

УДК 531.38

©2002. А.П.Харламов

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ И ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА КОВАЛЕВСКОЙ В СЛУЧАЕ ДЕЛОНЕ

Уравнения движения гироскопа С.В.Ковалевской в случае нулевого значения постоянной четвертого интеграла при любых допустимых значениях свободных параметров, входящих в эти уравнения, приведены к виду, применимому для реализации алгоритма построения компьютерной анимации полного решения. Предложена не содержащая особых точек параметризация уравнения подвижного годографа.

Описывающие движение твердого тела вокруг неподвижной точки уравнения Эйлера-Пуассона, как указала С.В.Ковалевская, допускают четвертый интеграл при ограничениях $A = B = 2C$ на моменты инерции относительно главных осей в точке закрепления. При нулевом значении постоянной интеграла Ковалевской (случай Н.Б.Делоне) записанные в безразмерном виде соотношения между основными переменными, как указано в работах [1, 2], имеют вид

$$2p_1^{\bullet} = p_2 p_3, \quad (1)$$

$$p_1^2 + \frac{p_3^2}{4} = 1, \quad p_2^2 = n\sqrt{1-c^2}p_3 - 2ncp_1 - p_1^2, \quad (2)$$

$$\nu_1 = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2n}, \quad \nu_2 = -\frac{p_1 p_2}{n}, \quad (3)$$

$$\nu_3 = \frac{2nc + (p_1^2 + p_2^2)p_1}{np_3} = \sqrt{1-c^2}p_1 + \frac{c}{2}p_3$$

и, следовательно,

$$\omega_1 = p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2 + p_3 \nu_3 = \frac{1}{2}\sqrt{1-c^2}p_1 p_3 + c(2-p_1^2),$$

$$\omega_\rho^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \omega_1^2 = (1-2c^2)p_1^4 - 5(1-c^2)p_1^2 - 2ncp_1 + \\ + 4(1-c^2) + (cp_1^3 - 2cp_1 + n)\sqrt{1-c^2}p_3, \quad (4)$$

где

$$0 \leq c \leq 1, \quad n > 0 \quad - \quad (5)$$

полулобуса в плоскости параметров (c, n) .

Получаемое исключением p_3 из выражений (2) при значении $p_2^2 = 0$ уравнение

$$p_1^4 + 4ncp_1^3 + 4n^2p_1^2 - 4n^2(1-c^2) = 0 \quad (6)$$

имеет не менее двух действительных корней и обстоятельно исследовано в работе [1]. В полулобосе (5) выделена ограниченная кривыми

$$n_1(c) = \sqrt{\frac{36c^2 - 8 - 27c^4 - c(9c^2 - 8)\sqrt{9c^2 - 8}}{8}}, \quad (7)$$

$$n_2(c) = \sqrt{\frac{36c^2 - 8 - 27c^4 + c(9c^2 - 8)\sqrt{9c^2 - 8}}{8}}, \quad (8)$$

где $\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq c \leq 1$, и отрезком прямой $c = 1$, $0 < n \leq \frac{1}{2}$ закрытая область I существования четырех действительных корней (рис. 1). Принадлежащие кривым (7), (8) значения параметров n, c обеспечивают существование кратных корней уравнения (6). Общая точка кривых (7), (8) – $c = c_* = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $n = n_* = \frac{\sqrt{3}}{3}$ – соответствует изученному в работе [3] случаю тройного корня этого уравнения. На остальной части II полуполосы уравнение (6) имеет два действительных различных корня.

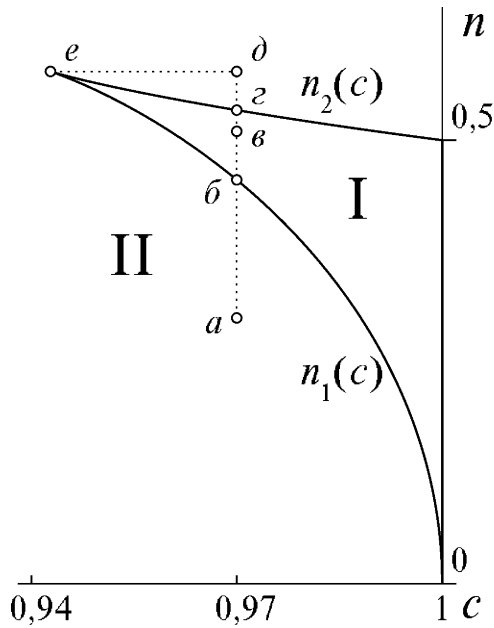


Рис. 1.

