УДК 531.36

©2002. **В.Е. Пузырев**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕПОЛНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

В работе рассмотрен вопрос о влиянии диссипативных сил с частичной диссипацией энергии на устойчивость положения относительного равновесия механической системы общего вида с позиционными и циклическими координатами. Доказана теорема об асимптотической устойчивости. В качестве примера рассмотрена система с четырьмя степенями свободы и установлена асимптотическая устойчивость ее равномерных вращений.

Задача о влиянии диссипативных сил на устойчивость положения равновесия механической системы была поставлена В. Томсоном и П. Тэйтом в "Курсе натуральной философии"(1867). Ими были сформулированы условия, при которых влияние трения на систему приводит к асимптотической устойчивости или неустойчивости [1]. Эти результаты были уточнены, развиты и строго доказаны в работах Н.Г. Четаева [2] и Л. Сальвадори [3]. Из публикаций последних лет, посвященных этой проблеме, отметим работы [4 – 6]. В данной работе рассматривается вопрос о влиянии диссипативных сил, линейных по части обобщенных скоростей, на устойчивость стационарного движения консервативной механической системы.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Рассмотрим консервативную механическую систему с кинетической энергией

$$T(q_i,\dot q_i,\dot r_j)=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol q}^T\boldsymbol A(\boldsymbol q)\dot{\boldsymbol q}+\dot{\boldsymbol q}^T\boldsymbol B(\boldsymbol q)\dot{\boldsymbol r}+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol r}^T\boldsymbol C(\boldsymbol q)\dot{\boldsymbol r},$$

где $\boldsymbol q,\boldsymbol r$ – векторы размерности $m+n$ и l соответственно; $\boldsymbol A$ и $\boldsymbol C$ суть квадратные, симметрические, положительно-определенные матрицы соответствующих размерностей, $\boldsymbol B$ – прямоугольная матрица размерности $l\times(m+n)$. Предполагаем, что все три матрицы имеют непрерывные частные производные второго порядка; координаты q_i являются позиционными, а r_j – циклическими; верхний индекс T означает знак транспонирования. Считаем, что система допускает положение относительного равновесия (стационарное движение):

$$\boldsymbol q=\boldsymbol q_0,\quad \dot{\boldsymbol q}=\boldsymbol 0,\quad \dot{\boldsymbol r}=\dot{\boldsymbol r}_{\boldsymbol 0}, \tag{1}$$

причем величину $\boldsymbol q_0$ можно, не уменьшая общности, выбрать равной нулю.

Выражая вектор циклических скоростей $\dot{\mathbf r}$ из равенства

$$\boldsymbol B\dot{\boldsymbol q}+\boldsymbol C\dot{\boldsymbol r}=\boldsymbol\beta, \tag{2}$$

записываем функцию Рауса в виде $R=T-\dot{\boldsymbol r}^T\boldsymbol\beta=R_2+R_1+R_0$, где

$$R_2=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol q}^T[\boldsymbol A-\boldsymbol B^T(\boldsymbol C^{-1})^T\boldsymbol B]\dot{\boldsymbol q},\quad R_1=\boldsymbol\beta^T\boldsymbol C^{-1}\boldsymbol B\dot{\boldsymbol q},\quad R_0=-\frac{1}{2}\boldsymbol\beta^T\boldsymbol C^{-1}\boldsymbol\beta.$$

Введем обычным образом [7] кинетический потенциал Рауса

$$L_R=R-\Pi=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol q}^T\widetilde{\boldsymbol A}(\boldsymbol q)\dot{\boldsymbol q}\;+\;\widetilde{\boldsymbol B}(\boldsymbol q)\dot{\boldsymbol q}\;-\;W(\boldsymbol q),$$

