ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2002. Вып. 32

УДК 531.36

©2002. **С.Р. Амбарцумян**

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПРИ ПАРЕ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Рассматривается задача устойчивости по действующей силе системы нелинейных дифференциальных уравнений в критическом случае, когда характеристическое уравнение соответствующего линейного приближения системы имеет пару чисто мнимых корней. Получены достаточные условия, накладываемые на нелинейные члены, при которых тривиальное решение будет асимптотически устойчивым по действующей силе.

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_i = \Phi_i(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n), \tag{1}$$

где $\Phi_i(y_1, \dots, y_n) : R^n \to R^1$ – аналитические функции в R^n и $\Phi_i(0, \dots, 0) = 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Известно [1, с. 57], что в этом случае систему (1) можно привести к виду:

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} y_k + Y_i(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n), \tag{2}$$

линейное приближение которой будет

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} y_k \quad (i = 1, \dots, n). \tag{3}$$

Пусть корни характеристического уравнения системы (3) удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 = i\alpha,\ \lambda_2 = -i\alpha,\ \mathrm{Re}\lambda_j < 0 \quad (j = 3, \dots, n), \tag{4}$$

где $\alpha \neq 0$ – действительное число. Следовательно, имеем пару чисто мнимых корней $\pm i\alpha$ и $(n-2)$ корня с отрицательными вещественными частями.

Известно [1, с. 74], что в этом случае только с помощью линейного приближения (3) невозможно решить задачу устойчивости системы (2), то есть имеет место критический случай.

Известно также, что при условии (4) с помощью неособого преобразования систему (3) можно привести к виду [1, с. 118]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1, \\ \dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = 3, \dots, n), \end{cases} \tag{5}$$

а систему (2) – к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 + X_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + X_2(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 3, \dots, n), \end{cases} \tag{6}$$

где вектор-функция $X(x_1, \ldots, x_n)$ содержит члены не ниже второй степени переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Следуя Ляпунову [1, с. 153], будем предполагать, что для уравнений (6) выполняется следующее условие: все постоянные a_{i1} и a_{i2} $(i = 3, \ldots, n)$ равны нулю. Тогда уравнения (6) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 + X_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + X_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_i = a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n + X_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 3, \ldots, n). \end{cases} \tag{7}$$

В работах [2], [3] приведены необходимые и достаточные условия, при которых системы линейных дифференциальных уравнений неустойчивы по действующей силе.

Здесь получим достаточные условия, накладываемые на функции $X_i(x_1, \ \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, при которых тривиальное решение системы (7) будет асимптотически устойчивым по действующей силе [2].

Рассмотрим систему (7) в общем случае. Пусть для системы (7) существует определенно-положительная функция

$$V(x_1, \ldots, x_n) = V_1(x_1, x_2) + \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{ij}x_ix_j, \tag{8}$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \qquad \lim_{||x||_n \to \infty} V(x_1, \ldots, x_n) = \infty, \tag{9}$$

$$2) \qquad x_1\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = 0, \tag{10}$$

$$3) \qquad U = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}X_1(x_1, \ldots, x_n) + \frac{\partial V_1}{\partial x_2}X_2(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{ij}x_jX_i(x_i, \ldots, x_n) \tag{11}$$

является знакопостоянной отрицательной функцией при $||x||_n = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$, причем $U = 0$ – многообразие точек, не содержащее целых полутраекторий системы (7) при $T \le t < \infty$. Так как система

$$\dot{x}_i = a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = 3, \ldots, n) \tag{12}$$

асимптотически устойчива, то при любой определенно-отрицательной квадратической форме $W(x_3, \ldots, x_n)$ коэффициенты b_{ij} можно определить из условия

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{ij}x_ix_j\right)\Bigg|_{(12)} = W(x_3, \ldots, x_n) \tag{13}$$

единственным образом.

Тогда производная по времени функции $V(x_1, \ldots, x_n)$ в силу системы (7) равна

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(7)} &= -\alpha x_2\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}X_1(x_1, \ldots, x_n) + \alpha x_1\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2}X_2(x_1, \ldots, x_n) + \\ &+ \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{ij}x_jX_i(x_1, \ldots, x_n) + W(x_3, \ldots, x_n) = U(x_1, \ldots, x_n) + W(x_3, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

При условиях (9) – (11) она является знакопостоянной отрицательной функцией при $||x||_n < \infty$, откуда следует, что для системы (7) выполняются все условия теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [1, с. 463]. Тогда тривиальное решение системы (7) асимптотически устойчиво в целом. Следовательно, тривиальное решение системы (7) асимптотически устойчиво и по действующей силе [3].