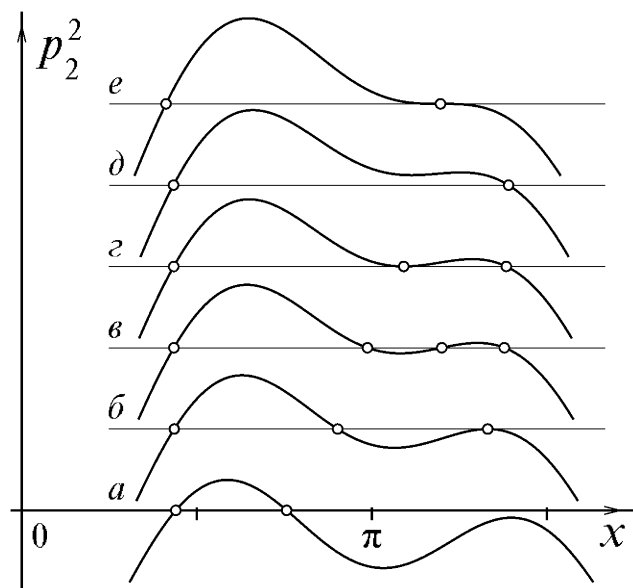


Рис. 2.

Запишем (2) в параметрической форме

$$p_1(x) = \cos x, \quad (9)$$

$$p_2^2(x) = 2n\sqrt{1-c^2} \sin x - 2nc \cos x - \cos^2 x, \quad 0 \leq x < 2\pi, \quad (10)$$

$$p_3(x) = 2 \sin x. \quad (11)$$

Характерное поведение графика функции (10) при прохождении точки (c, n) значений параметров через область I представлено на рис. 2, $a - д$ и его вид в случае тройного корня (c_*, n_*) – на рис. 2, e . Соответствующие положения точек отмечены на рис. 1. Как показано в работе [2], наличие кратного корня при $n = n_1(c)$ определяет тип движения тела – равномерное вращение вокруг вертикали (вследствие тривиальности здесь рассматриваться не будет), а при $n = n_2(c)$ – асимптотически равномерное вращение.

Приведем выражения (1), (3), (9) – (11) к виду, пригодному для применения алгоритма построения визуализации движения [4]. Обозначим через x_1, x_2 два соседних некратных корня уравнения

$$p_2^2(x) = 0 \quad (12)$$

таких, что при $x_1 \leq x \leq x_2$ выполнено: $p_2^2(x) \geq 0$. Тогда из (10) получим

$$\begin{aligned} 2n\sqrt{1-c^2} \sin x_1 - 2nc \cos x_1 &= \cos^2 x_1, \\ 2n\sqrt{1-c^2} \sin x_2 - 2nc \cos x_2 &= \cos^2 x_2. \end{aligned}$$

Эта система имеет единственное решение

$$\begin{aligned} 2n\sqrt{1-c^2} &= -\cos x_1 \cos x_2 \sin \frac{x_1+x_2}{2} \bigg/ \cos \frac{x_2-x_1}{2}, \\ 2nc &= -(1 + \sin x_1 \sin x_2) \cos \frac{x_1+x_2}{2} \bigg/ \cos \frac{x_2-x_1}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

при условии $\sin(x_2 - x_1) \neq 0$. Случай $x_2 = x_1 + \pi$, приводящий к значениям

$$c = 1, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2} \quad (14)$$

будет рассмотрен отдельно.

Случай $c \neq 1$. Выражение (10) при подстановке (13) примет вид

$$p_2^2(x) = \left[\cos \left(x - \frac{x_1+x_2}{2} \right) - \cos \frac{x_2-x_1}{2} \right] \left[\frac{\sin^2 \frac{x_1+x_2}{2}}{\cos \frac{x_2-x_1}{2}} - \cos \left(x + \frac{x_1+x_2}{2} \right) \right].$$

Введем обозначения $\theta_1 = (x_2 - x_1)/4$, $\theta_2 = (x_1 + x_2)/2$, $\theta = x - \theta_2$ и сделаем замену $\sigma(\lambda) = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = -\operatorname{tg} \theta_1 \cos^2 \frac{\lambda}{2} + \operatorname{tg} \theta_1 \sin^2 \frac{\lambda}{2} = -\operatorname{tg} \theta_1 \cos \lambda$, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$. Тогда соотношения (9) – (11) и их производные по переменной λ запишутся так