где $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{C}^{-1})^T\boldsymbol{B}$, $\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}$, $W = \dfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\beta}^T(\boldsymbol{C}^{-1})^T\boldsymbol{\beta} + \Pi(\boldsymbol{q})$ – приведенная потенциальная энергия. Введем следующие обозначения

$$\boldsymbol{A}_0 = \widetilde{\boldsymbol{A}}(\mathbf{0}), \quad \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{D}(\mathbf{0}) - \boldsymbol{D}^T(\mathbf{0}), \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{B}}}{\partial\boldsymbol{q}}, \quad \boldsymbol{C}_0 = \Big[\frac{\partial^2 W}{\partial\boldsymbol{q}^2} - \frac{\partial^2 W^T}{\partial\boldsymbol{q}^2}\Big]_{\boldsymbol{q}=\mathbf{0}}. \tag{3}$$

Представим матрицы $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ в виде

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{B_{11}} & \mathbf{B_{12}} \\ \mathbf{B_{21}} & \mathbf{B_{22}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{C_{11}} & \mathbf{C_{12}} \\ \mathbf{C_{21}} & \mathbf{C_{22}} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\boldsymbol{A}_{11}$, $\boldsymbol{B}_{11}$, $\boldsymbol{C}_{11}$ – квадратные матрицы порядка m; $\boldsymbol{A}_{22}$, $\boldsymbol{B}_{22}$, $\boldsymbol{C}_{22}$ – квадратные матрицы порядка n; $\boldsymbol{A}_{12}$, $\boldsymbol{B}_{12}$, $\boldsymbol{C}_{12}$ – прямоугольные матрицы порядка $m\times n$. Нетрудно видеть, что выполняются равенства $\boldsymbol{A}_{21} = \boldsymbol{A}_{12}^T$, $\boldsymbol{B}_{21} = -\boldsymbol{B}_{12}^T$, $\boldsymbol{C}_{21} = \boldsymbol{C}_{12}^T$.

Будем предполагать, что квадратичная форма

$$V^{(2)}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{A}_0\,\dot{\boldsymbol{q}} \;+\; \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{C}_0\,\boldsymbol{q}) \tag{4}$$

является положительно-определенной (то есть $\boldsymbol{A}_0 > 0$, $\boldsymbol{C}_0 > 0$). Как следует из теоремы Ляпунова [8], движение (1) в этом случае устойчиво (неасимптотически). Действительно, выбирая в качестве функции Ляпунова V возмущение интеграла энергии $R_2 - R_0 + \Pi = h$ [7] и используя уравнения движения в форме Рауса

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L_R}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}} \;-\; \frac{\partial L_R}{\partial\boldsymbol{q}} \;=\; \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}},\ \mathbf{q}), \tag{5}$$

можно убедиться в том, что полная производная по времени $\dot{V}$ равна нулю (форма $V^{(2)}$ представляет собой совокупность слагаемых второго порядка в разложении V). Отметим также, что уравнения Рауса (исключая часть уравнений, которые содержат возмущения циклических скоростей и описываются равенствами (2)), линеаризованные в окрестности движения (1), имеют вид

$$\boldsymbol{A}_0\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{B}_0\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}_0\boldsymbol{q} = 0. \tag{6}$$

Очевидно, что квадратичная форма $V^{(2)}$ является первым интегралом уравнения (3), и её полная производная по времени в силу этого уравнения тождественно равна нулю.

Замечание 1. Напомним, что вектор непотенциальных сил $\mathbf{Q}$ в уравнениях (5) тождественно равняется нулю для консервативной системы [7]. Отличным от нуля этот вектор станет в последующем изложении, когда в изучаемой механической системе появятся диссипативные силы.

