом, а другая фиксирована в неподвижном пространстве. В качестве последней, как правило, выступает ось симметрии силового поля. Обзор основных результатов, относящихся к прецессионным движениям гиростата, дан в работах [3, 4]. Рассмотренные в [5] прецессионные движения представляют собой новый класс прецессий, поскольку они характеризуются свойством: неизменно связанная с гиростатом ось может занимать произвольное положение в некоторой плоскости.

В данной статье в постановке [5] изучаются полурегулярные прецессии гиростата с неподвижной точкой. Найдены новые классы таких движений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается дифференциальными уравнениями класса Г.Кирхгофа [6–9]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где введены следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{ij})$ – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; $\mathrm{B} = (B_{ij})$ и $\mathrm{C} = (\mathrm{C}_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную по времени t.

Уравнения (1), (2) имеют интегралы

$$\begin{gathered} A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 2E, \qquad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \\ (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь E и k – постоянные интегрирования.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичные векторы подвижной системы координат, связанной с телом. Положим, что в течение всего времени движения гиростата постоянен угол ε_0 между вектором $\boldsymbol{\nu}$ и единичным вектором $\boldsymbol{n}$, начало которого совпадает с неподвижной точкой, а конец принадлежит единичной окружности в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Тогда получим следующие соотношения [5]

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu}=\cos\varepsilon_0,\qquad \boldsymbol{\omega}=f_1(t)\boldsymbol{n}+f_2(t)\boldsymbol{\nu},\qquad \boldsymbol{n}=(\cos\varkappa_0,\sin\varkappa_0,0),\tag{4}$$

где $\varkappa_0$ и ε_0 – константы, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – некоторые дифференцируемые функции времени. Тогда из соотношения (2) с учетом выражения для $\boldsymbol{\omega}$ из (4) имеем

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=f_1(t)(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{n}).\tag{5}$$

Случай, когда $f_i(t)$ $(i=1,2)$ постоянны, рассмотрен в работе [5]. Здесь будем предполагать, что постоянна лишь функция $f_2(t)$, то есть $f_2(t)=m$. Тогда вектор угловой скорости представим в виде

$$\boldsymbol{\omega}=f_1(t)\boldsymbol{n}+m\boldsymbol{\nu}.\tag{6}$$

Первое соотношение из (4) и геометрический интеграл $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1$, вытекающий из (3), можно параметризировать следующим образом

$$\begin{aligned}&\nu_1=\cos\varkappa_0\cos\varepsilon_0-\sin\varkappa_0\sin\varepsilon_0\cos u,\\&\nu_2=\sin\varkappa_0\cos\varepsilon_0+\cos\varkappa_0\sin\varepsilon_0\cos u,\quad \nu_3=\sin\varepsilon_0\sin u,\end{aligned}\tag{7}$$

где u – переменная величина. Расписывая уравнение (5) в скалярном виде и используя компоненты векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$ соответственно из формул (4), (7), получим $f_1(t)=-\dot u$. То есть $\boldsymbol{\omega}$ из (6) примет вид

$$\boldsymbol{\omega}=m\boldsymbol{\nu}-\dot u\boldsymbol{n}.\tag{8}$$

Прецессионное движение гиростата в случае (8) называется полурегулярной прецессией первого типа относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$.

Используя уравнение (5), подставим $\boldsymbol{\omega}$ из (8) в уравнение (1) и интегралы (3)

$$\ddot u A\boldsymbol{n}+\dot u^2(A\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n})+\dot u[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{\lambda}-B^*\boldsymbol{\nu})]+(\boldsymbol{s}^*-C^*\boldsymbol{\nu})\times\boldsymbol{\nu}=0,\tag{9}$$

$$\dot u(A\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})=(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu})-\frac12(B^*\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})-k_*,\tag{10}$$

$$\dot u^2(A\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})=2E_*+2(\boldsymbol{s}^*\cdot\boldsymbol{\nu})-(C^*\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}).\tag{11}$$

Здесь введены обозначения

$$B^*=B-2mA+mSp(A)\delta,\qquad C^*=C-m^2A+mB,\qquad \boldsymbol{s}^*=\boldsymbol{s}+m\boldsymbol{\lambda},\tag{12}$$

$$k_*=k-\frac12 Sp(A)m,\qquad E_*=E-mk,\tag{13}$$

где δ – единичная матрица третьего порядка, $Sp(A)$ – след матрицы A.