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= \frac{(1 - \sigma^2) \cos \theta_2 - 2\sigma \sin \theta_2}{1 + \sigma^2}, \\ p_2(\lambda) &= \frac{\sin \theta_1 \sin \lambda}{1 + \sigma^2} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta_2}{\cos 2\theta_1} (1 + \sigma^2) + 2(\sigma^2 - 1) \cos 2\theta_2 + 4\sigma \sin 2\theta_2}, \\ p_3(\lambda) &= 2 \frac{(1 - \sigma^2) \sin \theta_2 + 2\sigma \cos \theta_2}{1 + \sigma^2}, \\ \frac{dp_1}{d\lambda} &= \frac{2\operatorname{tg} \theta_1 \sin \lambda}{(1 + \sigma^2)^2} [(\sigma^2 - 1) \sin \theta_2 - 2\sigma \cos \theta_2], \\ \frac{dp_2}{d\lambda} &= \frac{1}{(1 + \sigma^2)^2 \cos \theta_1} \left\{ 2\sigma^4 \sin 2\theta_2 \cos^2 \theta_1 - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1 - \cos 2\theta_2}{\cos 2\theta_1} + 2 \cos 2\theta_2 (1 + 2 \cos^2 \theta_1) \right] \sigma^3 - 6\sigma^2 \sin 2\theta_2 - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1 - \cos 2\theta_2}{\cos 2\theta_1} - 2 \cos 2\theta_2 (1 + 2 \sin^2 \theta_1) \right] \sigma + 2 \sin 2\theta_2 \sin^2 \theta_1 \right\} \times \\ &\quad \times \left[\frac{1 - \cos 2\theta_2}{\cos 2\theta_1} (1 + \sigma^2) + 2(\sigma^2 - 1) \cos 2\theta_2 + 4\sigma \sin 2\theta_2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{dp_3}{d\lambda} = \frac{4\operatorname{tg}\theta_1 \sin \lambda}{(1 + \sigma^2)^2} \left[(1 - \sigma^2) \cos \theta_2 - 2\sigma \sin \theta_2 \right].$$

Связь основных переменных со временем установим из (1):

$$\lambda^\bullet = \frac{p_2 p_3}{2 \frac{dp_1}{d\lambda}} = -\frac{\cos \theta_1}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta_2}{\cos 2\theta_1} (1 + \sigma^2) + 2(\sigma^2 - 1) \cos 2\theta_2 + 4\sigma \sin 2\theta_2}.$$

Здесь существенным является тот факт, что подрадикальное выражение в полученном представлении строго положительно для любых допустимых значений параметров θ_1, θ_2 на всем отрезке изменения переменной λ .

Полученные соотношения вместе с (3) и составят полный набор функций, необходимый для применения алгоритма [4].

Случай с = 1. (Качественно такие движения рассматривались в работе [5].) Компоненты вектора угловой скорости (4) и соотношения (3) примут вид

$$\omega_1 = 2 - p_1^2, \quad (15)$$

$$\omega_\rho^2 = -(p_1^3 + 2n)p_1, \quad (16)$$

$$\nu_1 = -\frac{n + p_1}{n} p_1, \quad \nu_2 = -\frac{p_1 p_2}{n}, \quad \nu_3 = \frac{p_3}{2}. \quad (17)$$

Значения (14) обращают в ноль (9) - компоненту p_1 , которая в свою очередь обращает в ноль ω_ρ , заданное зависимостью (16). Геометрически это означает пересечение вертикали ν неподвижным годографом. Поскольку ω_ρ входит в знаменатель выражений, определяющих величины угла α и матрицы перехода E алгоритма [4], необходимо соответствующей подстановкой записать эти выражения в явном виде и избавиться от присутствующей там устранимой неопределенности типа $0/0$.

В рассматриваемом случае из (7), (8) имеем $n_1(1) = 0$, $n_2(1) = \frac{1}{2}$. Как показано выше, при $n > \frac{1}{2}$ уравнение (12) имеет два, а при $0 < n < \frac{1}{2}$ - четыре действительных различных корня. Рассмотрим эти интервалы изменения параметра n .