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 1. Если для системы (7) существует определенно-положительная функция $V(x_1, \ldots, x_n)$ в виде (8) такая, что имеют место условия (9) – (11), то тривиальное решение системы (7) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Теперь снова рассмотрим систему (7). Пусть функции $X_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $X_2(x_1, \ldots, x_n)$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} X_1(x_1,\ldots,x_n) &= X_1^{(0)}(x_1) + X_1'(x_1,\ldots,x_n) = X_1(x_1,0,\ldots,0) + X_1'(x_1,\ldots,x_n) = \\ &= g_0 x_1^m + g_1 x_1^{m+1} + \ldots + X_1'(x_1,\ldots,x_n), \\ X_2(x_1,\ldots,x_n) &= X_2^{(0)}(x_2) + X_2'(x_1,\ldots,x_n) = X_2(0,x_2,0,\ldots,0) + X_2'(x_1,\ldots,x_n) = \\ &= \varphi_0 x_2^k + \varphi_1 x_2^{k+1} + \ldots + X_2'(x_1,\ldots,x_n), \end{aligned}$$

где $g_0, g_1, \varphi_0, \varphi_1$ – постоянные. В этом случае система (7) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 + g_0 x_1^m + g_1 x_1^{m+1} + \ldots + X_1'(x_1,\ldots,x_n), \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + \varphi_0 x_2^k + \varphi_1 x_2^{k+1} + \ldots + X_2'(x_1,\ldots,x_n), \\ \dot{x}_i = \alpha_{i3} x_3 + \ldots + a_{in} x_n + X_i(x_1,\ldots,x_n) \quad (i = 3,\ldots,n). \end{cases} \tag{14}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если система (7) имеет вид (14) и разложения функций $X_1^{(0)}$ по x_1 и $X_2^{(0)}$ по x_2 содержат только нечетные степени соответствующих переменных с неположительными коэффициентами, хотя бы один из которых в каждом разложении отличен от нуля, а

$$x_1 X_1'(x_1,\ldots,x_n) + x_2 X_2'(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{ij} x_j X_i(x_1,\ldots,x_n) \tag{15}$$

– знакопостоянная отрицательная функция при $||x||_n < \infty$, то тривиальное решение системы (7) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Доказательство. Пусть система (7) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 + g_0 x_1^m + g_2 x_1^{m+2} + \ldots + X_1'(x_1,\ldots,x_n), \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + \varphi_0 x_2^k + \varphi_2 x_2^{k+2} + \ldots + X_2'(x_1,\ldots,x_n), \\ \dot{x}_i = \alpha_{i3} x_3 + \ldots + a_{in} x_n + X_i(x_1,\ldots,x_n), \end{cases} \tag{16}$$

где $g_{2i} \le 0$, $\varphi_{2i} \le 0\,(i = 0,1,2,\ldots)$, а $m = 2l+1$, $k = 2p+1$, причем существуют $g_m \neq 0$, $\varphi_p \neq 0$.

Рассмотрим определенно-положительную функцию

$$V(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{ij} x_i x_j, \tag{17}$$

где коэффициенты b_{ij} определяются из условия (13). В этом случае

$$\begin{aligned}
\dot{V}|_{(16)} &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{ij}x_jX_i(x_1,\ldots,x_n) + W(x_3,\ldots,x_n) = \\
&= -\alpha x_1x_2 + g_0x_1^{m+1} + g_2x_1^{m+3} + \ldots + x_1X_1'(x_1,\ldots,x_n) + \alpha x_1x_2 + \varphi_0x_2^{k+1} + \\
&+ \varphi_2x_2^{k+3} + \ldots + x_2X_2'(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{ij}x_jX_i(x_1,\ldots,x_n) + \\
&+ W(x_3,\ldots,x_n) = \sum_{i=0}^{\infty} g_{2i}x_1^{m+2i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{2i}x_2^{k+2i+1} + x_1X_1'(x_1,\ldots,x_n) + \\
&+ x_2X_2'(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{ij}x_jX_i(x_1,\ldots,x_n) + W(x_3,\ldots,x_n) = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} g_{2i}x_1^{2l+1+2i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{2i}x_2^{2p+1+2i+1} + x_1X_1'(x_1,\ldots,x_n) + x_2X_2'(x_1,\ldots,x_n) + \\
&+ \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{ij}x_jX_i(x_1,\ldots,x_n) + W(x_3,\ldots,x_n) = \sum_{r=l+1}^{\infty} g_{2(r-l-1)}x_1^{2r} + \\
&+ \sum_{d=p+1}^{\infty} \varphi_{2(d-p-1)}x_2^{2d} + x_1X_1'(x_1,\ldots,x_n) + x_2X_2'(x_1,\ldots,x_n) + \\
&+ \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{ij}x_jX_i(x_1,\ldots,x_n) + W(x_3,\ldots,x_n),
\end{aligned}$$

где $r = i + l + 1$, $d = i + p + 1$.

Так как $g_{2i} \leq 0$, $\varphi_{2i} \leq 0$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, а также существуют $g_m \neq 0$, $\varphi_p \neq 0$ и выполняется условие (15), то функция $\dot{V}|_{(16)}$ будет определенно-отрицательной при $||x||_n < \infty$. Очевидно, что для функции (17) выполняется также условие

$$\lim_{||x||_n\to\infty} V(x_1,\ldots,x_n) = \infty,$$

то есть в данном случае для уравнений (16) удовлетворяются все условия теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [4]. Следовательно, тривиальное решение уравнения (16) асимптотически устойчиво в целом. В этом случае оно будет асимптотически устойчивым и по действующей силе [3]. □

1. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.:Наука,1966. – 530 с.
2. *Габриелян М.С., Шагинян С.Г.* О неустойчивости систем дифференциальных уравнений при интегрально-малых возмущениях // Уч. записки ЕГУ. – 1989. – N 1. – С. 27–32.
3. *Шагинян С.Г.* Об одной задаче теории устойчивости // Уч. записки ЕГУ. – 1986. – N 2. – С. 39–45.
4. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, вып. 3. – С. 345–350.

Армянская Сельскохоз. Академия, Ереван
samvel_ham@yahoo.com

Получено 15.11.2002