ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2001. Вып. 31

УДК 62-50, 531.38

©2001. **В.Ф. Щербак**

ОБРАТНЫЕ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧЕ НАБЛЮДЕНИЯ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

В работе рассматривается задача наблюдения для нелинейной динамической системы, содержащей неопределенные переменные параметры. Исходная система представляется в виде обратной системы, построенной на нескольких траекториях. Для полученного обратного представления формулируется задача наблюдения и определяются условия, необходимые для построения алгоритма ее решения, включающего процедуру синтеза измерений с дополнительных траекторий. В качестве примера рассмотрена задача определения угловой скорости твердого тела, вращающегося под действием неизвестного момента сил

1. Обратные системы управления. Рассмотрим систему вход-выход

$$\dot{x} = f(x,u), \qquad x(0) = x_0 \in D \subseteq R^n, \tag{1}$$

$$y(t) = h(x(t,x_0,u)). \tag{2}$$

Здесь $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ – фазовый вектор; $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$ – вход, в качестве которого может быть рассмотрен вектор управления, возмущений или неопределенных параметров; $y = (y^1, y^2, ..., y^k)$ – выход системы (1), значения которого известны на на любом решении $x(t, x_0, u)$. Функции f, h, u предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми функциями. Все последующие утверждения и предположения имеют локальный характер.

Рассмотрим для системы (1),(2) задачу наблюдения. Требуется по информации о выходе $y(t)$ определить состояние $x(t)$ при условии, что входное воздействие $u(t)$ неизвестно. Поскольку правые части системы (1) зависят от $u(t)$, то для ее решения воспользуемся понятием обратной системы управления.

При сделанных предположениях о дифференцируемости функций $f(x,u), u(t)$ выполнены условия существования и единственности решения для системы (1), поэтому (1), (2) порождает однозначное отображение вход-выход

$$x_0, u(t) \to x(t,x_0,u) \to y(t) = h(x(t,x_0,u)), \tag{3}$$

при котором неизвестным функциям $x(t), u(t)$ соответствует известный выход $y(t)$.

Многие теоретические и практические задачи теории управления, связанные с определением состояния и параметров для системы (1), построением динамических обратных связей, обеспечивающих заданное качество движения, сводятся к обращению отображения (3). Один из способов такого обращения может быть реализован с помощью обратной системы, то есть системы вход - выход, у которой входом служит информация об $y(t)$ и ее производных, а выходом является функция $u(t)$. Схема построения обратной системы впервые рассмотрена для линейных систем в работе [1]. Систематическое изучение задачи обращения отображения (3) для нелинейных систем управления началось в [2] (см. также [3-5]). В [5-7] предложена более общая конструкция системы, обратной к заданной на множестве траекторий. Такая постановка задачи естественна при наличии информации о движении на нескольких траекториях, когда в дополнении к измерениям функции $y(t)$, заданным на решении $x(t)$, известны выходы $z_1(t), z_2(t), ..., z_\lambda(t)$, определенные на других λ решениях $\xi_1(t), ..., \xi_\lambda(t)$ системы (1), соответствующих одному и тому же входу $u(t)$. Свойство обратимости в этом случае связано с инъективностью относительно переменных $u(t)$ отображения

$$x(t), \xi_1(t), ..., \xi_\lambda(t), u(t) \to y(t), z_1(t), z_2(t), ..., z_\lambda(t). \tag{4}$$

Отметим, что привлечение измерений, полученных на множестве траекторий, существенно расширяет класс систем, для которых возможно восстановление входного воздействия $u(t)$ [6].

Если система (1),(2) является обратимой по одной либо по множеству траекторий, то обратная к ней система описывает то же самое отображение вход - выход и ту же внутреннюю динамику состояния $x(t)$. Иными словами, обратная система может быть рассмотрена, по крайней мере локально, как иная форма описания (1), (2). Поэтому, в случае наличия у исходной системы свойства обратимости по одной либо по множеству траекторий, любая задача, поставленная для системы (1),(2), может быть переформулирована и для ее соответствующей обратной реализации. В данной статье этот подход применяется для решения задачи наблюдения систем с неопределенностью. Присутствие в правых частях (1) неопределенных функций $u(t)$ позволяет рассматривать систему (1),(2) как систему вход - выход и строить для нее обратную.

