ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2003. Вып. 33

УДК 531.38

©2003. **А.М. Ковалев, Д.А. Данилюк**

ЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА-ГАМИЛЬТОНА

Получена новая форма уравнений движения твердого тела в поле силы тяжести, когда в качестве основных переменных приняты параметры Родрига-Гамильтона и вектор угловой скорости. Рассмотрены линейные нормальные колебания около нижнего положения равновесия и установлена их связь с движениями физического маятника и равномерными вращениями. Изучено расположение осей нормальных колебаний в теле в зависимости от значений моментов инерции и положения центра масс.

Введение. Кинематические параметры Родрига-Гамильтона обладают рядом замечательных свойств, к которым можно отнести отсутствие особенностей в области определения, сохранение алгебраической структуры уравнений движения, наглядность геометрического представления движения на основе вектора конечного поворота. Благодаря этим качествам, они нашли широкое применение на практике при разработке алгоритмов управления космическими объектами [1, 2]. Однако в теоретических исследованиях по динамике твердого тела их использование остается ограниченным. Систематическое изучение задач динамики твердого тела в параметрах Родрига-Гамильтона начато в работах [3,4], где была получена система уравнений второго порядка, с помощью которой рассмотрены свойства равномерных вращений и частные решения. Дальнейший анализ задач динамики твердого тела и гироскопических эффектов выполнен в монографиях [5,6]. Укажем так же на работы [7,8], в которых получены функции Гамильтона для твердого тела и гиростата. Необходимо отметить, что препятствием к распространению параметров Родрига-Гамильтона является сложность уравнений движения. Упрощение уравнений движения являлось одной из целей настоящей работы. Ее удалось достичь, благодаря специальному введению неподвижной системы координат. С помощью полученных уравнений рассмотрены нормальные линейные колебания тела около нижнего положения равновесия и установлена их связь с движением физического маятника и равномерными вращениями. Изучено расположение осей нормальных колебаний в теле в зависимости от значений моментов инерции и положения центра масс.

1. Исходные соотношения. Следуя монографии [9], введем параметры Родрига-Гамильтона и необходимые кинематические формулы. Параметры Родрига- Гамильтона удобно вводить с помощью вектора конечного поворота

$$\boldsymbol{\theta} = 2\boldsymbol{a}\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2},$$

где $\boldsymbol{a}$ - единичный вектор оси вращения, а χ - угол поворота вокруг нее. По теореме Эйлера любой поворот тела из начального положения в конечное осуществляется как плоский поворот вокруг этой оси на соответствующий угол χ. Введем неподвижную систему координат $Ox'y'z'$, и координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в ней обозначим через a_1, a_2, a_3 . Тогда параметры Родрига-Гамильтона определяются формулами

$$\lambda_1 = a_1 \sin\frac{\chi}{2}, \quad \lambda_2 = a_2 \sin\frac{\chi}{2}, \quad \lambda_3 = a_3 \sin\frac{\chi}{2}, \quad \lambda_0 = \cos\frac{\chi}{2} \tag{1}$$

и удовлетворяют равенству

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \tag{2}$$

то есть они являются не обобщенными координатами, а избыточными.

Отметим, что простейшим движениям твердого тела: покою и равномерному вращению с угловой скоростью ω вокруг неподвижного вектора $\boldsymbol{a}$, отвечают, соответственно, постоянные значения и периодические значения параметров Родрига-Гамильтона

$$\lambda_1 = a_1 \sin\frac{\omega t}{2}, \quad \lambda_2 = a_2 \sin\frac{\omega t}{2}, \quad \lambda_3 = a_3 \sin\frac{\omega t}{2}, \quad \lambda_0 = \cos\frac{\omega t}{2}.$$

Для получения уравнений движения приведем формулы для проекций $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, угловой скорости тела на подвижные оси $Oxyz$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda_1} - \lambda_1\dot{\lambda_0} + \lambda_3\dot{\lambda_2} - \lambda_2\dot{\lambda_3}),\\
\omega_2 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda_2} - \lambda_2\dot{\lambda_0} + \lambda_1\dot{\lambda_3} - \lambda_3\dot{\lambda_1}),\\
\omega_3 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda_3} - \lambda_3\dot{\lambda_0} + \lambda_2\dot{\lambda_1} - \lambda_1\dot{\lambda_2}).
\end{aligned} \tag{3}$$

