ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2002. Вып. 32

УДК 531.38

 М.П.Харламов

ОДИН КЛАСС РЕШЕНИЙ С ДВУМЯ ИНВАРИАНТНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ В ДВОЙНОМ ПОСТОЯННОМ ПОЛЕ

В задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в двойном постоянном силовом поле О.И.Богоявленский указал случай интегрируемости, обобщающий 1-й класс особо замечательных движений по Аппельроту волчка Ковалевской. В данной работе построены инвариантные соотношения, определяющие четырехмерное симплектическое подмногообразие фазового пространства, на котором исходная система интегрируется по Якоби. Тем самым указано двухпараметрическое семейство двоякопериодических движений волчка, обобщающее 2-й и 3-й классы Аппельрота.

Введение. При исследовании задач классической механики с n степенями свободы различают понятия интегрируемости по Лиувиллю и по Якоби. В первом случае имеется n независимых первых интегралов в инволюции и соответствующая система Гамильтона из $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений сводится (теоретически) к "простому"потоку на n-мерной поверхности. Во втором – уравнения имеют $2n-2$ независимых первых интеграла, и решение задачи сводится к интегрированию двух дифференциальных уравнений, обладающих известным множителем Якоби (в современных терминах – к системе с интегральным инвариантом на двумерном торе). Очевидно, при $n = 2$ эти ситуации выражают одно и то же. Случай формальной равносильности обсуждаемых понятий возникает, если среди n интегралов в инволюции имеется $n - 2$ интеграла, порожденных симметриями потенциала и кинетической энергии. Тогда задача сводится игнорированием составляющих движения к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы естественного вида (фазовое пространство устроено как пространство координат-скоростей, функция Лагранжа квадратична по обобщенным скоростям). Типичные интегральные многообразия приведенной системы – двумерные торы, и траектории на них условно-периодические.

Следствием трехмерной евклидовости нашего мышления является тот факт, что для исследователя, желающего представить себе картину реального движения, якобиева интегрируемость является предпочтительной. Действительно, в случае с симметриями двоякопериодичны лишь траектории приведенной системы, а движения в исходной n-мерны по существу (кратко назовем это приводимой задачей). Интегрируемость по Якоби означает, что именно траектории исходной, реальной механической системы целиком лежат на двумерных поверхностях, которые легко представляются в $\mathbf{R}^3$ и проекции которых на пространства с физическим смыслом (например, годографы или следы вертикали в подвижных осях в динамике твердого тела) могут быть реально изучены.

Общие случаи интегрируемости в динамике твердого тела с осесимметричным потенциалом относятся к приводимым задачам. Они условно интерпретируются как двумерные путем игнорирования прецессионной составляющей движения, а траектории, изображающие эволюцию матрицы конфигурации тела, в общем случае по-прежнему заполняют трехмерный тор. Именно поэтому, например, обозримая классификация неподвижных годографов представляется крайне сложной задачей. Отказ же от осесимметричности силовых полей исключает и возможность какого-либо естественного с механической точки зрения приведения к двумерным пространствам конфигураций.

В силу сказанного представляет значительный интерес рассмотрение случаев интегрируемости по Якоби полной системы уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки, то есть случаев, когда интегральные многообразия двумерны по существу. Для приводимых задач соответствующие решения уравнений Эйлера-Пуассона будут, вообще говоря, особыми замкнутыми траекториями эллиптического или гиперболического типа. Такие решения называют частными. Обычно, при фиксированных характеристиках тела, частное решение представляет собой изолированную замкнутую траекторию. Поиск частных решений осуществляется методом инвариантных соотношений [1]. Геометрически понятно, что для выявления частного решения (одномерного интегрального многообразия) необходимо в 6-мерном фазовом пространстве переменных Эйлера-Пуассона приведенной задачи указать кроме интегралов энергии, площадей и геометрического еще два независимых соотношения.

При отсутствии симметрии силового поля уравнения Эйлера-Пуассона содержат 12 переменных и имеют семь независимых интегралов (интеграл энергии и шесть геометрических). Поэтому для интегрируемости по Якоби требуется наличие еще трех инвариантных соотношений. В данной работе такое решение найдено для задачи о движении твердого тела в двойном постоянном поле.

