УДК 531.38

©2002. **Е.К. Узбек**

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Изучены условия существования регулярных прецессий гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Введение. Регулярные прецессии гиростата относятся к наиболее наглядным механическим движениям [1, 2]. Примером таких движений служит регулярная прецессия гироскопа Лагранжа относительно вертикали. Начало изучению условий существования прецессий положили Г.Г.Аппельрот [3] и Д.Гриоли [4]. Г.Г.Аппельрот [3] рассматривал прецессии относительно вертикали гироскопов, подобных гироскопам Ковалевской и Горячева-Чаплыгина. Д.Гриоли [4] открыл новый случай интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона, который описывает регулярную прецессию тяжелого твердого тела относительно наклонной оси. Г.В.Горр [1, 2] разработал метод исследования прецессионных движений гиростата для того случая, когда ось, образующая неизменный угол с вертикалью, занимает фиксированное положение в гиростате.

В данной статье рассмотрены регулярные прецессии под действием потенциальных и гироскопических сил [5-9] в предположении, что ось, образующая неизменный угол с вертикалью, может занимать произвольное положение в некоторой плоскости. Доказано, что такие движения описываются только частными решениями случаев Г.Кирхгофа – П.В.Харламова [8, 7] и В.А.Стеклова [6].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается дифференциальными уравнениями класса Г.Кирхгофа (см. работы [4, 5–7, 8])

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathrm{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где обозначено $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\mathrm{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{ij})$ – тензор инерции, построенный в неподвижной точке; $\mathrm{B} = (B_{ij})$ и $\mathrm{C} = (\mathrm{C}_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает производную по времени t.

Уравнения (1), (2) допускают три первые интеграла

$$(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \tag{3}$$

$$(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \tag{4}$$

Движение тела называют прецессией относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$ [1, 2], если постоянен угол между векторами $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$, где вектор $\mathbf{n}$ неизменно связан с гиростатом. Условие прецессионности можно представить инвариантными соотношением

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = n_0, \tag{5}$$

где n_0 – постоянная. Производная от соотношения (5), в силу уравнения Пуассона (2), приводит к равенству $\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\nu})=0$, из которого в случае регулярной прецессии вытекает

$$\boldsymbol{\omega}=n_*\mathbf{n}+m_*\boldsymbol{\nu}. \tag{6}$$

Здесь n_* и m_* – постоянные. Тогда из (2), (6) имеем

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=n_*(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{n}). \tag{7}$$

Предположим, что конец вектора $\mathbf{n}$ описывает единичную окружность в плоскости векторов $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0)$ и $\boldsymbol{\beta}=(0,1,0)$, то есть его компоненты имеют вид

$$n_1=\cos\varkappa_0,\quad n_2=\sin\varkappa_0,\quad n_3=0. \tag{8}$$

Постоянную n_0, входящую в равенство (5), обозначим через $\cos\varepsilon_0$, где ε_0 – произвольная или фиксированная постоянная. Поставим задачу исследования регулярных прецессий гиростата в задаче (1), (2) при условии, что кинематическое условие (5) выполняется для любых значений $\varkappa_0$.

Кинематическое соотношение (5) и геометрический интеграл $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1$ параметризуем следующим образом

$$\begin{aligned}&\nu_1=\cos\varkappa_0\cos\varepsilon_0-\sin\varkappa_0\sin\varepsilon_0\cos u,\\&\nu_2=\sin\varkappa_0\cos\varepsilon_0+\cos\varkappa_0\sin\varepsilon_0\cos u,\quad \nu_3=\sin\varepsilon_0\sin u,\end{aligned} \tag{9}$$

где u – вспомогательная переменная. На основании равенств (8), (9) из второго уравнения системы (7) получим $\dot u=-n_*$, то есть переменная $u=-n_*t$. Постоянная интегрирования, в силу периодичности $\nu_i(t)$, принята равной нулю.