2. Уравнения и интегралы движения. Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести. В качестве подвижной системы координат выберем главные оси инерции с началом в неподвижной точке. Обозначим через A_1, A_2, A_3 главные моменты инерции; $\omega_i,\ \nu_i,\ e_i \quad (i = 1,2,3)$ – проекции на подвижные оси вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, единичного вектора вертикали $\boldsymbol{\nu}$, направленного вверх, и единичного вектора $\mathbf{e}$, идущего из неподвижной точки в центр масс тела, Γ – произведение веса тела и расстояния до центра масс. В качестве неподвижной системы, следуя [10], выберем декартову систему координат с центром в неподвижной точке таким образом, чтобы проекции ν_i' вектора $\boldsymbol{\nu}$ на эти оси имели следующие значения: $\nu_i' = -e_i \quad (i = 1,2,3)$. По таблице направляющих косинусов [9] находим

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= e_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2) - 2e_2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) + 2e_3(\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3),\\
\nu_2 &= 2e_1(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_2\lambda_1) + e_2(\lambda_3^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_0^2) - 2e_3(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3),\\
\nu_3 &= -2e_1(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1) + 2e_2(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_3\lambda_2) + e_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_0^2).
\end{aligned} \tag{4}$$

Для описания движения твердого тела выберем в качестве фазовых координат параметры Родрига-Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и компоненты угловой скорости $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, связанные с величинами $\dot\lambda_0, \dot\lambda_1, \dot\lambda_2, \dot\lambda_3$ формулами (3). Дифференциальные уравнения для компонент ω_i получим из динамических уравнений Эйлера

$$A_1\dot\omega_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \Gamma(e_3\nu_2 - e_2\nu_3) \qquad (123),$$

подставив в них формулы (4) для величин ν_i и учтя равенство (2),

$$\begin{aligned}
A_1\dot\omega_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 - 2\Gamma[\lambda_0\lambda_1 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)(-\lambda_0 e_1 + \lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2)],\\
A_2\dot\omega_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 - 2\Gamma[\lambda_0\lambda_2 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)(-\lambda_0 e_2 + \lambda_3 e_1 - \lambda_1 e_3)],\\
A_3\dot\omega_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 - 2\Gamma[\lambda_0\lambda_3 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)(-\lambda_0 e_3 + \lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1)].
\end{aligned} \tag{5}$$

Дифференциальными уравнениями для параметров λ_i являются кинематические уравнения [9]

$$\begin{aligned}
2\dot{\lambda}_0 &= -\omega_1\lambda_1 - \omega_2\lambda_2 - \omega_3\lambda_3,\\
2\dot{\lambda}_1 &= \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3,\\
2\dot{\lambda}_2 &= \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1,\\
2\dot{\lambda}_3 &= \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (5), (6) описывают движение твердого тела в параметрах Родрига-Гамильтона, их правые части являются однородными квадратичными формами основных переменных. Эти уравнения допускают три интеграла: энергии, момента и геометрический

$$\begin{gathered}
A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 + 4\Gamma[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)^2] = h,\\
A_1\omega_1[e_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2) - 2e_2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) + 2e_3(\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3)] +\\
+A_2\omega_2[2e_1(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_2\lambda_1) + e_2(\lambda_3^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_0^2) - 2e_3(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)] +\\
+A_3\omega_3[-2e_1(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1) + 2e_2(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_3\lambda_2) + e_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_0^2)] = k,\\
\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.
\end{gathered}$$

Приведем выражение для потенциальной энергии, которая потребуется при изучении нормальных колебаний

$$\Pi = 2\Gamma\big[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)^2\big]. \tag{7}$$