В силу постановки задачи векторы $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\nu}$ независимы. Если умножить левую часть уравнения (9) скалярно на векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$, то получим соотношения, которые являются линейными комбинациями равенств (10), (11). Поэтому достаточно рассмотреть равенство нулю скалярного произведения вектора $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\nu}$ и вектора, стоящего в левой части (9). С учетом интеграла (11) получим равенство

$$\begin{aligned}&\ddot u[A\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\nu})]+\dot u^2(A\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})+\dot u[(B^*\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})\cos\varepsilon_0-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\lambda})\cos\varepsilon_0-\\&\qquad-(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu})+2k_*]+2E_*\cos\varepsilon_0+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}^*)-(C^*\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})=0.\end{aligned}\tag{14}$$

Итак, исследование полурегулярных прецессий гиростата в задаче (1), (2) сведено к изучению решения уравнений (10), (11), (14) при условии, что векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$ имеют вид: $\boldsymbol{n} = (\cos\varkappa_0, \sin\varkappa_0, 0)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, где ν_i заданы соотношениями (7).

Отметим, что в работе [10] рассмотрена полурегулярная прецессия в случае, когда вектор $\boldsymbol{n}$ фиксирован в гиростате и с точностью до обозначений указаны уравнения (10), (11), (14).

2. Случай $A\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$. При анализе уравнений (10), (11) возникает особый случай, для которого $A\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$ для любых значений $\varkappa_0$ и переменной u. Используя равенства (4), (7), (12), имеем условия

$$\begin{aligned} &A_{ij} = 0\ (i \neq j), \quad A_{22} = A_{11}, \quad B_{ij} = 0\ (i \neq j), \quad B_{22} = B_{11}, \\ &C_{ij} = 0\ (i \neq j), \quad C_{22} = C_{11}, \quad \lambda_i = 0\ (i = 1, 2, 3), \quad s_2 = s_1 = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\pi}{2}, \quad B_{11}(2A_{11} - A_{33}) - A_{33}B_{33} = 0, \quad m = \frac{B_{33}}{A_{33} - 2A_{11}}, \tag{16}$$

при выполнении которых уравнение (11) примет вид

$$\dot{u}^2 = \frac{1}{A_{11}}\left[2E_* - C_{11}^* + 2s_3\sin u + (C_{11}^* - C_{33}^*)\sin^2 u\right], \tag{17}$$

где

$$C_{11}^* = C_{11} - m^2A_{11} + mB_{11}, \quad C_{33}^* = C_{33} - m^2A_{33} + mB_{33}.$$

Равенства (15) служат условиями существования линейного интеграла Кирхгофа [9], Харламова [7] для уравнений (1), (2). Равенства (16) являются дополнительными условиями, которые выделяют из случая Кирхгофа-Харламова частное решение

$$\begin{aligned} &\omega_1 = -\dot{u}\cos\varkappa_0 - m\sin\varkappa_0\cos u, \quad \omega_2 = -\dot{u}\sin\varkappa_0 + m\cos\varkappa_0\cos u, \\ &\omega_3 = m\sin u, \quad \nu_1 = -\sin\varkappa_0\cos u, \quad \nu_2 = \cos\varkappa_0\cos u, \quad \nu_3 = \sin u, \end{aligned} \tag{18}$$

где $u(t)$ удовлетворяет уравнению (17), описывающему полурегулярную прецессию твердого тела относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$. Отметим, что центр масс тела лежит на оси динамической симметрии, а конец вектора $\boldsymbol{n}$ может принадлежать окружности, лежащей в плоскости, ортогональной этой оси. При этом скорость прецессии тела не зависит от угла $\varkappa_0$, а угол между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$ равен 90°. Решение (17), (18) зависит от двух существенных постоянных $\varkappa_0$ и E_*.

3. Случай $A\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu} \neq 0$. Предположим, что коэффициент при $\dot{u}$ в левой части уравнения (10) отличен от нуля. Так как матрице A соответствует положительно-определенная квадратичная форма и $|\boldsymbol{n}| = 1$, то величина $(A\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}) > 0$. При соотношениях (7) из уравнений (10), (11) вытекает, что $\dot{u}$ и $\dot{u}^2$ имеют вид

$$\dot{u} = \frac{P_0 + P_1\cos u + P_2\sin u + Q_1\cos 2u + Q_2\sin 2u}{d_0 + d_1\cos u + d_2\sin u},$$

$$\dot{u}^2 = R_0 + R_1\cos u + R_2\sin u + S_1\cos 2u + S_2\sin 2u.$$

Здесь P_i, Q_i, R_i, S_i, d_i – функции, зависящие от параметров задачи и постоянных E_*, k_* и $\varkappa_0$. Анализ этих выражений определяет структуру функции $\dot{u}$