1. Основные уравнения. Рассмотрим задачу о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в классе потенциальных полей с силовой функцией вида (скобками обозначено скалярное произведение)

$$(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\beta}), \tag{1}$$

где векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ фиксированы в теле, а $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ неизменны в пространстве. В случае $\boldsymbol{\beta} = 0$ (или, что то же самое, $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = 0$) имеем классическую задачу о движении тяжелого твердого тела. Силовой функцией вида (1) обладают, например, задачи о движении намагниченного тела с фиксированным магнитным моментом в постоянных гравитационном и магнитном полях или заряженного тела с неподвижными в нем зарядами в постоянных гравитационном и электрическом полях. В предположении $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} \neq 0$ матрица ориентации тела и действующие силы полностью определены компонентами в подвижных осях пары векторов $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, и поэтому конфигурационное пространство задачи (группа ортогональных 3×3-матриц) не приводится, в отличие от случая одного поля, к пространству меньшей размерности. Соответствующие уравнения движения

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{\bullet} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\beta}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\bullet} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad \boldsymbol{\beta}^{\bullet} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega} \tag{3}$$

можно рассматривать как уравнения в пространстве $\mathbf{R}^9$ с тремя геометрическими интегралами

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = a^2, \qquad (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = b^2, \qquad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = c. \tag{4}$$

Уравнения (2), (3) имеют интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - (\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\alpha}) - (\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\beta}).$$

Линейного интеграла типа интеграла площадей в общем случае нет.

Выберем в качестве подвижных осей главные оси тензора $\mathbf{I} = \mathrm{diag}\,(A_1, A_2, A_3)$. В дальнейшем нам удобно считать векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ единичными, а все характеризующие поля множители включить в параметры a, b, c соотношений (4). Полагая $\sqrt{A_3/u_0}$ единицей измерения времени (u_0 – некоторая общая единица измерения компонент векторов $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$), будем записывать уравнения движения в безразмерных переменных (формально это равносильно предположению $A_3 = 1$). Произволом в выборе u_0 можно распорядиться так, что одна из констант a, b, c станет равной 1. Однако нам удобно сохранить обозначения (4) для симметричности последующих выкладок.

Рассмотрим аналог случая Ковалевской

$$A_1 = A_2 = 2A_3, \qquad \mathbf{e}_1 = (1,0,0), \qquad \mathbf{e}_2 = (0,1,0).$$

Уравнения Эйлера примут вид

$$2\omega_1^\bullet = \omega_2\omega_3 + \beta_3, \qquad 2\omega_2^\bullet = -\omega_1\omega_3 - \alpha_3, \qquad \omega_3^\bullet = \alpha_2 - \beta_1. \tag{5}$$

Они замыкаются уравнениями Пуассона (3).

О.И. Богоявленский [2] показал, что уравнения (3), (5) имеют первый интеграл типа Ковалевской

$$K = J_1^2 + J_2^2, \tag{6}$$

где $J_1 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2, \quad J_2 = 2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1$, и отметил существование на нулевом уровне интеграла (6)

$$J_1 = 0, \qquad J_2 = 0 \tag{7}$$

дополнительного частного интеграла

$$J_3 = 2\omega_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1\alpha_3 + \omega_2\beta_3,$$

постоянная которого произвольна.

Таким образом, системой инвариантных соотношений (7) определено четырехмерное многообразие M^4, не зависящее от постоянных интегрирования, на котором индуцированная (а не приведенная) система дифференциальных уравнений имеет два интеграла

$$H = h, \qquad J_3 = j \tag{8}$$

с произвольными постоянными h, j. Таким образом, исходная система имеет частный случай интегрируемости по Якоби. Полученную систему на M^4 можно представить в гамильтоновой форме [2], однако M^4 не имеет структуры фазового пространства механической системы (<координаты-скорости>). Строение многообразия M^4 и топология двумерных интегральных многообразий (8) изучены в работе [3]. Решение Богоявленского обобщает классический случай Б.Н.Делоне.

2. Новое решение с двумя инвариантными соотношениями. Ниже под словом "производная", если явно не оговорено противное, мы понимаем дифференцирование функций переменных $\omega_i, \alpha_j, \beta_k$ в силу уравнений (3), (5), то есть производную по времени вдоль траекторий.

Заметим, что производная любого выражения, не содержащего ω_3, линейна по ω_3. Поэтому, указав линейную форму от угловых скоростей, производная которой, в свою очередь, от ω_3 не зависит, можно надеяться замкнуть цепочку дифференцирований и получить тем самым инвариантное соотношение в смысле [1].