3. Положения равновесия и линейные колебания. Найдем положения равновесия – особые точки уравнений движения, приравняв нулю правые части уравнений (5), (6). Кинематические уравнения (6) удовлетворяются единственным решением $\boldsymbol{\omega} = 0$. Динамические уравнения (5) приводят к уравнению

$$\lambda_0\boldsymbol{\lambda} + (\mathbf{e}, \boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{e} - \lambda_0\mathbf{e}) = 0, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Отдельно рассмотрим два случая, когда векторы $\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{e}$ линейно зависимы и линейно независимы. В первом случае получаем $\boldsymbol{\lambda} = \alpha\mathbf{e}$. Из формул (1) следует $\boldsymbol{a} = \mathbf{e}$, χ – произвольная постоянная. Воспользуемся имеющимся произволом при выборе неподвижной системы координат и поворотом вокруг вектора $\mathbf{e}$ совместим неподвижные оси с главными осями инерции твердого тела. Тогда $\chi = 0$ и

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_0 = 1. \tag{9}$$

Во втором случае из уравнений (8) имеем $\lambda_0 = 0$, $(\mathbf{e}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$. Из формул (1) находим

$$\chi = \pi, \qquad \boldsymbol{a} \perp \mathbf{e}. \tag{10}$$

Таким образом, особыми точками уравнений (5), (6) являются положения равновесия (9), (10). Формулы (9) определяют нижнее положение равновесия, а формулы (10) – верхнее.

Изучим линейные нормальные колебания твердого тела около нижнего положения равновесия. В качестве обобщенных координат выберем $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а параметр λ_0

определим из равенства (2). Сохраняя за возмущенными значениями параметров те же обозначения, получаем, что потенциальная энергия возмущенного движения определяется формулой (7), а для кинетической энергии с учетом формул (3) с точностью до квадратичных членов находим

$$T = 2\big(A_1\dot{\lambda_1}^2 + A_2\dot{\lambda_2}^2 + A_3\dot{\lambda_3}^2\big). \tag{11}$$

Нормальные координаты соответствуют базису $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$, в котором квадратичные формы (7), (11) имеют канонический вид. Приведение этих форм к каноническому виду выполним в два этапа. На первом этапе введем переменные $x_i = \sqrt{2A_i}\lambda_i, \quad i = 1, 2, 3$. Тогда формы (7), (11) примут вид

$$T = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2, \tag{12}$$

$$\Pi = \Gamma\left[\frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} + \frac{x_3^2}{A_3} - \left(\frac{x_1e_1}{\sqrt{A_1}} + \frac{x_2e_2}{\sqrt{A_2}} + \frac{x_3e_3}{\sqrt{A_3}}\right)\right]. \tag{13}$$

На втором этапе с помощью преобразования поворота $x = Py$ приведем форму (13) к каноническому виду. При этом форма (12) не изменится. Переменные y_1, y_2, y_3 определяют нормальные координаты. В них формы (12), (13) принимают вид

$$T = \dot{y_1}^2 + \dot{y_2}^2 + \dot{y_3}^2, \tag{14}$$

$$\Pi = \mu_0y_1^2 + \mu_1y_2^2 + \mu_2y_3^2, \tag{15}$$

а уравнения движения

$$\ddot{y_i} + \mu_{i-1}y_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{16}$$

определяют нормальные колебания.

Величины $\mu_i \ \ (i = 0, 1, 2)$ являются корнями характеристического уравнения $det(A - \mu E) = 0$, где A - матрица квадратичной формы (13), а столбцы матрицы P являются собственными векторами $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ матрицы A, соответствующими корням μ_0, μ_1, μ_2. Для матрицы A имеем выражение