2. Условия существования регулярных прецессий. Подставим значение $\boldsymbol{\omega}$ из (6) в уравнение (1) и интегралы (3), (4) и учтем уравнение (7). Тогда получим следующие равнества

$$\begin{aligned}&\left(D^{(i)}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)+\left(d^{(i)}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)=l_i\ \ (i=1,2),\\&n_0\left(D^{(2)}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)-2(n_*+m_*n_0)\left(D^{(1)}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)+2(m_*+n_*n_0)\left(D^{(1)}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)-\\&-\left(D^{(2)}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)-(n_*+m_*n_0)\left(\mathbf{d}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)+\frac{n_0}{2}\left(\mathbf{d}^{(2)}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)+n_*m_*Sp(A)\sin^2\varepsilon_0+\\&+(m_*+n_*n_0)\left(\mathbf{d}^{(1)}\cdot\mathbf{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\mathbf{d}^{(2)}\cdot\mathbf{n}\right)=0,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&D^{(1)}=\left(d_{ij}^{(1)}\right)=m_*A-\frac{1}{2}B,\quad D^{(2)}=\left(d_{ij}^{(2)}\right)=m_*^2A+C,\\&\mathbf{d}^{(1)}=n_*A\mathbf{n}+\boldsymbol{\lambda},\quad \mathbf{d}^{(2)}=2\left(n_*m_*A\mathbf{n}-\mathbf{s}\right),\quad l_1=k,\quad l_2=2E-n_*^2(A\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}).\end{aligned} \tag{11}$$

Равенства (10), записанные с помощью обозначений (11) в скалярном виде, будут тождествами по переменной u при выполнении условий

$$\begin{aligned}&2m_*(A_{23}\cos\varkappa_0-A_{13}\sin\varkappa_0)-B_{23}\cos\varkappa_0+B_{13}\sin\varkappa_0=0,\\&m_*^2(A_{23}\cos\varkappa_0-A_{13}\sin\varkappa_0)+C_{23}\cos\varkappa_0-C_{13}\sin\varkappa_0=0,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\big[2m_*(A_{11}-A_{33})-B_{11}+B_{33}\big]\sin^2\varkappa_0+\\&+\big[2m_*(A_{22}-A_{33})-B_{22}+B_{33}\big]\cos^2\varkappa_0-(2m_*A_{12}-B_{12})\sin 2\varkappa_0=0,\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\big[m_*^2(A_{11}-A_{33})+C_{11}-C_{33}\big]\sin^2\varkappa_0+\\&+\big[m_*^2(A_{22}-A_{33})+C_{22}-C_{33}\big]\cos^2\varkappa_0-\big(m_*^2A_{12}+C_{12}\big)\sin 2\varkappa_0=0,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\big[2m_*(A_{22}-A_{11})-B_{22}+B_{11}\big]\sin 2\varkappa_0\cos\varepsilon_0+2(2m_*A_{12}-B_{12})\cos 2\varkappa_0\cos\varepsilon_0+\\&+n_*(A_{22}-A_{11})\sin 2\varkappa_0+2A_{12}n_*\cos 2\varkappa_0+2(\lambda_2\cos\varkappa_0-\lambda_1\sin\varkappa_0)=0,\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\big[m_*^2(A_{22}-A_{11})+C_{22}-C_{11}\big]\sin 2\varkappa_0\cos\varepsilon_0+2(m_*^2A_{12}+C_{12})\cos 2\varkappa_0\cos\varepsilon_0+\\&+2n_*m_*A_{12}\cos 2\varkappa_0+n_*m_*(A_{22}-A_{11})\sin 2\varkappa_0+2(s_1\sin\varkappa_0-s_2\cos\varkappa_0)=0,\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\big[m_*^2(A_{22}-A_{11})-m_*(B_{22}-B_{11})-C_{22}+C_{11}\big]\sin 2\varkappa_0+\\&+2(m_*^2A_{12}-m_*B_{12}-C_{12})\cos 2\varkappa_0=0,\end{aligned}\tag{17}$$

$$m_*^2(A_{13}\cos\varkappa_0+A_{23}\sin\varkappa_0)-m_*(B_{13}\cos\varkappa_0+B_{23}\sin\varkappa_0)-C_{13}\cos\varkappa_0-C_{23}\sin\varkappa_0=0,\tag{18}$$