При значениях $n > \frac{1}{2}$ переменная x изменяется в пределах $x_1 = \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} = x_2$, откуда с учетом (9) установим $-1 \leq p_1(x) \leq 0$. Сделаем замену

$$p_1(\lambda) = -\sin^2 \lambda, \quad (18)$$

тогда из (16), (10), (11), подразумевая в дальнейшем зависимость основных величин от переменной λ , получим

$$\omega_\rho = \sqrt{p_1^3 + 2n} \sin \lambda, \quad (19)$$

$$p_2 = \sqrt{p_1 + 2n} \sin \lambda, \quad p_3 = 2\sqrt{1 - p_1} \cos \lambda \quad (20)$$

и, дифференцируя (18), (20), запишем

$$\frac{dp_1}{d\lambda} = -\sin 2\lambda, \quad \frac{dp_2}{d\lambda} = \frac{2(n + p_1) \cos \lambda}{\sqrt{p_1 + 2n}}, \quad \frac{dp_3}{d\lambda} = \frac{4p_1 \sin \lambda}{\sqrt{1 - p_1}}. \quad (21)$$

Угол α определяется из соотношения

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = -\frac{1}{\omega_p^2} \left(\varkappa_1 \frac{dp_1}{d\lambda} + \varkappa_2 \frac{dp_2}{d\lambda} + \varkappa_3 \frac{dp_3}{d\lambda} \right), \quad (22)$$

где

$$\varkappa_1 = p_2\nu_3 - p_3\nu_2, \quad \varkappa_2 = p_3\nu_1 - p_1\nu_3, \quad \varkappa_3 = p_1\nu_2 - p_2\nu_1. \quad (23)$$

Интегрируя (22) с подстановкой (23), (18)-(21), окончательно получим

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2n} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{p_1^3 + 2n} \left[2(2p_1 + n)p_3 \sqrt{p_1 + 2n} \cos \lambda - (2p_1 + 3n)p_3 \frac{dp_2}{d\lambda} + 2np_2 \frac{dp_3}{d\lambda} \right] d\lambda.$$

Содержащие неопределенность компоненты E_{2i}, E_{3i} ($i = 1, 2, 3$) матрицы перехода с учетом (15), (23), (18) - (20) примут вид

$$E_{21} = \frac{1}{nq} \left\{ (2p_1 + n) \sqrt{p_1 + 2n} p_3 \sin \alpha - 2[n + \omega_1(p_1 + n)] \sin \lambda \cos \alpha \right\},$$

$$E_{22} = \frac{1}{nq} \left[(2p_1 + 3n)p_3 \sin \lambda \sin \alpha + 2(n + \omega_1 p_1) \sqrt{p_1 + 2n} \cos \alpha \right],$$

$$E_{23} = -\frac{\sin \lambda}{q} (2p_2 \sin \alpha + p_1 p_3 \cos \alpha),$$

$$E_{31} = -\frac{1}{nq} \left\{ 2[n + \omega_1(p_1 + n)] \sin \lambda \sin \alpha + (2p_1 + n) \sqrt{p_1 + 2n} p_3 \cos \alpha \right\},$$

$$E_{32} = \frac{1}{nq} \left[2(n + \omega_1 p_1) \sqrt{p_1 + 2n} \sin \alpha - (2p_1 + 3n)p_3 \sin \lambda \cos \alpha \right],$$

$$E_{33} = -\frac{\sin \lambda}{q} (p_1 p_3 \sin \alpha - 2p_2 \cos \alpha),$$

где $q = 2\sqrt{p_1^3 + 2n}$. Связь переменной λ со временем установим из (1), привлекая (18), (20), зависимостью

$$\lambda^\bullet = -\frac{1}{2} \sqrt{(2n - \sin^2 \lambda)(1 + \sin^2 \lambda)}.$$

Для значений $0 < n < \frac{1}{2}$ компонента $p_2(x)$, как следует из (10), определена на двух интервалах изменения переменной x : $x_1 = \frac{\pi}{2} \leq x \leq \arccos(-2n) = x_2$,

$x_1 = 2\pi - \arccos(-2n) \leq x \leq \frac{3\pi}{2} = x_2$, где $-2n \leq p_1(x) \leq 0$. Из структуры соотношений (3), (9) - (11) очевидно, что их поведение на указанных интервалах отличается лишь знаком компонент $p_3(x)$ и $\nu_3(x)$, то есть выбором направления осей координат и направлением обхода α неподвижного годографа, но оставляет неизменной картину движения в целом.