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(e_2^2+e_3^2)}{A_1} & -\dfrac{\Gamma e_1e_2}{\sqrt{A_1A_2}} & -\dfrac{\Gamma e_1e_3}{\sqrt{A_1A_3}} \\ -\dfrac{\Gamma e_1e_2}{\sqrt{A_1A_2}} & \dfrac{\Gamma(e_3^2+e_1^2)}{A_2} & -\dfrac{\Gamma e_2e_3}{\sqrt{A_2A_3}} \\ -\dfrac{\Gamma e_1e_3}{\sqrt{A_1A_3}} & -\dfrac{\Gamma e_2e_3}{\sqrt{A_2A_3}} & \dfrac{\Gamma(e_1^2+e_2^2)}{A_3} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Вычисляя характеристическое уравнение для матрицы (17), находим, что $\mu_0 = 0$, а корни μ_1, μ_2 удовлетворяют уравнению

$$A_1A_2A_3\mu^2 - \Gamma[A_1A_2(e_1^2+e_2^2) + A_2A_3(e_2^2+e_3^2) + A_3A_1(e_3^2+e_1^2)]\mu +$$
$$+\Gamma^2(A_1e_1^2 + A_2e_2^2 + A_3e_3^2) = 0. \tag{18}$$

Решая уравнение (18), получаем выражения для корней μ_1, μ_2

$$\mu_{1,2} = \frac{\Gamma[A_1A_2(e_1^2+e_2^2) + A_2A_3(e_2^2+e_3^2) + A_3A_1(e_3^2+e_1^2)] \pm D}{2A_1A_2A_3}, \tag{19}$$

где

$$D^2 = \Gamma^2[A_1^2A_2^2(e_1^2+e_2^2)^2 + A_2^2A_3^2(e_2^2+e_3^2)^2 + A_3^2A_1^2(e_3^2+e_1^2)^2 + 2A_1A_2^2A_3(e_1^2e_3^2-e_2^2)+$$

$$+2A_2A_3^2A_1(e_2^2e_1^2-e_3^2) + 2A_3A_1^2A_2(e_3^2e_2^2-e_1^2)].$$

Для нахождения базисных векторов $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ нормальных колебаний необходимо решить систему уравнений $(A-\mu_i E)\mathbf{h}_i = 0 \ \ (i=1,2,3)$. При ее решении будем различать три случая расположения центра масс:

1. Центр масс не лежит в главной плоскости: $e_1e_2e_3 \neq 0$;
2. Центр масс лежит на главной оси: $e_1 = 1, \ e_2 = e_3 = 0 \ \ (123)$;
3. Центр масс лежит в главной плоскости: $e_1 = 0 \ \ (123)$.

В первом случае, при дополнительном предположении $A_1 \neq A_2, \ \mu_1 \neq \mu_2$, для проекций базисных векторов на оси $Ox_1x_2x_3$ получаем выражения

$$h_{01} = \alpha_0 e_1\sqrt{A_1}, \quad h_{02} = \alpha_0 e_2\sqrt{A_2}, \quad h_{03} = \alpha_0 e_3\sqrt{A_3},$$

$$\alpha_0^{-2} = A_1e_1^2 + A_2e_2^2 + A_3e_3^2, \tag{20}$$

$$h_{i1} = \alpha_i e_1e_3(1-\mu_iA_2)\sqrt{A_1}, \ \ h_{i2} = \alpha_i e_2e_3(1-\mu_iA_1)\sqrt{A_2},$$

$$h_{i3} = \alpha_i\big[A_1e_1^2(\mu_iA_2-1) + A_2e_2^2(\mu_iA_1-1)\big]/\sqrt{A_3}, \tag{21}$$

$$\alpha_i^{-2} = e_1^2e_3^2(1-\mu_iA_2)^2A_1 + e_2^2e_3^2(1-\mu_iA_1)^2A_2+$$

$$+\big[A_1e_1^2(\mu_iA_2-1) + A_2e_2^2(\mu_iA_1-1)\big]^2/A_3, \quad i=1,2.$$

По формулам перехода $x_i = \sqrt{2A_i}\lambda_i \ \ (i=1,2,3)$ от исходных переменных λ_i к переменным x_i получаем, что вектор $\mathbf{e}$ имеет в системе $Ox_1x_2x_3$ проекции $e_{x1} = \sqrt{2A_1}e_1$, $e_{x2} = \sqrt{2A_2}e_2, \quad e_{x3} = \sqrt{2A_3}e_3$. На основании формул (20) это означает, что вектор $\mathbf{h}_0$ коллинеарен вектору $\mathbf{e}$ и в неподвижном пространстве направлен вертикально вниз. В силу уравнений (16) для $\mu_0 = 0$ имеем $\dot{y}_0 = C_0 = \mathrm{const}$, что по формулам (3) дает $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{const}$. Таким образом, нормальное колебание, соответствующее $\mu_0 = 0$, является равномерным вращением вокруг вертикали. На основании уравнений (16) нормальные колебания, соответствующие значениям μ_1, μ_2, происходят в неподвижном пространстве вокруг векторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$. Сформулируем полученный результат в форме утверждения.