$$\begin{aligned}\big[2m_*(A_{13}\cos\varkappa_0+A_{23}\sin\varkappa_0)&-B_{13}\cos\varkappa_0-B_{23}\sin\varkappa_0\big]\\&+n_*(A_{13}\cos\varkappa_0+A_{23}\sin\varkappa_0)+\lambda_3=0,\end{aligned}\tag{19}$$

$$m_*(m_*\cos\varepsilon_0+n_*)(A_{13}\cos\varkappa_0+A_{23}\sin\varkappa_0)+(C_{13}\cos\varkappa_0+C_{23}\sin\varkappa_0)\cos\varepsilon_0-s_3=0,\tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\big[(m_*^2+2n_*^2+2n_*m_*\cos\varepsilon_0)(A_{11}\cos^2\varkappa_0+A_{22}\sin^2\varkappa_0+2A_{12}\sin\varkappa_0\cos\varkappa_0)-\\&-(m_*+n_*\cos\varepsilon_0)(B_{11}\cos^2\varkappa_0+B_{22}\sin^2\varkappa_0+2B_{12}\sin\varkappa_0\cos\varkappa_0)-\\&-(C_{11}\cos^2\varkappa_0+C_{22}\sin^2\varkappa_0+2C_{12}\sin\varkappa_0\cos\varkappa_0)+(n_*+m_*\cos\varepsilon_0)(\lambda_1\cos\varkappa_0+\lambda_2\sin\varkappa_0)+\\&+(s_1\cos\varkappa_0+s_2\sin\varkappa_0)\cos\varepsilon_0\big]\cos\varepsilon_0+\big[(d_{11}^{(2)}\cos^2\varkappa_0+d_{22}^{(2)}\sin^2\varkappa_0)\cos^2\varepsilon_0+\\&+\frac{1}{2}(d_{11}^{(2)}\sin^2\varkappa_0+d_{22}^{(2)}\cos^2\varkappa_0+d_{33}^{(2)})\sin^2\varepsilon_0-d_{12}^{(2)}\sin\varkappa_0\cos\varkappa_0\sin^2\varepsilon_0+\\&+(d_1^{(2)}\cos\varkappa_0-d_2^{(2)}\sin\varkappa_0)\big]\cos\varepsilon_0-2(n_*+m_*\cos\varepsilon_0)\big[(d_{11}^{(1)}\cos^2\varkappa_0+d_{22}^{(1)}\sin^2\varkappa_0)\cos^2\varepsilon_0+\\&+\frac{1}{2}(d_{11}^{(1)}\sin^2\varkappa_0+d_{22}^{(1)}\cos^2\varkappa_0+d_{33}^{(1)})\sin^2\varepsilon_0-d_{12}^{(1)}\sin\varkappa_0\cos\varkappa_0\sin^2\varepsilon_0+\\&+(d_1^{(1)}\cos\varkappa_0-d_2^{(1)}\sin\varkappa_0)\cos\varepsilon_0\big]+n_*m_*(A_{11}+A_{22}+A_{33})\sin^2\varepsilon_0+\\&+(m_*+n_*\cos\varepsilon_0)(\lambda_1\cos\varkappa_0+\lambda_2\sin\varkappa_0)+s_1\cos\varkappa_0+s_2\sin\varkappa_0=0.\end{aligned}\tag{21}$$

В системе (12)–(21) через A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} обозначены компоненты матриц A, B, C в системе координат, связанной с векторами $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, а через s_i и λ_i – компоненты векторов s и $\boldsymbol{\lambda}$ в этой системе. Для простоты записи в уравнение (21) не подставлены величины (11).