Сделаем замену $p_1(\lambda) = -2n \sin^2 \lambda$ и проведем преобразования аналогичные случаю $n > \frac{1}{2}$. Опуская промежуточные рассуждения и подразумевая зависимость основных величин от переменной λ , запишем

$$p_2 = n \sin 2\lambda, \quad p_3 = 2\sqrt{1 - p_1^2},$$

$$\lambda^\bullet = -\frac{p_3}{4},$$

$$\frac{dp_1}{d\lambda} = -2n \sin 2\lambda, \quad \frac{dp_2}{d\lambda} = 2n \cos 2\lambda, \quad \frac{dp_3}{d\lambda} = \frac{8np_1}{p_3} \sin 2\lambda,$$

$$\omega_\rho = \sqrt{2n(p_1^3 + 2n)} \sin \lambda,$$

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2n} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{p_1^3 + 2n} \left[2(2p_1 + n)(p_1 + 2n)p_3 - (2p_1 + 3n)p_3 \frac{dp_2}{d\lambda} + 2np_2 \frac{dp_3}{d\lambda} \right] d\lambda.$$

$$E_{21} = \frac{1}{q} \left\{ (2p_1 + n)p_3 \cos \lambda \sin \alpha - 2[n + \omega_1(p_1 + n)] \sin \lambda \cos \alpha \right\},$$

$$E_{22} = \frac{1}{q} \left[(2p_1 + 3n)p_3 \sin \lambda \sin \alpha + 2(n + \omega_1 p_1) \cos \lambda \cos \alpha \right],$$

$$E_{23} = -\frac{n \sin \lambda}{q} (2p_2 \sin \alpha + p_1 p_3 \cos \alpha),$$

$$E_{31} = -\frac{1}{q} \left\{ 2[n + \omega_1(p_1 + n)] \sin \lambda \sin \alpha + (2p_1 + n)p_3 \cos \lambda \cos \alpha \right\},$$

$$E_{32} = \frac{1}{q} \left[2(n + \omega_1 p_1) \cos \lambda \sin \alpha - (2p_1 + 3n)p_3 \sin \lambda \cos \alpha \right],$$

$$E_{33} = -\frac{n \sin \lambda}{q} (p_1 p_3 \sin \alpha - 2p_2 \cos \alpha),$$

где $q = \sqrt{2n(p_1^3 + 2n)}$.

Вычислительная схема. По выбранным из полуполосы (5) значениям параметров n, c определяем их принадлежность соответствующей области (I или II) и как следствие – количество корней уравнения (12).

При $c = 1$, в зависимости от значения параметра n выбираем соответствующее представление выражений, входящих в алгоритм [4], который и реализуем на заданном интервале изменения переменной λ .

При $c \neq 1$ численно находим корни уравнения (12) из представления (10). Выбираем пару соседних корней, удовлетворяющих условию $p_2^2(x) \geq 0$. В случае $n = n_2(c)$ компонента $\omega_\rho \rightarrow 0$ и угол $\alpha \rightarrow \infty$ при стремлении значения переменной x к кратному корню, поэтому для реализации алгоритма [4] необходимо сократить интервал $x_1 \leq x \leq x_2$ изменения величины x , отступив от кратного корня на малую величину δ ; порядок δ зависит от конкретного используемого метода приближенного вычисления определенного интеграла. Далее находим величины θ_1, θ_2 и применяем алгоритм [4], подставляя соответствующие представления десяти необходимых зависимостей - $p_1(\lambda), p_2(\lambda), p_3(\lambda), \nu_1(\lambda), \nu_2(\lambda), \nu_3(\lambda), \frac{dp_1(\lambda)}{d\lambda}, \frac{dp_2(\lambda)}{d\lambda}, \frac{dp_3(\lambda)}{d\lambda}, \lambda^\bullet(\lambda)$ и задавая интервал изменения переменной λ .

Поиск периодических движений. Частные случаи таких движений были найдены аналитически в работе [6]. Они соответствуют значению параметра $c = 0$. Предложим метод численного поиска таких движений на всей полуполосе (5). Структура выражений (9) - (11), интервал $x_1 \leq x \leq x_2$ изменения переменной x и ее замена переменной λ ,

$$0 \leq \lambda \leq 2\pi k \quad (24)$$

обеспечивают замкнутость подвижного годографа угловой скорости для любых допустимых значений (5) свободных параметров n, c . Следовательно, условие периодичности движения можно сформулировать как требование замкнутости неподвижного годографа на интервале (24). Это требование может быть выражено следующим уравнением

$$\alpha(n, c, k) = \int_0^{2\pi k} \frac{1}{\omega_\rho^2} \left[(p_3\nu_2 - p_2\nu_3) \frac{dp_1}{d\lambda} + (p_1\nu_3 - p_3\nu_1) \frac{dp_2}{d\lambda} + (p_2\nu_1 - p_1\nu_2) \frac{dp_3}{d\lambda} \right] d\lambda = 2\pi m$$

относительно неизвестного значения параметра n при остающемся свободным параметре c и целых параметрах k, m . Здесь величина k определяет кратность длины неподвижного к длине подвижного годографа, а m – количество полных оборотов неподвижного годографа вокруг вертикали.