2. Асимптотическая устойчивость в случае неполной диссипации энергии. Предположим теперь, что на систему воздействуют силы сопротивления линейные по скоростям $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2, \ldots,$ $\dot{q}_m$. Обозначим $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)^T$, где $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$ – вещественные векторы размерностей m и n соответственно. Уравнения возмущённого движения, соответствующие системе (5), при этом запишутся в виде:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A}_{11}\ddot{\boldsymbol{q}}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\ddot{\boldsymbol{q}}_2 + \boldsymbol{B}_{11}\dot{\boldsymbol{q}}_1 + \boldsymbol{B}_{12}\dot{\boldsymbol{q}}_2 + \boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{C}_{12}\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{N}_1 - \boldsymbol{f}\dot{\boldsymbol{q}}_1, \\ \boldsymbol{A}_{21}\ddot{\boldsymbol{q}}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\ddot{\boldsymbol{q}}_2 + \boldsymbol{B}_{21}\dot{\boldsymbol{q}}_1 + \boldsymbol{B}_{22}\dot{\boldsymbol{q}}_2 + \boldsymbol{C}_{21}\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{C}_{22}\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{N}_2. \end{gathered} \tag{7}$$

Векторные функции $\boldsymbol{N}_1,\ \boldsymbol{N}_2$ представляют собой совокупность нелинейных слагаемых относительно возмущений позиционных координат и скоростей, $\boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{f}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathbf{1}}$ – диссипативные силы. При $\boldsymbol{N}_1 = \mathbf{0},\ \boldsymbol{N}_2 = \mathbf{0},\ \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ система (7) переходит в систему (6). Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть для заданной механической системы определены матрицы $\boldsymbol{A}_0,\ \boldsymbol{B}_0,$ $\boldsymbol{C}_0$ согласно формулам (3). Предположим, что переопределенная система $m+n$ уравнеий с n неизвестными

$$\boldsymbol{A}_{12}\ddot{\mathrm{x}} + \boldsymbol{B}_{\mathbf{12}}\dot{\mathrm{x}} + \boldsymbol{C}_{\mathbf{12}}\mathrm{x} = -\boldsymbol{C}_{\mathbf{11}}\boldsymbol{\alpha},$$
$$\boldsymbol{A}_{22}\ddot{\mathrm{x}} + \boldsymbol{B}_{\mathbf{22}}\dot{\mathrm{x}} + \boldsymbol{C}_{\mathbf{22}}\mathrm{x} = -\boldsymbol{C}_{\mathbf{21}}\boldsymbol{\alpha} \quad (\mathrm{x} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}) \tag{8}$$

несовместна ни при каких значениях постоянных $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$, не превосходящих по модулю некоторой величины α_0. Тогда добавление произвольных диссипативных сил, линейных по $\dot{\boldsymbol{q}}_1$ (с полной диссипацией энергии по $\dot{\boldsymbol{q}}_1$), приводит к тому, что устойчивое движение (1) становится асимптотически устойчивым по позиционным координатам и скоростям. Эта устойчивость является экспоненциальной и равномерной. Циклические скорости являются устойчивыми неасимптотически и при неограниченном возрастании времени стремятся к некоторым предельным значениям.

Доказательство. Рассмотрим линеаризованную систему уравнений возмущённого движения $(7)_l$, которая получается из (7), если в последней положить $\boldsymbol{N}_1 = \mathbf{0},\ \boldsymbol{N}_2 = \mathbf{0}$, и покажем, что её нулевое решение асимптотически устойчиво. Возьмем в качестве функции Ляпунова $V^{(2)}$ из (4). Эта функция определённо-положительна, а её полная производная по времени в силу системы $(7)_l$ неположительна: $\dot{V} = -\dot{\boldsymbol{q}}_1^T \boldsymbol{f}\ \dot{\boldsymbol{q}}_1 \leq 0$ и обращается в ноль только при $\dot{\boldsymbol{q}}_1 = \mathbf{0}$, то есть на множестве

$$K = \{(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})^T : \dot{\boldsymbol{q}}_1 = \mathbf{0},\ \boldsymbol{q}_1 = \mathbf{c}\}, \tag{9}$$