Предположим, что величины n_* и m_* зависят от призвольной постоянной $\varkappa_0$. Рассмотрим случай, когда ось, ортогональная векторам $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, не является главной: $A_{13}^2 + A_{23}^2 \neq 0$. Из уравнений (12), исключая величину m_*, имеем

$$m_* = \frac{B_{23}\cos\varkappa_0 - B_{13}\sin\varkappa_0}{2(A_{23}\cos\varkappa_0 - A_{13}\sin\varkappa_0)},\tag{22}$$

$$(B_{13}g_0 - B_{23})^2 + 4(A_{23} - A_{13}g_0)(C_{23} - C_{13}g_0) = 0,\tag{23}$$

где $g_0 = \operatorname{tg}\varkappa_0$. Уравнение (23) может быть тождеством при любых значениях g_0 при следующих условиях на параметры

$$B_{13}^2 = -4A_{13}C_{13},\quad B_{23}^2 = -4A_{23}C_{23},\quad B_{13}B_{23} = -2(A_{13}C_{23} + A_{23}C_{13}).\tag{24}$$

Очевидно, что величины B_{13}, B_{23} в формуле (22) и соответственно C_{13}, C_{23} в формулах (24) не могут обращаться в нуль. Следовательно, равенство $C_{13}A_{23} - C_{23}A_{13} = 0$, которое вытекает из системы (24), можно параметризировать так: $C_{13} = \lambda_0 A_{13}$, $C_{23} = \lambda_0 A_{23}$, где λ_0 – некоторый параметр. Тогда из второго уравнения системы (12) следует, что m_* не зависит от параметра $\varkappa_0$.

Пусть теперь $A_{13} = A_{23} = 0$, то есть третья координатная ось является главной. Из уравнения (12) вытекает, что $B_{13} = B_{23} = 0$, $C_{13} = C_{23} = 0$. Рассмотрим систему (12)–(21) при данных условиях. Из уравнений (19), (20) следует, что $\lambda_3 = 0, s_3 = 0$, а уравнение (18) становится тождеством. Условия $\lambda_3 = 0$, $s_3 = 0$ показывают, что векторы $\mathbf{s}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ лежат в главной плоскости элипсоида инерции, содержащей векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

При анализе системы (12)–(21) возникает вырожденный случай $A_{12} = 0$, $A_{11} = A_{22} = A_{33}$, $B_{12} = 0$, $B_{11} = B_{22} = B_{33}$, $C_{12} = 0$, $C_{11} = C_{22} = C_{33}$. Из этой системы следует, что $\mathbf{s} = 0, \boldsymbol{\lambda} = 0$. Тогда уравнения (1), (2) приводят к векторному равенству

$$A_{11}\boldsymbol{\omega} = -B_{11}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{c}, \tag{25}$$

где $\mathbf{c}$ – произвольный вектор. Сопостовляя равенство (6) и соотношение (25), получим $m_* = -\dfrac{B_{11}}{A_{11}}$, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{c}}{n_* A_{11}}$. То есть в этом случае вектор $\mathbf{n}$ может занимать произвольное положение в теле.

Обратимся к уравнениям (13), (14). Из уравнения (13) определим m_*

$$m_* = \frac{(B_{11} - B_{33})\sin^2\varkappa_0 + (B_{22} - B_{33})\cos^2\varkappa_0 - B_{12}\sin 2\varkappa_0}{\left[2(A_{11} - A_{33})\sin^2\varkappa_0 + (A_{22} - A_{33})\cos^2\varkappa_0 - A_{12}\sin 2\varkappa_0\right]} \tag{26}$$

и, подставляя это значение в уравнение (14), потребуем, чтобы полученное уравнение было тождеством по $\varkappa_0$. В результате найдем следующие условия

$$\begin{aligned}
&(B_{11} - B_{33})^2 + 4(A_{11} - A_{33})(C_{11} - C_{33}) = 0, (B_{22} - B_{33})^2 + 4(A_{22} - A_{33})(C_{22} - C_{33}) = 0,\\
&B_{12}(B_{11} - B_{33}) + 2A_{12}(C_{11} - C_{33}) + 2C_{12}(A_{11} - A_{33}) = 0,\\
&B_{12}(B_{22} - B_{33}) + 2A_{12}(C_{22} - C_{33}) + 2C_{12}(A_{22} - A_{33}) = 0,\\
&2B_{12}^2 + 8A_{12}C_{12} + (B_{11} - B_{33})(B_{22} - B_{33}) +\\
&\qquad + 2(A_{11} - A_{33})(C_{22} - C_{33}) + 2(A_{22} - A_{33})(C_{11} - C_{33}) = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Первые два уравнения из системы (27) параметризуем так (μ_0, ν_0 – параметры)

$$B_{11} - B_{33} = \mu_0(A_{11} - A_{33}), \quad B_{22} - B_{33} = \nu_0(A_{22} - A_{33}). \tag{28}$$