$$\dot{u} = \mu_0 + \mu_1\cos u + \mu_2\sin u. \tag{19}$$

Введем обозначения

$$
\begin{gathered}
a_0 = A_{11}\cos^2\varkappa_0 + A_{22}\sin^2\varkappa_0 + A_{12}\sin 2\varkappa_0, \quad d_0 = a_0\cos\varepsilon_0,\\
d_1 = \frac{1}{2}\left[(A_{22}-A_{11})\sin 2\varkappa_0 + 2A_{12}\cos 2\varkappa_0\right]\sin\varepsilon_0, \quad d_2 = (A_{13}\cos\varkappa_0 + A_{23}\sin\varkappa_0)\sin\varepsilon_0,\\
b_0 = (B_{11}^*\cos^2\varkappa_0 + B_{22}^*\sin^2\varkappa_0 + B_{12}^*\sin 2\varkappa_0)\cos\varepsilon_0,\\
b_1 = \frac{1}{2}\left[(B_{22}^*-B_{11}^*)\sin 2\varkappa_0 + 2B_{12}^*\cos 2\varkappa_0\right]\sin\varepsilon_0, \quad b_2 = (B_{13}^*\cos\varkappa_0 + B_{23}^*\sin\varkappa_0)\sin\varepsilon_0,\\
c_0 = (C_{11}^*\cos^2\varkappa_0 + C_{22}^*\sin^2\varkappa_0 + C_{12}^*\sin 2\varkappa_0)\cos\varepsilon_0,\\
c_1 = \frac{1}{2}\left[(C_{22}^*-C_{11}^*)\sin 2\varkappa_0 + 2C_{12}^*\cos 2\varkappa_0\right]\sin\varepsilon_0, \quad c_2 = (C_{13}^*\cos\varkappa_0 + C_{23}^*\sin\varkappa_0)\sin\varepsilon_0,\\
B_0 = B_{11}^*\sin^2\varkappa_0 + B_{22}^*\cos^2\varkappa_0 - B_{12}^*\sin 2\varkappa_0 + B_{33}^*, \qquad (20)\\
B_1 = (B_{11}^*\sin^2\varkappa_0 + B_{22}^*\cos^2\varkappa_0 - B_{12}^*\sin 2\varkappa_0 - B_{33}^*)\sin^2\varepsilon_0,\\
B_2 = (B_{23}^*\cos\varkappa_0 - B_{13}^*\sin\varkappa_0)\sin^2\varepsilon_0,\\
C_0 = (C_{11}^*\sin^2\varkappa_0 + C_{22}^*\cos^2\varkappa_0 - C_{12}^*\sin 2\varkappa_0 + C_{33}^*)\sin^2\varepsilon_0,\\
C_1 = (C_{11}^*\sin^2\varkappa_0 + C_{22}^*\cos^2\varkappa_0 - C_{12}^*\sin 2\varkappa_0 - C_{33}^*)\sin^2\varepsilon_0,\\
C_2 = (C_{13}^*\sin\varkappa_0 - C_{23}^*\cos\varkappa_0)\sin^2\varepsilon_0,\\
\tau_0 = (\lambda_1\cos\varkappa_0 + \lambda_2\sin\varkappa_0)\cos\varepsilon_0, \quad \tau_1 = (\lambda_2\cos\varkappa_0 - \lambda_1\sin\varkappa_0)\sin\varepsilon_0, \quad \tau_2 = \lambda_3\sin\varepsilon_0,\\
\sigma_0 = (s_1^*\cos\varkappa_0 + s_2^*\sin\varkappa_0)\cos\varepsilon_0, \quad \sigma_1 = (s_2^*\cos\varkappa_0 - s_1^*\sin\varkappa_0)\sin\varepsilon_0, \quad \sigma_2 = s_3^*\sin\varepsilon_0.
\end{gathered}
$$

Здесь C_{ij}^* – компоненты матрицы C^*, B_{ij}^* – компоненты матрицы B^*, s_i^* $(1,2,3)$ – компоненты вектора $\boldsymbol{s}^*$, которые можно определить из соотношений (12).