где $\mathbf{c}$ – некоторая постоянная величина из малой окрестности начала пространства $\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$. На множестве (9) система $(7)_l$ переходит в

$$\boldsymbol{A}_{12}\ddot{\boldsymbol{q}}_2 + \boldsymbol{B}_{12}\dot{\boldsymbol{q}}_2 + \boldsymbol{C}_{12}\boldsymbol{q}_2 = -\boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{A}_{22}\ddot{\boldsymbol{q}}_2 + \boldsymbol{B}_{22}\dot{\boldsymbol{q}}_2 + \boldsymbol{C}_{22}\boldsymbol{q}_2 = -\boldsymbol{C}_{21}\boldsymbol{c},$$

то есть систему, совпадающую с (8), и, следовательно, несовместную. Таким образом, множество K не содержит целых полутраекторий – решений системы $(7)_l$, за исключением нулевого, значит функция $V^{(2)}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости [9]. Поскольку система $(7)_l$ линейна, то устойчивость является экспоненциальной и равномерной. Иными словами, вещественные части всех корней характеристического уравнения

$$\det[\boldsymbol{A}_0\lambda^2 + (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{B}_0)\lambda + \boldsymbol{C}_0] = 0, \quad \boldsymbol{F} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{f}, \mathbf{0})$$

отрицательны. Но тогда, согласно теореме А.М. Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению [8], асимптотически устойчивым является и нулевое решение полной системы (7), причем равномерно и экспоненциально [10]. Что же касается циклических скоростей, то для их возмущений из уравнения (2) получаем

$$\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}), \quad \dot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{C}^{-1}(\mathbf{0})\boldsymbol{\beta}_0. \tag{10}$$

Выражение в правой части (10) может быть сделано как угодно малым, при условии, что норма разности $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0$ достаточно мала, поскольку переменные $\dot{\boldsymbol{q}},\ \boldsymbol{q}$ устойчивы, а функции $\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}$ непрерывны. Таким образом, решение (1) устойчиво по отношению к циклическим скоростям. Более того, возмущенные движения являются асимптотическими: позиционные скорости стремятся к нулю, позиционные координаты – к значениям, соответствующим изучаемому положению равновесия; цикличекие скорости стремятся к некоторым постоянным значениям "близким"к невозмущенным. □

Замечание 2. Как можно видеть из приведенного доказательства, утверждение теоремы останется справедливым в случае, когда матрицы $\boldsymbol{A}_0,\ \boldsymbol{B}_0,\ \boldsymbol{C}_0$ являются периодическими [10] или почти-периодическими [11] по времени. Проблема заключается в том, что если для решения вопроса о совместности системы (8) можно указать конструктивный алгебраический способ, то в случае зависимости от времени сделать это намного сложнее, хотя в приложениях можно использовать численные методы для нахождения собственных значений.

Замечание 3. Утверждение теоремы остается в силе и в случае воздействия на систему произвольных гироскопических по $\dot{\mathbf{q}}_1$ сил. Нетрудно видеть, что в этом случае функция Ляпунова и ее полная производная по времени в силу системы $(7)_l$ не изменятся, равно как и система (8), хотя в сами уравнения движения (6) (и систему $(7)_l$) добавятся соответствующие гироскопические члены.

3. Пример. Устойчивость равномерных вращений системы с четырьмя степенями свободы. Рассмотрим жесткий невесомый стержень O_1O_2, на концах которого расположены материальные точки с одинаковыми массами $m_1,$ подвешенный посредством идеального сферического шарнира на невесомой нерастяжимой нити в точке O (в положении равновесия стержень расположен горизонтально). Материальная точка $O_3,$ с массой $m_\star,$ совершает свободные колебания вдоль стержня под действием силы тяжести, упругой силы и силы вязкого трения. Примем длину стержня за $2d$, а длину нити – за d_0. Введем системы координат: неподвижную – с центром в точке O и первой осью, направленной против действия силы тяжести, и связанную с треугольником OO_1O_2. Первая ось связанной системы координат направлена по нити, вторая – параллельна прямой $O_1O_2,$ третья ось перпендикулярна плоскости треугольника OO_1O_2 (обе системы координат – правые). Выберем в качестве обобщенных координат углы Эйлера $\theta,\ \varphi,\ \psi,$ характеризующие положение связанной системы относительно неподвижной, и u – отношение ординаты точки O_3 в связанной системе координат к величине d_0. Определив радиус-векторы материальных точек в связанной системе координат $\boldsymbol{\rho}_j^T = \{d_0, (-1)^j\, d, 0\}\ (j=1;2),\ \boldsymbol{\rho}_3^T = d_0\,\{1, u, 0\},$ получаем для кинетической и потенциальной энергий системы