Тогда из (27) имеем

$$\begin{aligned}
&(A_{11} - A_{33})\left[\mu_0^2(A_{11} - A_{33}) + C_{11} - C_{33}\right] = 0,\\
&(A_{22} - A_{33})\left[\nu_0^2(A_{22} - A_{33}) + C_{22} - C_{33}\right] = 0,\\
&(A_{11} - A_{33})(\mu_0 B_{12} + C_{12}) + A_{12}(C_{11} - C_{33}) = 0,\\
&(A_{22} - A_{33})(\nu_0 B_{12} + C_{12}) + A_{12}(C_{22} - C_{33}) = 0,\\
&B_{12}^2 + 4A_{12}C_{12} + 2\mu_0\nu_0(A_{11} - A_{33})(A_{22} - A_{33}) +\\
&\qquad + (A_{11} - A_{33})(C_{22} - C_{33}) + (A_{22} - A_{33})(C_{11} - C_{33}) = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Вариант $A_{11} = A_{22} = A_{33}$ рассмотрен выше, поэтому предположим, что $A_{22} = A_{33} \neq \neq A_{11}$. Третье уравнение системы (29) на основании первого уравнения приведем к виду $\mu_0 B_{12} + C_{12} - \mu_0^2 A_{12} = 0$. Выбором системы координат можно добиться условия $C_{12} = 0$, следовательно, $B_{12} = \mu_0 A_{12}$. Матрица A приводится к диагональному виду с помощью поворота вокруг третьей оси координат на угол α_0, где

$$\mathrm{tg}\ 2\alpha_0 = \frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}. \tag{30}$$

Рассмотрим выражение $2B_{12}(B_{11} - B_{22})^{-1}$. В силу $B_{33} = B_{22}$, первого равенства из (28) и значения $B_{12} = \mu_0 A_{12}$, указанное выражение будет равно правой части соотношения (30). Это означает, что матрицы A и B одновременно могут быть приведены к диагональной форме. Поэтому равенства (29) рассмотрим в той системе, в которой A и B имеют диагональную структуру (очевидно, условие $C_{12} = 0$ следует снять). Но из третьего уравнения системы (29) все-таки следует, что $C_{12} = 0$, то есть матрица C тоже диагональна. Итак, в случае $A_{22} = A_{33}$ из системы (29) получим $C_{22} = C_{33}$. Из равенства (26) вытекает, что m_* не зависит от $\varkappa_0$.

Пусть среди величин A_{11}, A_{22}, A_{33} нет равных. Тогда, принимая во внимание соотношения (28), из системы (29) имеем

$$\begin{aligned} &A_{12}^2 = (A_{11} - A_{33})(A_{22} - A_{33}), \quad C_{12} = -A_{12}\mu_0\nu_0, \quad B_{12} = A_{12}(\mu_0 + \nu_0), \\ &C_{11} - C_{33} = \mu_0^2(A_{33} - A_{11}), \quad C_{22} - C_{33} = \nu_0^2(A_{33} - A_{22}). \end{aligned} \tag{31}$$

Отсюда легко получить условие $C_{12}^2 = (C_{11} - C_{33})(C_{22} - C_{33})$. Введем обозначения $A_{11} - A_{33} = a^2$, $A_{22} - A_{33} = b^2$. Тогда из (28), (31) следует

$$\begin{aligned} &A_{12} = ab, \quad B_{12} = ab(\mu_0 + \nu_0), \quad C_{12} = -ab\mu_0\nu_0, \quad B_{11} - B_{33} = 2\mu_0 a^2, \\ &B_{22} - B_{33} = 2\nu_0 b^2, \quad C_{11} - C_{33} = -\mu_0^2 a^2, \quad C_{22} - C_{33} = -\nu_0^2 b^2. \end{aligned} \tag{32}$$