Утверждение 1. Пусть $e_1e_2e_3 \neq 0, \ \ A_1 \neq A_2, \ \ \mu_1 \neq \mu_2$. Тогда линейными нормальными колебаниями твердого тела около нижнего положения равновесия в параметрах Родрига-Гамильтона являются равномерное вращение вокруг вектора , расположенного в неподвижном пространстве вертикально вниз, и колебания вокруг двух осей, положение которых в теле и в неподвижном пространстве, в системе $Ox_1x_2x_3$, определяется формулами (21).

Для случая произвольного положения центра масс $(e_1e_2e_3 \neq 0)$ известно, что равномерное вращение вокруг оси несущей центр масс, возможно лишь с нулевой скоростью. При этом одна из ветвей S_0 кривой Штауде [11,12], определяющей положение вектора угловой скорости равномерного вращения в теле, проходит через начало координат. Отсюда заключаем, что прямая равномерных вращений, определяемая вектором $\mathbf{e}$ в линейном случае, деформируется в нелинейном случае (для полных уравнений (5),(6)) в кривую Штауде S_0. Что соответствует двум оставшимся линейным нормальным колебаниям в нелинейном случае неизвестно, поскольку в рассматриваемом случае ($e_1e_2e_3 \neq 0$) других решений уравнений (5), (6), кроме равномерных вращений пока не обнаружено.

4. Центр масс на главной оси. Ситуация существенно упрощается, когда центр масс тела находится на главной оси, пусть $e_1 = 1$, $e_2 = e_3 = 0$. Тогда главные оси инерции являются главными осями квадратичных форм (7), (11) и, соответственно, осями нормальных колебаний. Вокруг оси, несущей центр масс, тело совершает вращение, а вокруг двух других осей - колебания. Эти движения описываются следующими решениями линеаризованной системы

$$\begin{aligned}
\mu_0 = 0: \quad & \omega_2 = \omega_3 = 0, \qquad \omega_1 = \omega_{10} = \mathtt{const},\\
& \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 = \omega_{10}t + \lambda_{10};\\
\mu_1 = \frac{1}{A_2}: \quad & \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{A_2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{A_2}} + \varphi_{20}),\\
& \lambda_1 = \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_2 = \cos(\frac{t}{\sqrt{A_2}} + \varphi_{20});\\
\mu_2 = \frac{1}{A_3}: \quad & \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = -\frac{1}{\sqrt{A_3}}\sin(\frac{t}{\sqrt{A_3}} + \varphi_{30}),\\
& \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = \cos(\frac{t}{\sqrt{A_3}} + \varphi_{30}).
\end{aligned} \tag{22}$$

Отметим, что решения (22) порождают решения нелинейной системы, которым соответствуют равномерные вращения и движения физического маятника. Эти движения определяют нелинейные нормальные колебания.

Сформулируем полученный результат в следующей форме.

Утверждение 2. Пусть центр масс тела находится на главной оси инерции. Тогда главные оси являются осями линейных и нелинейных нормальных колебаний твердого тела около нижнего положения равновесия в параметрах Родрига-Гамильтона. Колебаниям относительно оси, несущей центр масс, соответствуют равномерные вращения тела вокруг вертикали, а колебаниям относительно двух других главных осей инерции соответствуют движения физического маятника.

Замечание. Хотя решения (22) описывают нормальные колебания, однако координаты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ не являются нормальными координатами нелинейной системы и для них принцип суперпозиции не имеет места.