$$T = \frac{1}{2}\{[md_0^2(\dot{u}^2 + 2\dot{u}\ \omega_3 - 2u\ \omega_1\ \omega_2) + (2m_1d^2 + md_0^2u^2){\omega_1}^2 + (2m_1+m)d_0^2{\omega_2}^2 +$$

$$+[2m_1(d^2+d_0^2) + md_0^2(u^2+1)]{\omega_3}^2\}, \tag{11}$$

$$\Pi = -d_0g\ [(2m_1+m)\sin\theta\sin\varphi + m\ u\ \sin\theta\cos\varphi] + \frac{1}{2}k\ d_0^2\ u^2,$$

g – ускорение силы тяжести, k – коэффициент упругой силы.

Подставим кинематические соотношения Эйлера

$$\omega_1 = \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi,\ \omega_2 = -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\sin\theta\cos\varphi,\ \omega_3 = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta$$

в выражение для T из (11) и введем безразмерные параметры $\gamma,\ \mu,\ \Omega$ и время τ по формулам

$$\gamma = \frac{d}{d_0}, \quad \mu = \frac{m_\star}{2m_1}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{kd_0}{m_\star g}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{g}{d_0}}t. \tag{12}$$

Учитывая, что $l = 1;\ m = 1;\ n = 2,$ для элементов матриц $\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}$, с точностью до положительного множителя, получаем следующие выражения:

$$a_{11} = \mu,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = \mu,\ a_{22} = \sin^2\varphi + \gamma\cos^2\varphi + \mu(u\cos\varphi - \sin\varphi)^2,$$

$$a_{23} = 0,\ a_{33} = 1 + \gamma + \mu(1 + u^2),$$

$$b_{11} = \mu\cos\theta, \quad b_{12} = [(\gamma - 1)\sin\varphi\cos\varphi + \mu(u\cos\varphi - \sin\varphi)(u\sin\varphi + \cos\varphi)]\sin\theta, \tag{13}$$

$$b_{13} = [1 + \gamma + \mu(1 + u^2)]\cos\theta,$$

$$C = [1 + \gamma + \mu(1 + u^2)]\ \cos^2\theta\ +\ [\gamma\ \sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \mu(u\sin\varphi - \cos\varphi)^2]\ \sin^2\theta.$$

Рассматриваемая система допускает стационарное движение

$$u = 0,\ u' = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2},\ \theta' = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2},\ \varphi' = 0,\ \psi' = \omega, \tag{14}$$

при котором треугольник OO_1O_2 совершает равномерные вращения вокруг вертикали, материальная точка O_3 при этом совпадает с серединой отрезка O_1O_2. Воспользуемся доказанной в п. 2 теоремой для исследования вопроса об устойчивости движения (14). Используя формулы (3), находим

$$\mathbf{A_0} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & \mu \\ 0 & 1+\mu & 0 \\ \mu & 0 & 1+\gamma+\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B_0} = \mathbf{2}\omega\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mu \\ 0 & -1-\mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C_0} = \begin{pmatrix} \mu(\Omega^2 - \omega^2) & 0 & \mu(1-\omega^2) \\ 0 & (1+\mu)(1-\omega^2) & 0 \\ \mu(1-\omega^2) & 0 & 1+\mu-(1-\gamma+\mu)\omega^2 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрица $\mathbf{C_0}$ предполагается определённо-положительной, откуда выводим неравенства

$$\omega^2 < \min(1, \Omega^2), \quad \Omega^2 > \omega^2 + \frac{\mu(1-\omega^2)^2}{1+\mu-(1-\gamma+\mu)\omega^2}. \tag{15}$$