Подставим компоненты векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$ из равенств (4), (7), а также выражение (19) в уравнения (10), (11), (14) и потребуем, чтобы полученные уравнения были тождествами по u. На основании обозначений (20) имеем следующие условия

$$
\mu_0 d_1 + \mu_1 d_0 = \tau_1 - b_1\cos\varepsilon_0, \quad \mu_0 d_2 + \mu_2 d_0 = \tau_2 - b_2\cos\varepsilon_0, \tag{21}
$$

$$
\begin{gathered}
\mu_1(\mu_0 d_0 + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + b_0\cos\varepsilon_0 + 2k_* - 2\tau_0) = c_1 - \sigma_1\cos\varepsilon_0,\\
\mu_2(\mu_0 d_0 + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + b_0\cos\varepsilon_0 + 2k_* - 2\tau_0) = c_2 - \sigma_2\cos\varepsilon_0,
\end{gathered} \tag{22}
$$

$$
\begin{gathered}
\mu_0(\mu_0 d_0 + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + b_0\cos\varepsilon_0 + 2k_* - 2\tau_0) + 2E_*\cos\varepsilon_0 -\\
- c_0 + (s_1^*\cos\varkappa_0 + s_2^*\sin\varkappa_0)(1+\cos^2\varepsilon_0) = 0,
\end{gathered} \tag{23}
$$

$$
\mu_1 d_2 + \mu_2 d_1 = -B_2, \quad 2(\mu_2 d_2 - \mu_1 d_1) = B_1, \tag{24}
$$

$$
2k_* = 2\tau_0 + \frac{1}{2}B_0\sin^2\varepsilon_0 + b_0\cos\varepsilon_0 - 2\mu_0 d_0 - \mu_1 d_1 - \mu_2 d_2, \tag{25}
$$

$$
a_0\mu_1\mu_2 = C_2, \quad a_0(\mu_1^2 - \mu_2^2) = -C_1, \tag{26}
$$

$$
a_0\mu_0\mu_1 = \sigma_1 - c_1\cos\varepsilon_0, \quad a_0\mu_0\mu_2 = \sigma_2 - c_2\cos\varepsilon_0, \tag{27}
$$

$$
\frac{a_0}{2}(2\mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2) = 2E_* + 2\sigma_0 - c_0\cos\varepsilon_0 - \frac{1}{2}C_0. \tag{28}
$$

Исключая из равенств (22) значение $2k_*$ с помощью выражения (25) и принимая во внимание, что $d_0 = a_0 \cos\varepsilon_0$, получим

$$
\begin{aligned}
a_0\mu_0\mu_1\cos\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\mu_1 B_0\sin^2\varepsilon_0 &= \sigma_1\cos\varepsilon_0 - c_1,\\
a_0\mu_0\mu_2\cos\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\mu_2 B_0\sin^2\varepsilon_0 &= \sigma_2\cos\varepsilon_0 - c_2.
\end{aligned} \tag{29}
$$

С помощью выражений (27) соотношения (29) приведем к виду

$$
\mu_1 B_0 = -2c_1, \quad \mu_2 B_0 = -2c_2. \tag{30}
$$

Внесем выражения $2k_*$, $2E_*$ из формул (25), (28) в уравнение (23)

$$
\begin{aligned}
\mu_0 B_0\sin^2\varepsilon_0 - C_0\cos\varepsilon_0 - a_0(\mu_1^2+\mu_2^2)\cos\varepsilon_0 + 2c_0\sin^2\varepsilon_0 -&\\
- 2(s_1^*\cos\varkappa_0 + s_2^*\sin\varkappa_0)\sin^2\varepsilon_0 &= 0.
\end{aligned} \tag{31}
$$

Таким образом, в качестве условий существования полурегулярных прецессий гиростата в задаче (1), (2) будем рассматривать равенства (21), (24)–(28), (30), (31).

4. Случай $B_0 = 0$**.** При $B_0 = 0$ из равенств (30) следует, что $c_2 = c_1 = 0$. Рассмотрим вариант, когда m зависит от произвольного параметра $\varkappa_0$. Запишем равенства $B_0 = 0$, $c_2 = 0$ через первоначальные параметры (12), полагая $A_{12} = 0$ (этого равенства можно добиться поворотом системы координат)

$$
m = \frac{(B_{22}-B_{11})\cos 2\varkappa_0 - 2B_{12}\sin 2\varkappa_0 + (B_{11}+B_{22}+2B_{33})}{(A_{22}-A_{11})\cos 2\varkappa_0 - (A_{11}+A_{22})}, \tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
m^2(A_{22}-A_{11})\sin 2\varkappa_0 - m[(B_{22}-B_{11})\sin 2\varkappa_0 + 2B_{12}\cos 2\varkappa_0] -&\\
- (C_{22}-C_{11})\sin 2\varkappa_0 - 2C_{12}\cos 2\varkappa_0 &= 0.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Подставим выражение m из (32) в (33) и потребуем, чтобы полученное уравнение было тождеством по $\varkappa_0$. Тогда найдем условия, из которых выпишем наиболее простые

$$
C_{12}(A_{22}-A_{11}) = 0, \quad (C_{22}-C_{11})(A_{22}-A_{11}) = 0. \tag{34}
$$