5. Центр масс в главной плоскости. Пусть центр масс находится в главной плоскости $e_3 = 0$. Тогда выражения для частот и базисных векторов нормальных колебаний упрощаются

$$\begin{aligned}
\mu_0 = 0: \quad & h_{01} = \alpha_0 e_1\sqrt{A_1}, \quad h_{02} = \alpha_0 e_2\sqrt{A_2}, \quad h_{03} = 0,\\
& \alpha_0^{-2} = A_1e_1^2 + A_2e_2^2;\\
\mu_1 = 1/A_3: \quad & h_{11} = 0, \qquad h_{12} = 0, \qquad h_{13} = 1;\\
\mu_2 = \frac{A_1e_1^2 + A_2e_2^2}{A_1A_2}: \quad & h_{21} = -\alpha_0 e_2\sqrt{A_2}, \quad h_{22} = \alpha_0 e_1\sqrt{A_1}, \quad h_{23} = 0.
\end{aligned}$$

Повторяя приведенные выше рассуждения п.п.3,4, находим, что, как и ранее, вектор $\mathbf{h_0}$ совпадает с вектором $\mathbf{e}$, вектор $\mathbf{h_1}$ направлен по третьей главной оси, а вектор $\mathbf{h_2}$

имеет в системе $Ox_1x_2x_3$ координаты

$$h_{2x1} = -\beta_0 e_2 A_2, \qquad h_{2x2} = \beta_0 e_1 A_1, \qquad h_{2x3} = 0,$$

$$\beta_0^{-2} = A_1^2 e_1^2 + A_2^2 e_2^2.$$

Утверждение 3. Для твердого тела, центр масс которого расположен в главной плоскости, линейные нормальные колебания представляют собой равномерное вращение вокруг вектора $\mathbf{e}$, расположенного вертикально вниз в неподвижном пространстве, и два колебания вокруг осей с единичными векторами $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, одна из которых является главной осью эллипсоида инерции, ортогональной вектору $\mathbf{e}$. Нормальное колебание вокруг главной оси соответствует решению физического маятника уравнений Эйлера-Пуассона и, следовательно, сохраняется и в нелинейном случае.

Заключение. В настоящей работе линейные нормальные колебания твердого тела около нижнего положения равновесия изучены достаточно детально. Установлена их связь с нелинейными нормальными колебаниями за исключением трех случаев колебаний вокруг неглавных осей. При сохранении нормальных колебаний в нелинейном случае полученные координаты не являются нормальными и разделения движений не происходит. Как дальнейшее развитие этого исследования предполагается рассмотреть следующие задачи: изучение нелинейных нормальных колебаний методом нормальных форм; построение решений нелинейных уравнений Эйлера-Пуассона, соответствующих линейным нормальным колебаниям вокруг неглавных осей; анализ изменения движений Эйлера-Пуансо при смещении центра масс из неподвижной точки вдоль главной оси, в главной плоскости, в произвольном направлении.

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
2. *Лебедев Д.В., Ткаченко А.И.* Системы инерциального управления. Алгоритмические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1991. – 203 с.
3. *Кошляков В.Н.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Укр. мат. ж. – 1973. – Вып. 25, № 5. – С. 677–681.
4. *Кошляков В.Н.* Об уравнениях тяжелого твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, в параметрах Родрига-Гамильтона // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 4. – С. 16–25.
5. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
6. *Кошляков В.Н.* Параметры Родрига-Гамильтона и их приложения в механике твердого тела. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – 176 с.
7. *Козлов В.В.* Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах // Теорет. и прикл. механика. – 1982. – Вып. 8. – С. 59–65.
8. *Ковалев А.М.* Получение уравнений Гамильтона движения механических систем со связями на основе принципа максимума Понтрягина // Механика твердого тела. – 1986. – Вып. 18. – С. 67–73.
9. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
10. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – 500 с.
11. *Staude O.* Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. für die reine und angew. Math. – 1894. – **113**, H.2 – S. 318 – 334.
12. *Ковалев А.М.* О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика. – 1968. – Вып. 5. – С. 87–102.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kovalev@iamm.ac.donetsk.ua, daniljuk@ukrtop.com

Получено 25.04.03