Вычислительную схему поиска можно представить, например, следующим образом. Для каждого конкретного допустимого значения параметра c и целых конкретных значений k, m проходим выбранный интервал допустимых значений неизвестного n с малым шагом Δn . Если на каком-то шаге функция $f(n) = \alpha(n, c, k) - 2\pi m$ меняет знак, то включается алгоритм поиска нуля функции на отрезке.

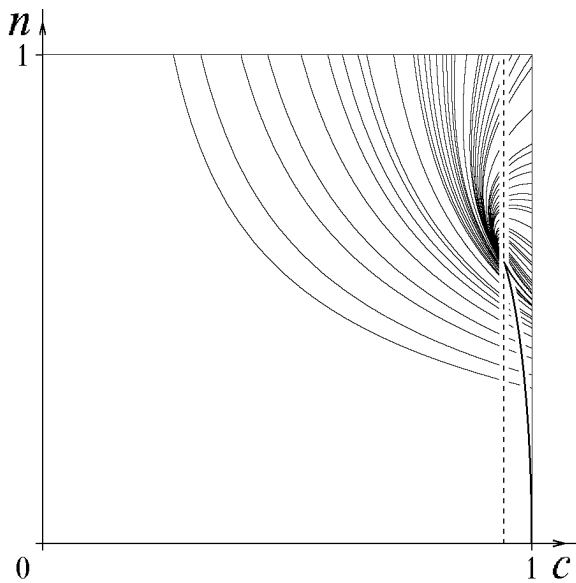


Рис. 3. Значения параметров, соответствующие периодическим движениям.

Поиск периодических движений осуществлялся в области $0 < c \leq 1, 0 < n \leq 1$, для значений $0 \leq k \leq 5, -20 \leq m \leq 0$ с шагом $\Delta c = \Delta n = 2^{-10}$. Результаты представлены на рис.3 в виде изображения точек с координатами c, n в указанной области.

1), показан на рис. 4, в. Перетяжка у подвижного годографа обусловлена существованием локального минимума функции на допустимом интервале (рис. 2, д). Пунктиром изображены неподвижные оси, направленные за выбранную картинную плоскость.

Связем с вектором ν неподвижный в пространстве базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ так, что $\varepsilon_1 = \nu$, и отсчет угла α идет от ε_2 к ε_3 . Характерный вид подвижного и неподвижного годографов угловой скорости для точки из области II (см. рис. 1) представлен в этом базисе на рис. 4, а, для внутренней точки из области I – на рис. 4, б (соответствует меньшему интервалу изменения переменной x – между третьим и четвертым корнями уравнения (12)). Вид годографов для значений параметров из области, в которой находится точка δ (см. рис. 1), показан на рис. 4, в.

Соответствующая движению, представленному на рис. 4, а, траектория центра масс, лежащего на первой оси подвижной системы координат, изображена на рис. 5, а - в в проекциях на координатные плоскости неподвижного базиса.