Пусть в (34) выполняется равенство $A_{22} = A_{11}$. В этом случае соотношения (32), (33) существенно упрощаются и их анализ приводит к дополнительным ограничениям: $B_{12} = 0$, $B_{22} = B_{11}$. Так как при этом из формулы (32) следует, что m не зависит от $\varkappa_0$, то перейдем к изучению варианта $A_{22} \neq A_{11}$. Из (34) получим $C_{12} = 0$, $C_{22} = C_{11}$. Этот случай дает следующие ограничения

$$
B_{12} = 0, \quad B_{11} + B_{22} + 2B_{33} = \frac{(A_{11}+A_{22})(B_{11}-B_{22})}{A_{22}-A_{11}}.
$$

Использование этих условий в формуле (32) приводит к тому, что значение m из (32) не зависит от $\varkappa_0$. Таким образом, в дальнейшем предполагаем, что m может зависеть только от постоянных параметров A_i, B_{ij}, C_{ij}, λ_i, s_j задачи (1), (2).

Потребуем, чтобы равенства $B_0 = 0$, $c_2 = c_1 = 0$ выполнялись для любых значений $\varkappa_0$. Тогда в силу обозначений (20) получим

$$
B_{12}^* = 0, \quad B_{22}^* = B_{11}^*, \quad B_{33}^* = -B_{11}^*, \quad C_{ij}^* = 0 \ (i \neq j), \quad C_{22}^* = C_{11}^*. \tag{35}
$$

На основании этих условий часть выражений в системе (20) упрощаются

$$\begin{aligned} &B_1 = 2B_{11}^* \sin^2 \varepsilon_0, \quad b_0 = B_{11}^* \cos\varepsilon_0, \quad b_1 = 0, \quad c_0 = C_{11}^* \cos\varepsilon_0, \\ &C_0 = (C_{11}^* + C_{33}^*) \sin^2 \varepsilon_0, \quad C_1 = (C_{11}^* - C_{33}^*) \sin^2 \varepsilon_0, \quad C_2 = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

В силу ограничений (35), (36) система уравнений (21), (24), (26), (27), (30), (31) примет вид

$$\begin{aligned} &\mu_1\mu_2 = 0, \quad \mu_0 d_1 + \mu_1 d_0 = \tau_1, \quad \mu_0 d_2 + \mu_2 d_0 = \tau_2 - b_2 \cos\varepsilon_0, \\ &\mu_1 d_2 + \mu_2 d_1 = -B_2, \quad 2(\mu_2 d_2 - \mu_1 d_1) = B_1, \\ &a_0\mu_0\mu_1 = \sigma_1, \quad a_0\mu_0\mu_2 = \sigma_2, \quad a_0(\mu_2^2 - \mu_1^2) = C_1, \\ &a_0(\mu_1^2 + \mu_2^2)\cos\varepsilon_0 + C_0\cos\varepsilon_0 - 2c_0 \sin^2\varepsilon_0 + 2(s_1^*\cos\varkappa_0 + s_2^*\sin\varkappa_0)\sin^2\varepsilon_0 = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

В силу первого равенства условий (37) рассмотрим два случая: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 \neq 0$ и $\mu_2 = 0$, $\mu_1 \neq 0$.

Вариант $\mu_1 = 0$, $\mu_2 \neq 0$ характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned} &s_2^* = s_1^* = 0, \quad \mu_0 d_1 = \tau_1, \quad \mu_0 d_2 + \mu_2 d_0 = \tau_2 - b_2\cos\varepsilon_0, \\ &\mu_2 d_1 = -B_2, \quad 2\mu_2 d_2 = B_1, \quad a_0\mu_2^2 = C_1. \end{aligned} \tag{38}$$