На основании (32) значение m_* из (26) представим так

$$m_* = \frac{\mu_0 a \sin\varkappa_0 - \nu_0 b \cos\varkappa_0}{a \sin\varkappa_0 - b\cos\varkappa_0}. \tag{33}$$

Легко проверить, что при наличии соотношений (32), (33) уравнение (17) становится тождеством.

Исключая из уравнений (15), (16) параметр n_*, получим

$$m_* = -\frac{s_1 \sin\varkappa_0 - s_2\cos\varkappa_0}{\lambda_1 \sin\varkappa_0 - \lambda_2 \cos\varkappa_0}. \tag{34}$$

Правые части выражений (33), (34) совпадают, если выполнены условия

$$\lambda_1 = c_0 a, \quad \lambda_2 = c_0 b, \quad s_1 = -\mu_0 c_0 a, \quad s_2 = -\nu_0 c_0 b, \tag{35}$$

где c_0 – постоянная. На основании соотношений (33), (35) из уравнения (15) определим

$$n_* = \frac{(\nu_0 - \mu_0)abn_0 + c_0(a\cos\varkappa_0 - b\sin\varkappa_0)}{(a\sin\varkappa_0 - b\cos\varkappa_0)(a\cos\varkappa_0 + b\sin\varkappa_0)}. \tag{36}$$

Внесем выражения (31), (34)–(36) в уравнение (21)

$$(A_{11}+A_{22}-A_{33})(\mu_0 a\sin\varkappa_0-\nu_0 b\cos\varkappa_0)+B_{33}(a\sin\varkappa_0-b\cos\varkappa_0)-\\ -ab(\mu_0-\nu_0)(a\cos\varkappa_0+b\sin\varkappa_0)=0.$$

Это уравнение выполняется для любых значений $\varkappa_0$ только при условиях

$$\nu_0=\mu_0,\quad \mu_0=-\frac{B_{33}}{(A_{11}+A_{22}-A_{33})}. \tag{37}$$

Выражения (33), (36) при наличии равенств (37) упрощается

$$m_*=\mu_0,\quad n_*=-\frac{c_0}{a\cos\varkappa_0+b\sin\varkappa_0}, \tag{38}$$

то есть скорость собственного вращения зависит от $\varkappa_0$, а скорость прецессии нет. Исследуем полученное решение до конца. Структура его определяется формулами (6), (9)

$$\begin{gathered}\omega_1=\mu_0\nu_1+n_*\cos\varkappa_0,\quad \omega_2=\mu_0\nu_2+n_*\sin\varkappa_0,\quad \omega_3=\mu_0\nu_3,\\ \nu_1=\cos\varkappa_0\cos\varepsilon_0-\sin\varkappa_0\sin\varepsilon_0\cos n_*t,\\ \nu_2=\sin\varkappa_0\cos\varepsilon_0+\cos\varkappa_0\sin\varepsilon_0\cos n_*t,\quad \nu_3=-\sin\varepsilon_0\sin n_*t,\end{gathered} \tag{39}$$

а условиями существования служат равенства (31). В силу $\nu_0=\mu_0$ из равенств (28), (31) следуют условия, которые показывают, что одним и тем же преобразованием координат матрицы A, B, C приводятся к диагональному виду. Так как это преобразование является поворотом вокруг третьей оси, то его применение не ограничивает общности задачи.