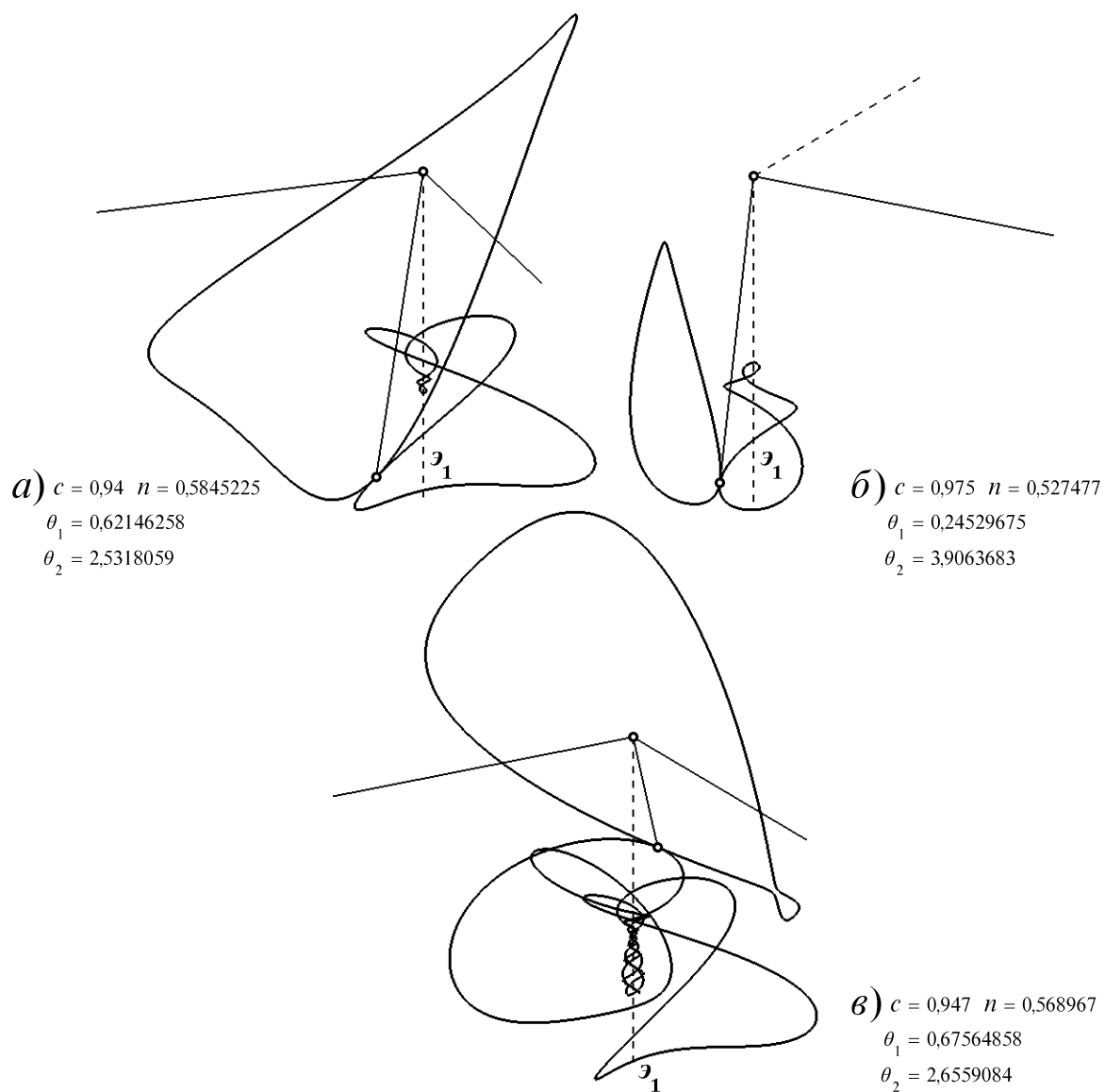


Рис. 4. Варианты годографов.

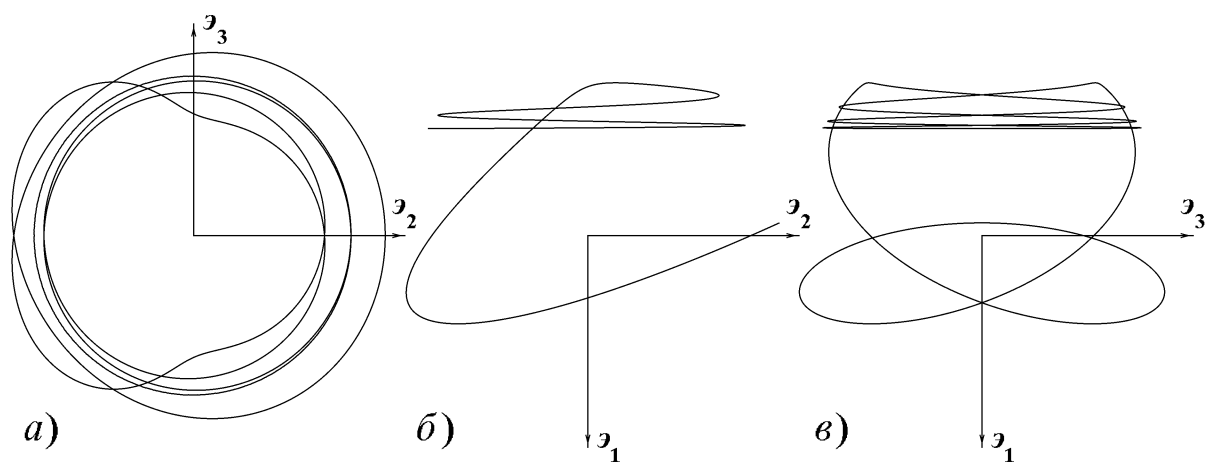


Рис. 5. Траектория центра масс.