Система (8) принимает вид

$$\begin{gathered} \mu\ [y'' + (1-\omega^2)y] = -\mu\ (\Omega^2 - \omega^2)\alpha, \\ (1+\mu)\ [x'' + 2\omega y' + (1-\omega^2)x] = 0, \\ (1+\gamma+\mu)y'' - 2(1+\mu)\omega x' + [1+\mu-(1-\gamma+\mu)\omega^2]\ y = -\mu\ (1-\omega^2)\alpha. \end{gathered} \tag{16}$$

Предположим, что первое из уравнений (16) имеет частное решение $y = c_1\sin\lambda\tau$, где $\lambda = \sqrt{1-\omega^2}$, c_1 – произвольная постоянная. Тогда из третьего уравнения системы (16) находим

$$x = \frac{c_1\gamma}{2\lambda\omega(1+\mu)}(1-2\omega^2)\ \cos\lambda\tau$$

и подставляем во второе уравнение этой системы. Получаем равенство

$$\omega^2(1+\mu)^2(1-\omega^2) = 0, \tag{17}$$

которое, с учётом первого из условий (15), возможно только при условии $\omega = 0$ (вращение отсутствует). В этом случае система (16) совместна, множество

$$K = \{(u', x', y', u, x, y)^T : \ u' = 0, \ u = \alpha\}$$

содержит целую ненулевую полутраекторию

$$u = 0, \ u' = 0, \ x = 0, \ x' = 0, \ y = c_1 \sin \lambda\tau, \ y' = c_1\lambda \cos \lambda\tau, \ \beta = 0,$$

и движение устойчиво неасимптотически, поскольку отсутствует диссипация энергии (механическая система совершает плоскопараллельное колебательное движение относительно главной плоскости π, перпендикулярной плоскости треугольника OO_1O_2, точка O_3 остаётся во время движения в плоскости π).

Если же $\omega \neq 0$, то равенство (17) не выполняется, и система (16) несовместна для частного решения $y = c_1 \sin \lambda\tau$ (аналогично проверяется и решение вида $y = c_2 \cos \lambda\tau$). Проверим также возможность существования частного решения вида $y = c_3$. Из третьего уравнения системы (16) выражаем $y = -c_3\mu(1-\omega^2)/[1+\mu-(1-\gamma+\mu)\omega^2]$ и подставляем во второе уравнение (нетрудно видеть, что из первого уравнения следует $x = 0$). Выражение, которое при этом получается, совпадает с определителем одного из главных миноров матрицы $\mathbf{C_0}$ и, согласно условиям (15), не может равняться нулю.

Таким образом, система (16) несовместна, все условия теоремы выполнены, и равномерные вращения (14) асимптотически устойчивы по отношению к позиционным координатам u, θ, φ и их скоростям.

1. *Thomson W., Tait P.* Treatise on Natural Philosophy. P. I. - Cambridge: Cambridge University Press, 1879. – 508 p.
2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 532 с.
3. *Salvadori L.* Sull'estenzione di sistemi dissipative del criterio di stabilita del Routh //Ric. mat.–1966.– **15**, № 1. – P.162–167.
4. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем// Итоги науки и техники. – Сер. Общая механика. – Т. 6. – М.: ВИНИТИ, 1983. – 132 с.
5. *Андреев А.С., Ризито К.* Об устойчивости обобщенного стационарного движения// Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып. 3. – С. 339–349.
6. *Стороженко В.О.* До дослідження дії неконсервативних позиційних сил у системах з обертанням// Доп. НАНУ. – 1998. – № 7. – С. 67–70.
7. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. - М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
8. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
9. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
10. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
11. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`techmech@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 30.10.02