Запишем условия (28), (31), (37) в главной системе координат $A_{ii}=A_i$, $B_{ii}=B_i$, $C_{ii}=C_i$ $(i=1,2,3)$

$$\begin{gathered}A_3=A_2,\quad B_3=B_2,\quad C_3=C_2,\\ B_1=\frac{(2A_2-A_1)B_2}{A_1},\quad C_1=C_2+\frac{(A_2-A_1)B_2^2}{A_1^2}.\end{gathered} \tag{40}$$

Векторы $\boldsymbol{\lambda}$ и s и значение n_* найдем из равенств (35), (38):

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\lambda}=(c_0\sqrt{A_1-A_2},0,\,0),\quad \mathbf{s}=(-c_0\mu_0\sqrt{A_1-A_2},\,0,\,0)\ \ \Big(\mu_0=-\frac{B_2}{A_1}\Big);\\ n_*=-\frac{c_0}{\sqrt{A_1-A_2}\cos\varkappa_0}.\end{gathered} \tag{41}$$

Таким образом, если для матриц A, B, C выполнены условия (40), а для векторов $\boldsymbol{\lambda}$ и s – условия из (41), то уравнения (1), (2) допускают частное решение (39), существующее в рамках случая Г.Кирхгофа-П.В.Харламова и описывающее семейство регулярных прецессий относительно вертикали со скоростью прецессии μ_0 и со скоростью собственного вращения n_* из соотношений (41).

Пусть в системе (12)–(21) m_* не зависит от $\varkappa_0$. Тогда имеем следующие условия

$$\begin{gathered}2m_*A_{23}-B_{23}=0,\quad 2m_*A_{13}-B_{13}=0,\quad 2m_*A_{12}-B_{12}=0,\\ m_*^2A_{13}+C_{13}=0,\quad m_*^2A_{23}+C_{23}=0,\quad m_*^2A_{12}+C_{12}=0,\end{gathered} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} &2m_*(A_{11}-A_{33})-(B_{11}-B_{33})=0, \quad 2m_*(A_{22}-A_{33})-(B_{22}-B_{33})=0,\\ &m_*^2(A_{11}-A_{33})+C_{11}-C_{33}=0, \quad m_*^2(A_{22}-A_{33})+C_{22}-C_{33}=0, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &n_*\big[(A_{22}-A_{11})\sin\varkappa_0\cos\varkappa_0+A_{12}(\cos^2\varkappa_0-\sin^2\varkappa_0)\big]+\lambda_2\cos\varkappa_0-\lambda_1\sin\varkappa_0=0,\\ &m_*n_*\big[(A_{22}-A_{11})\sin\varkappa_0\cos\varkappa_0+A_{12}(\cos^2\varkappa_0-\sin^2\varkappa_0)\big]+s_1\sin\varkappa_0-s_2\cos\varkappa_0=0, \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} &n_*(A_{13}\cos\varkappa_0+A_{23}\sin\varkappa_0)+\lambda_3=0,\\ &m_*(m_*\cos\varepsilon_0+n_*)(A_{13}\cos\varkappa_0+A_{23}\sin\varkappa_0)+(C_{13}\cos\varkappa_0+C_{23}\sin\varkappa_0)\cos\varepsilon_0-s_3=0. \end{aligned} \tag{45}$$

Соотношения (42), (43) запишем в матричном виде

$$B=b_0\delta+2m_*A, \quad C=-m_*^2A, \quad b_0=B_{33}-2m_*A_{33}, \tag{46}$$

где δ – единичная матрица. Выбирая подвижную систему координат так, что $A_{23}=0$, из равенств (44), (45) получим

$$\begin{aligned} &\mathbf{s}=-m_*\boldsymbol{\lambda}, \quad n_*A_{13}\cos\varkappa_0=-\lambda_3,\\ &n_*\big[(A_{22}-A_{11})\sin\varkappa_0\cos\varkappa_0+A_{12}(\cos^2\varkappa_0-\sin^2\varkappa_0)\big]=\lambda_1\sin\varkappa_0-\lambda_2\cos\varkappa_0. \end{aligned} \tag{47}$$

На основании этих условий равенство (21) упрощается

$$m_*=\frac{B_{33}}{A_{33}-A_{11}-A_{22}}. \tag{48}$$

С помощью (48) условия (46) преобразуем к виду

$$B=m_*(2A-Sp(A)\delta), \quad C=-m_*^2A. \tag{49}$$

Равенство $\mathbf{s}=-m_*\boldsymbol{\lambda}$ из системы (47) и равенства (49) характеризуют условия, при выполнении которых уравнения (1), (2) имеют дополнительный первый интеграл, который является частным случаем интеграла, указанного В.А.Стекловым [5]. Таким образом, решение (39) дифференциальных уравнений (1), (2) при условиях (47), (49) является частным решением в случае В.А.Стеклова.