Следуя идее С.В.Ковалевской [4] о введении комплексных переменных, выполним следующую замену ($i^{\,2} = -1$):

$$\begin{array}{ll} \nu_1 = \omega_1 + i\omega_2, & \nu_2 = \overline{\nu_1}, \\ x_1 = (\alpha_1 - \beta_2) + i(\alpha_2 + \beta_1), & x_2 = \overline{x_1}, \\ y_1 = (\alpha_1 + \beta_2) + i(\alpha_2 - \beta_1), & y_2 = \overline{y_1}, \\ z_1 = \alpha_3 + i\beta_3, & z_2 = \overline{z_1}. \end{array} \tag{9}$$

Обозначая штрихом дифференцирование по $\tau = it$, получим из (3), (5)

$$2\nu_1' = -(\nu_1\omega_3 + z_1), \qquad 2\nu_2' = \nu_2\omega_3 + z_2, \qquad 2\omega_3' = y_2 - y_1,$$

$$\begin{array}{ll} x_1' = -x_1\omega_3 + z_1\nu_1, & x_2' = x_2\omega_3 - z_2\nu_2, \\ y_1' = -y_1\omega_3 + z_2\nu_1, & y_2' = y_2\omega_3 - z_1\nu_2, \\ 2z_1' = x_1\nu_2 - y_2\nu_1, & 2z_2' = -x_2\nu_1 + y_1\nu_2. \end{array} \tag{10}$$

Положим

$$\theta = x_1x_2, \qquad W_1 = x_2z_1\nu_1 + x_1z_2\nu_2, \qquad W_2 = x_2z_1\nu_1 - x_1z_2\nu_2 \tag{11}$$

и заметим, что $\theta' = W_2$, $\;W_1' = \dfrac{1}{2}W_2\omega_3 + ...$, где невыписанные слагаемые не содержат ω_3. Составим комбинацию

$$\theta^m\omega_3 - \theta^n W_1.$$

Коэффициент при ω_3 в ее производной будет равен

$$m\theta^{m-1}\theta' - \frac{1}{2}\theta^n W_2 = (m\theta^{m-1} - \frac{1}{2}\theta^n)W_2$$

и обратится в ноль при $m = \dfrac{1}{2}$, $\;n = -\dfrac{1}{2}$. Таким образом, "подозрительной"на генерацию цепочки инвариантных соотношений является функция

$$F_1 = \sqrt{x_1x_2}\,\omega_3 - \frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}(x_2z_1\nu_1 + x_1z_2\nu_2).$$

Дифференцируя в силу (10), находим

$$\frac{d}{d\tau}F_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1x_2}}\Big[\frac{x_2}{x_1}(z_1^2 + x_1y_2)(\nu_1^2 + x_1) - \frac{x_1}{x_2}(z_2^2 + x_2y_1)(\nu_2^2 + x_2)\Big]. \tag{12}$$

При этом из геометрических тождеств (4) следует, что

$$z_1^2 + x_1y_2 = (a^2 - b^2) + 2ic = c_1 = \mathrm{const},$$

$$z_2^2 + x_2y_1 = (a^2 - b^2) - 2ic = c_2 = \mathrm{const}.$$

Введем обозначения

$$U_1 = \frac{x_2}{x_1}\,c_1\,(\nu_1^2 + x_1), \qquad U_2 = \frac{x_1}{x_2}\,c_2\,(\nu_2^2 + x_2), \qquad U_2 = \overline{U}_1. \tag{13}$$

Дифференцируя агрегаты (13) в силу (10), найдем

$$\frac{d}{d\tau}U_1 = \frac{c_1}{x_1^2}(\nu_1^2 + x_1)[x_1x_2\omega_3 - (x_2z_1\nu_1 + x_1z_2\nu_2)],$$

$$\frac{d}{d\tau}U_2 = -\frac{c_2}{x_2^2}(\nu_2^2 + x_2)[x_1x_2\omega_3 - (x_2z_1\nu_1 + x_1z_2\nu_2)],$$

откуда

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}(U_1 - U_2) = \\ = \sqrt{x_1x_2}\,\left[\frac{c_1}{x_1^2}(\nu_1^2 + x_1) + \frac{c_2}{x_2^2}(\nu_2^2 + x_2)\right]\Bigl(\sqrt{x_1x_2}\omega_3 - \frac{x_2z_1\nu_1 + x_1z_2\nu_2}{\sqrt{x_1x_2}}\Bigr).\end{gathered} \tag{14}$$

Обозначая $F_2 = U_1 - U_2$, перепишем (12), (14) в виде

$$\frac{d}{d\tau}F_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1x_2}}F_2, \qquad \frac{d}{d\tau}F_2 = \frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}(U_1 + U_2)F_1.$$

Следовательно, система соотношений

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0 \tag{15}$$

определяет инвариантное подмногообразие фазового пространства уравнений (10). С учетом геометрических тождеств (4), зависящих только от параметров тела и силового поля, это многообразие имеет размерность 4. Обозначим его через N^4.