Из последних трех равенств системы (38) получим

$$\begin{aligned} (A_{22} - A_{11})^2 (C_{11}^* - C_{33}^*)(1 - \cos 4\varkappa_0) + 2\left[(A_{22} - A_{11})\cos 2\varkappa_0 - (A_{22} + A_{11})\right] \cdot \\ \cdot \left[\left({B_{23}^*}^2 - {B_{13}^*}^2\right)\cos 2\varkappa_0 - 2B_{13}^* B_{23}^* \sin 2\varkappa_0 + {B_{13}^*}^2 + {B_{23}^*}^2\right] = 0, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} &{B_{11}^*}^2 \left[(A_{22} - A_{11})\cos 2\varkappa_0 - (A_{22} + A_{11})\right] + \\ &\quad + (C_{11}^* - C_{33}^*)\left[(A_{13}^2 - A_{23}^2)\cos 2\varkappa_0 + 2A_{13}A_{23}\sin 2\varkappa_0 + A_{13}^2 + A_{23}^2\right] = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Уравнение (39) может быть тождеством по $\varkappa_0$ только при выполнении условия $(A_{22} - A_{11})B_{13}^* B_{23}^* = 0$. Если предположить $A_{22} \neq A_{11}$, $B_{23}^* = 0$, то из (39) вытекает равенство $B_{13}^* = 0$, которое в силу $B_{11}^* \neq 0$, $C_{11}^* \neq C_{33}^*$ приводит к противоречию. Вариант $B_{13}^* = 0$ дает аналогичный результат. Тогда положим $A_{22} = A_{11}$. Из соотношения (40) следует $A_{13} = A_{23} = 0$, следовательно $d_2 = d_1 = 0$, что приводит к условиям

$$A_{ij} = 0, \quad B_{ij} = 0, \quad C_{ij} = 0 \ (i \neq j), \quad A_{22} = A_{11}, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{22} = C_{11}, \tag{41}$$

$$B_{11}(2A_{11} - A_{33}) - A_{33}B_{33} = 0, \quad m = -\frac{B_{11}}{A_{33}}, \tag{42}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 = 0, \qquad s_2 = s_1 = 0, \tag{43}$$

$$\cos\varepsilon_0 = \frac{\lambda_3}{A_{11}e_0}, \quad \mu_0 = \frac{s_3 + m\lambda_3}{\lambda_3}\cos\varepsilon_0, \quad \mu_2 = \frac{\lambda_3}{A_{11}}\operatorname{tg}\varepsilon_0, \tag{44}$$

где

$$e_0^2 = \frac{1}{A_{11}A_{33}^2}\left[A_{33}^2(C_{33} - C_{11}) + B_{11}^2(A_{33} - A_{11})\right]. \tag{45}$$

В случае (41)–(44) гиростат представляет собой геометрически симметричное тело, и его центр масс лежит на оси динамической симметрии. Вектор гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}$ принадлежит оси симметрии гиростата. Для каждого положения вектора $\boldsymbol{n}$, расположенного в плоскости кругового сечения эллипсоида инерции, значение угла ε_0 между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$ одно и то же, так как оно не зависит от угла $\varkappa_0$. Величины μ_0 и μ_2 также не зависят от $\varkappa_0$. Произвольная постоянная $\varkappa_0$ входит только в соотношения (7), определяющие компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ оси симметрии силового поля, и через них в соотношения (8) для компонент угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела. Решение зависит от одной произвольной постоянной и является частным вариантом решения Кирхгофа-Харламова [7, 9].

Вариант $\mu_2 = 0$, $\mu_1 \neq 0$ приводит к соотношениям

$$\begin{gathered} s_3^* = 0, \quad \mu_1 d_2 = -B_2, \quad 2\mu_1 d_1 = -B_1, \quad a_0\mu_0\mu_1 = \sigma_1, \\ \mu_0 d_1 + \mu_1 d_0 = \tau_1, \quad \mu_0 d_2 = \tau_2 - b_2\cos\varepsilon_0, \quad a_0\mu_1^2 = -C_1, \\ (C_{33}^* - C_{11}^*)\cos\varepsilon_0 + s_1^*\cos\varkappa_0 + s_2^*\sin\varkappa_0 = 0. \end{gathered} \tag{46}$$

Из второго, третьего и седьмого уравнений системы (46) вытекает

$$\begin{gathered} (C_{33}^* - C_{11}^*)(A_{22} - A_{11})^2\sin^2 2\varkappa_0 + \\ + 2B_{11}^*\left[(A_{22} - A_{11})\cos 2\varkappa_0 - (A_{11} + A_{22})\right] = 0, \end{gathered} \tag{47}$$

$$\begin{gathered} 2(C_{33}^* - C_{11}^*)(A_{13}\cos\varkappa_0 + A_{23}\sin\varkappa_0)^2 + \\ + (B_{23}^*\cos\varkappa_0 - B_{13}^*\sin\varkappa_0)^2\left[(A_{22} - A_{11})\cos 2\varkappa_0 - (A_{11} + A_{22})\right] = 0. \end{gathered} \tag{48}$$