При построении компьютерной анимации полных решений задач аналитической динамики зачастую желательно изображать положение и самого движущегося тела, представленного тем или иным образом. Будем рассматривать такое представление в виде трехосного эллипсоида, подобного центральному эллипсоиду инерции тела [7].

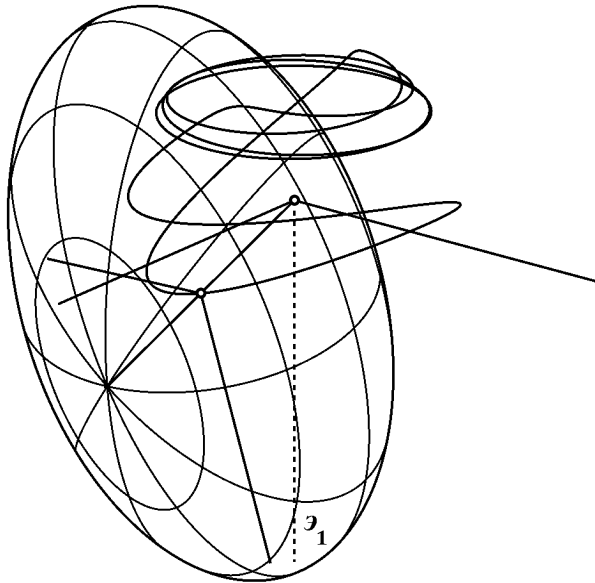


Рис. 6. Интерпретация движения.

Обозначим через A_1, A_2, A_3 главные центральные моменты инерции тела. Тогда из ограничения на главные моменты инерции в неподвижной точке $A = B = 2C$ получим соотношения

$$A_1 = 2(A_2 - A_3), \quad A_1 > A_2 > 2A_3.$$

Принимая во внимание, что $A_2 + A_3 > A_1$, получим: $A_2 < 3A_3$. Обозначим $A_3 = A_1\mu$, тогда $A_2 = A_1\left(\mu + \frac{1}{2}\right)$ и

$$1 > \mu + \frac{1}{2} > 2\mu, \quad 3\mu > \mu + \frac{1}{2},$$

откуда $\frac{1}{4} < \mu < \frac{1}{2}$. Положив $A_1 = 1/a^2$, $a > 0$, находим искомые полуоси изображаемого эллипсоида:

$$a_1 = a, \quad a_2 = a/\sqrt{\mu + \frac{1}{2}}, \quad a_3 = \frac{a}{\sqrt{\mu}}.$$

Такой эллипсоид вместе с траекторией центра масс, соответствующей движению, представленному на рис. 4, a , построен на рис. 6 для выбранных значений параметров $a = 1$ и $\mu = 0,251$ в предположении, что длина его первой полуоси совпадает с расстоянием от неподвижной точки до центра масс.

1. Коваль В.И., Харламов П.В. О годографах угловой скорости гироскопа Ковалевской в случае Делоне // Механика твердого тела.- 1979.- Вып.11.- С.3-17.
2. Харламов П.В., Коваль В.И. Движение гироскопа Ковалевской в случае Делоне // Там же.- 1982.- Вып.14.- С.38-54.
3. Харламов П.В. Движение гироскопа С.В.Ковалевской в случае Б.К.Млодзеевского // Там же. - 1974.- Вып.7.- С.9-17.
4. Харламов М.П. О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - 1981.- Вып.13.- С.10-14.
5. Горр Г.В., Савченко А.Я. Об одном случае движения тяжелого твердого тела в решении С.В.Ковалевской // Там же.- 1970.- Вып.2.- С.66-73.
6. Горр Г.В., Савченко А.Я. Об одном периодическом движении в решении С.В.Ковалевской // Там же.- 1971.- Вып.3.- С.64-69.
7. Харламов А.П. Об изображении движущегося твердого тела при построении компьютерной визуализации полных решений задач динамики // Там же.- 1999.- Вып.28.- С.85-88.