Заметим, что в (11), (13) выражения θ и W_1 вещественны, а разность $U_1 - U_2$ чисто мнимая. Поэтому соотношения (15) можно записать в виде

$$x_1x_2\omega_3 - 2\mathrm{Re}(x_2z_1\nu_1) = 0, \qquad \mathrm{Im}[x_2^2c_1(\nu_1^2 + x_1)] = 0,$$

что после подстановки (9) приводит к следующим инвариантным соотношениям в исходных переменных:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)\omega_3 - [(\xi_1\omega_1 + \xi_2\omega_2)\alpha_3 + (\xi_2\omega_1 - \xi_1\omega_2)\beta_3] = 0, \\ 2[c(\xi_1^2 - \xi_2^2) - (a^2 - b^2)\xi_1\xi_2](\omega_1^2 - \omega_2^2 + \xi_1) + \\ +[(a^2 - b^2)(\xi_1^2 - \xi_2^2) + 4c\xi_1\xi_2](2\omega_1\omega_2 + \xi_2) = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь обозначено

$$\xi_1 = \alpha_1 - \beta_2, \qquad \xi_2 = \alpha_2 + \beta_1.$$

Уравнения движения на многообразии N^4, определяемом соотношениями (16), имеют два независимых первых интеграла

$$\begin{gathered}H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \alpha_1 - \beta_2 \equiv h, \\ K = (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2 \equiv k.\end{gathered} \tag{17}$$

Из общих теорем динамики следует, что если на совместном уровне (17) нет неподвижных точек (а в этой задаче это только положения равновесия, которых ровно два) и градиенты функций H, K линейно независимы, то каждая связная компонента (17) есть двумерный тор, траектории на котором удовлетворяют дифференциальным уравнениям с последним множителем Якоби, и, следовательно, заменой времени сводятся к условно-периодическим.

Тем самым указано двухпараметрическое семейство (h, k – произвольны) двоякопериодических движений твердого тела в двойном постоянном силовом поле при условиях типа Ковалевской.

3. Классический аналог. Полагая в рассматриваемой задаче $\boldsymbol{\beta} = 0$ (второе поле отсутствует), приходим к случаю С.В.Ковалевской [4]. Приведенное фазовое пространство переменных Эйлера-Пуассона имеет размерность 5, а инвариантные соотношения (16) принимают вид (напомним, что оставшимся произволом в выборе единицы измерения u_0 можно распорядиться так, что $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = 1$):

$$\frac{1}{2}\,(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\,\omega_3 - (\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2)\,\alpha_3 = 0, \tag{18}$$

$$2\alpha_1\alpha_2\,(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1) - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(2\omega_1\omega_2 + \alpha_2) = 0. \tag{19}$$

Условие пропорциональности сомножителей в (19) при подстановке в интеграл Ковалевской дает

$$\begin{gathered} \omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{k}, \\ 2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{k}. \end{gathered} \tag{20}$$

Имеет место интеграл площадей

$$G = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \frac{1}{2}\alpha_3\omega_3 \equiv g.$$

Составляя комбинацию $\Psi = 2G^2 - H$, получим

$$\begin{gathered} \Psi = -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)[\omega_3 - 2\alpha_3\frac{\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}]^2 + \\ + \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}[(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1) + 2\alpha_1\alpha_2(2\omega_1\omega_2 + \alpha_2)]. \end{gathered} \tag{21}$$

При условиях (18), (20) последнее выражение обращается в условие (значение $\sqrt{k}$ – алгебраическое):

$$2g^2 - h = \sqrt{k}, \tag{22}$$

которое задает 2-й и 3-й классы движений по Аппельроту [5, 6]. Исходя из структуры выражений (21), (22), заключаем, что трехмерное многообразие (18), (19) есть в точности множество критических точек комбинированного первого интеграла $(2G^2 - H)^2 - K$. В частности, один из классических интегралов на рассматриваемом инвариантном множестве избыточен, а два других определяют замкнутые траектории. Это, естественно, те решения, на которых одна из переменных Ковалевской остается постоянной. Подчеркнем, что соответствующие движения в полном фазовом пространстве (с учетом прецессии) двоякопериодические для почти всех постоянных интегрирования в условии (22).

Таким образом, найденное в данной работе семейство решений (16) обобщает совокупность так называемых особо замечательных движений 2-го и 3-го классов Аппельрота.

1. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15-24.
2. *Богоявленский О.И.* Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле // Докл. АН СССР. – 1984. – 275, № 6. – С. 1359-1363.
3. *Zotev D.B.* Fomenko-Zieschang invariant in the Bogoyavlenskyi case // Regular and chaotic dynamics. – 2000. – 5, № 4. – P. 437-458.
4. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. – В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1940.- С. 11-49.
5. *Аппельрот Г.Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы. – В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – М.-Л.:Изд-во АН СССР, 1940. – С. 61-156.
6. *Ипатов А.Ф.* Движение гироскопа С.В.Ковалевской на границе области ультраэллиптичности // Уч. записки Петрозаводского ун-та. – 1970. – 18, вып. 2. – С. 6-93.

Волгоградская академия государственной службы, Россия
techmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 15.11.2002