Подвижную систему координат выбираем таким образом, чтобы выполнялось равенство $A_{12} = 0$. При отождествлении по $\varkappa_0$ соотношений (47) получим $A_{22} = A_{11}$, $B_{11}^* = 0$. Первое из этих равенств позволяет преобразованием поворота подвижной системы координат вокруг третьей оси добиться условия $A_{23} = 0$. Тогда соотношение (48) будет выполняться для любых значений $\varkappa_0$, если принять дополнительные ограничения на параметры: $B_{13}^* = 0$, $B_{23}^* = A_{13}e_0$, где e_0 удовлетворяет условию (45). Полный анализ системы (46) при указанных выше условиях дает равенства

$$\begin{gathered} A_{12} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad A_{22} = A_{11}, \quad B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{12} = 0, \quad C_{22} = C_{11}, \\ A_{33}B_{13} + 2A_{13}B_{11} = 0, \quad B_{23} - A_{13}e_0 = 0, \quad C_{13}A_{33}^2 + A_{13}B_{11}^2 = 0, \\ C_{23}A_{33} - A_{13}B_{11}e_0 = 0, \quad \lambda_3 A_{11} - \lambda_1 A_{13} = 0, \quad s_3A_{33} - \lambda_3 B_{11} = 0, \\ s_1 = \frac{\lambda_1 B_{11}}{A_{33}} + \lambda_2 e_0, \quad s_2 = \frac{\lambda_2 B_{11}}{A_{33}} - \lambda_1 e_0, \quad m = -\frac{B_{11}}{A_{33}}, \quad B_{11}(2A_{11} - A_{33}) - A_{33}B_{33} = 0 \end{gathered} \tag{49}$$

и соотношения (44).

В силу формулы (19) полурегулярная прецессия (7), (8) описывается соотношениями

$$\begin{gathered} \omega_1 = m(\cos\varkappa_0\cos\varepsilon_0 - \sin\varkappa_0\sin\varepsilon_0\cos u) - (\mu_0 + \mu_1\cos u + \mu_2\sin u)\cos\varkappa_0, \\ \omega_2 = m(\sin\varkappa_0\cos\varepsilon_0 + \cos\varkappa_0\sin\varepsilon_0\cos u) - (\mu_0 + \mu_1\cos u + \mu_2\sin u)\sin\varkappa_0, \end{gathered} \tag{50}$$

$$\omega_3 = m\sin\varepsilon_0\sin u,\quad \nu_1 = \cos\varkappa_0\cos\varepsilon_0 - \sin\varkappa_0\sin\varepsilon_0\cos u,$$

$$\nu_2 = \sin\varkappa_0\cos\varepsilon_0 + \cos\varkappa_0\sin\varepsilon_0\cos u,\quad \nu_3 = \sin\varepsilon_0\sin u,$$

$$\frac{du}{dt} = \mu_0 + \mu_1\cos u + \mu_2\sin u. \tag{51}$$

Здесь $\mu_2 = 0$, а μ_0, μ_1 и $\cos\varepsilon_0$ зависят от $\varkappa_0$ и определяются соотношениями (44).

Анализ условий (49) показывает, что вектор $\boldsymbol{n}$ расположен в плоскости кругового сечения эллипсоида инерции, которая не является его главной плоскостью. Векторы обобщенного центра масс $\boldsymbol{s}$ и гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}$ не коллинеарны. Матрицы A, B, C не являются диагональными. Величины ε_0, μ_0 и μ_1 зависят от $\varkappa_0$. Таким образом, решение (50) уравнений (1), (2) зависит от одной существенной произвольной постоянной $\varkappa_0$.

Из уравнения (51) вытекает, что $u(t)$ – элементарная функция времени. В рассматриваемом случае $\mu_2 = 0$ она имеет вид

$$u = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{\mu_0^2-\mu_1^2}}{\mu_0-\mu_1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{\mu_0^2-\mu_1^2}}{2}(t-t_0)\right),\quad \mu_0^2 > \mu_1^2, \tag{52}$$

$$u = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{\mu_1^2-\mu_0^2}}{\mu_0-\mu_1}\,\mathrm{cth}\,\frac{\sqrt{\mu_1^2-\mu_0^2}}{2}(t-t_0)\right),\quad \mu_1^2 > \mu_0^2, \tag{53}$$

$$u = 2\,\mathrm{arctg}\,\mu_0 t,\quad \mu_1 = \mu_0. \tag{54}$$

Соотношение (52) описывает зигзагообразную линию [1], соотношение (53) – локсодрому [11]. В случае (54) при $t \to \infty$ переменная $u \to \pi$.