Проанализируем второе и третье равенства из системы (47). Если считать, что $\lambda_3=0$, то есть векторы гиростатического момента и обобщенного центра масс расположены в плоскости векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, тогда $A_{13}=0$. Это означает, что векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ и, следовательно, вектор $\mathbf{n}$ лежат в главной плоскости эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки. Тогда при $A_{11}\neq A_{22}$ скорость собственного вращения гиростата такова

$$n_*=\frac{\lambda_1\sin\varkappa_0-\lambda_2\cos\varkappa_0}{(A_{22}-A_{11})\sin\varkappa_0\cos\varkappa_0},$$

значит, она зависит от параметра $\varkappa_0$. Скорость прецессии, в силу формулы (48), не зависит от $\varkappa_0$.

Пусть в соотношениях (47) $\lambda_3\neq 0$. Тогда, исключая величину n_* во втором и третьем равенствах (47), получим следующие условия

$$\lambda_2=0, \quad A_{12}=A_{23}=0, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_3}=\frac{A_{11}-A_{22}}{A_{13}}, \quad n_*=-\frac{\lambda_3}{A_{13}\cos\varkappa_0}. \tag{50}$$

Таким образом, вторая координатная ось подвижной системы координат является главной, а векторы $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{s}$ лежат в главной плоскости эллипсоида инерции. Очевидно, что угол γ_0

между вектором $\boldsymbol{\lambda}$ и вектором $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ определен по формуле $\mathrm{tg}\,\gamma_0 = \dfrac{A_{11} - A_{22}}{A_{13}}$, то есть векторы $\boldsymbol{\lambda}$ и s занимают фиксированное положение в гиростате.

Вариант (40), (41) вытекает из решения В.А.Стеклова при условиях: $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $A_{22} = A_{33}$, $\mathrm{B}_{22} = \mathrm{B}_{33}$, $\mathrm{C}_{22} = \mathrm{C}_{33}$, $A_{ij} = 0$, $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Случай (50) аналога в решении Г.Кирхгофа-П.В.Харламова не имеет.

Для условий (47)–(49) в решении (39) параметр ε_0 оказался произвольным (не зависящим от $\varkappa_0$). Поэтому решение (39) зависит от двух произвольных постоянных $\varkappa_0$ и ε_0.

1. *Горр Г.В.* Методы исследования движений твердого тела и их приложения в классификации движений // Механика твердого тела. – 1982. – Вып. 14. – С.54–74.
2. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. – Киев: Наук. думка, 1984. – 228 с.
3. *Аппельрот Г.Г.* Определение классов кинетически симметричных тяжелых гироскопов, способных допускать упрощенные движения, близкие к инерциальному или к некоторому упрощенному движению гироскопа Лагранжа // Изв. АН СССР. Серия физическая. – 1938. – Вып.3. – С.385–411.
4. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico //Ann. mat. pura ed appl. – 1947. – S.4, 26, f.3–4. – P.271–281.
5. *Орешкина Л.Н.* Математические аналогии некоторых задач динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 1986. – Вып. 18. – С.103–110.
6. *Стеклов В.А.*О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости // Тр. отделения физических наук общества любителей естествознания. – 1895. – **7**, вып.2. – С.10–21.
7. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журнал прикл. механики и техн. физики. – 1963. – N4. – С.17-29.
8. *Kirchhoff G.R.* Über Bewegung eines Rötation korpers in einer Flüssigkeit // J. fur die reine und angew. Math. – 1870. – B.71. – S.237–262.
9. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I: The equation of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – **5**, N5. – P.747–754.

Донецкий гос. ун-т экономики и торговли, Донецк Получено 27.05.2002