Рассмотрим вариант, определяемый условиями (49), в случае $A_{13} = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 > 0$, $e_0 > 0$. Тогда ограничения (49) преобразуются к виду

$$A_{ij} = 0,\quad B_{ij} = 0,\quad C_{ij} = 0\ (i \neq j),\quad A_{22} = A_{11},\quad B_{22} = B_{11},\quad C_{22} = C_{11},$$

$$B_{11}(2A_{11} - A_{33}) - A_{33}B_{33} = 0,\quad s_3 = 0,\quad \lambda_3 = \lambda_2 = 0, \tag{55}$$

$$s_1 = \frac{\lambda_1 B_{11}}{A_{33}},\qquad s_2 = -\lambda_1 e_0,$$

$$m = -\frac{B_{11}}{A_{33}},\quad \cos\varepsilon_0 = \frac{\lambda_1}{A_{11}e_0}\sin\varkappa_0, \tag{56}$$

$$\mu_0 = \frac{\lambda_1}{A_{11}}\cos\varkappa_0,\quad \mu_1 = -e_0\sin\varepsilon_0,$$

где e_0 характеризуется равенством (45).

В этом случае гиростат представляет собой динамически симметричное тело. Векторы обобщенного центра масс $\boldsymbol{s}$ и гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}$ лежат в главной плоскости, ортогональной этой оси. Причем векторы $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{s}$ не коллинеарны. Вектор $\boldsymbol{n}$ лежит в этой же плоскости кругового сечения эллипсоида инерции. Матрицы A, B, C диагональны. Скорость прецессии гиростата m не зависит от параметра $\varkappa_0$. Величины ε_0 и μ_0 зависят от $\varkappa_0$, а μ_1 зависит от ε_0. Элементы матриц A и B связаны одним условием.

Решение (50), (51) при условиях (55), (56) зависит от одной произвольной постоянной $\varkappa_0$.

Укажем геометрическое множество точек конца вектора $\boldsymbol{n}$. В силу равенства $\cos\varepsilon_0 = \dfrac{\lambda_1}{A_{11}e_0}\sin\varkappa_0$ при $\dfrac{A_{11}e_0}{\lambda_1} \geq 1$ вектор $\boldsymbol{n}$ может совпадать с любым радиус-вектором единичной окружности в плоскости $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ с центром в неподвижной точке 0. Если же $\dfrac{A_{11}e_0}{\lambda_1} < 1$, то вектор $\boldsymbol{n}$ может быть радиус-вектором части этой окружности, которая определяется условием $|\varkappa_0| \leq \arcsin\dfrac{A_{11}e_0}{\lambda_1}$.

Отметим, что в установленных выше случаях полурегулярных прецессий скорость прецессии гиростата, определяемая величиной m, не зависит от параметра $\varkappa_0$, а скорость собственного вращения является функцией времени, параметра $\varkappa_0$ и параметров системы (1), (2).

1. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1978. – 294 с.
2. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. – Киев: Наук. думка, 1984. – 228 с.
3. *Горр Г.В.* Методы исследования движений твердого тела и их приложения в классификации движений // Механика твердого тела. – 1982. – Вып.14. – С. 54–74.
4. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел. – Препринт N 89.03, Донецк: ИПММ АН УССР. – 1989. – 66 с.
5. *Узбек Е.К.* Об одном классе регулярных прецессий гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 60–67.
6. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып.31. – С. 3–17.
7. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журнал прикл. механики и техн. физики. – 1963. – N 4. – С. 17–29.
8. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – **5**, N 5. – P. 747–754.
9. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rötation korpers in einer Flüssigkeit // J. fur die reine und angew. Math. – 1870. – B.71. – S. 237-262.
10. *Курганский Н.В.* О полурегулярной прецессии первого типа относительно вертикали в одной задаче динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 1988. – Вып. 20. – С. 67–71.
11. *Жуковский Н.Е.* Локсодромический маятник Гесса // Собр. соч. – М.; Л.: Гостехиздат. – 1948. – Т.1. – С. 297–310.

Донецкий гос. ун-т экономики и торговли им.М.Туган-Барановского

Получено 10.01.03