2. Построение системы, обратной к заданной на множестве траекторий. Рассмотрим схему использования нескольких траекторий при построении обратной системы в частном случае $k = m = 1$. Пусть α – относительный порядок функции $h(x)$, то есть α – минимальный порядок производной от функции $h(x)$, взятой в силу уравнений (1), которая явно зависит от управления u. Дифференцируя $n-1$ раз выход $y(t)$ в силу системы (1), получаем n алгебраических соотношений:

$$\begin{aligned} &y_1 = h(x), \\ &y_2 = h_1(x), \\ &\vdots \\ &y_{\alpha+1} = h_\alpha(x, u), \\ &\vdots \\ &y_n = h_{n-1}(x, u, \dot{u}, ..., u^{(s-1)}). \end{aligned} \tag{5}$$

Для построения обратной системы на нескольких траекториях нам потребуется сделать ряд допущений. В частности, далее будем считать выполненым

Предположение 1. Система (1), (2) является наблюдаемой при любом известном управлении $u(t)$, то есть соотношения (5) при любых фиксированных значениях переменных $u, \dot{u}, ..., u^{(s)}$ являются диффеоморфизмом.

Таким образом, из (5) по теореме о неявных функциях можно выразить фазовый вектор системы (1):

$$x = g(y_1, ..., y_n, u, \dot{u}, ..., u^{(s-1)}). \tag{6}$$

Дифференцируя последнее равенство (5) в силу системы (1) с учетом (6), получаем представление системы (1), (2) в виде

$$\dot{y}_n = F(y_1, y_2, ..., y_n, u, \dot{u}, ..., u^{(s)}). \tag{7}$$

Обозначим $y_{[n]}=(y_1,,...,y_n)$. В дополнение к решению $x(t)$ системы (1) рассмотрим s других решений $\xi_1(t),...,\xi_s(t)$ системы (1), соответствующих тому же управлению $u(t)$, но имеющих другие начальные условия. Введем в рассмотрение соответствующие этим решениям выходы и их производные – векторы $z_{i[n]}(t)$, где $z_{i[n]}=(z_{i1},z_{i2},...,z_{in})$ является образом функций $\xi_i,u,\dot{u},...,u^{(s)}$, $\quad i=\overline{1,s}$ при отображении (5) - (7). Для компонент каждого из этих векторов имеют место равенство (7), которые мы перепишем в виде системы

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1n}\ &= F(z_{11},...,z_{1n},u,\dot{u},...,u^{(s)}),\\ &\vdots\\ \dot{z}_{sn}\ &= F(z_{s1},...,z_{sn},u,\dot{u},...,u^{(s)}).\end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим отображение, определяемое функцией F с помощью формул (7),(8) на $s+1$ различных решениях системы (1).

Предположение 2. Отображение (7), (8) при любых фиксированных значениях переменных $y_{[n]},z_{1[n]},...,z_{s[n]}$ являются диффеоморфизмом.

Следствием сделанного предположения является существование однозначных функций g_j таких, что

$$\begin{aligned}u^{(j)}\ &= g_j(z_{1[n]},...,z_{1[n]},...,z_{s[n]},\dot{y}_n,\dot{z}_{1n},...,\dot{z}_{sn}), \quad j=\overline{0,s}\\ u^{(s+1)}\ &= H^{-1}(y_{[n+1]},\dot{y}_{n+1},u,...,u^{(s)}).\end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что достаточным условием выполнения предположения 2 является наличие у системы (1),(2) свойства идентифицируемости по $s+1$ траектории [6,7]. Выполнение предположений 1,2 гарантирует существование взаимно однозначного соответствия между функциями времени $x(t),\xi_1(t),...,\xi_s(t),\ u(t),...,u^{(s)}(t)$ и соответствующими им выходами $y_{[n+1]}(t),z_{1[n+1]}(t),...,z_{s[n+1]}(t)$. Дифференцируя (7), (8), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&\dot{y}_i=y_{i+1},\\ &\dot{y}_{n+1}=H(y_{[n+1]},u,...,u^{(s+1)}),\\ &\dot{z}_{ji}=z_{ji+1},\\ &\dot{z}_{jn+1}=H(z_{j[n+1]},u,...,u^{(s+1)}), \quad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,s}.\end{aligned} \tag{10}$$

Исключим из перых $n+1$ уравнений, соответствующих исходной траектории $x(t)$ и известному выходу $y(t)$, величину $u^{(s+1)}=H^{-1}(y_{[n+1]},\dot{y}_{n+1},u,...,u^{(s)})$ и подставим полученное выражение в оставшиеся уравнения (10). Кроме того, заменим функцию $u(t)$ и ее производные до порядка s включительно их значениями, определяемыми формулами (9). В итоге получаем

$$\begin{aligned}&\dot{z}_{ji}=z_{ji+1},\\ &\dot{z}_{jn+1}=H(y_{[n+1]},z_{1[n+1]},...,z_{z[n+1]},\dot{y}_{n+1}), \quad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,s}.\end{aligned} \tag{11}$$

Равенства (11) будем рассматривать как систему дифференциальных уравнений, устанавливающей связь между заданным выходом $y(t)$ и дополнительными выходами $z_1(t)$, $z_2(t),...,z_s(t)$, которые могут быть реализовны системой (1),(2) на некоторых s других траекториях, соответствующих тому же самому управлению $u(t)$.

Поставленная задача наблюдения с учетом проделанных построений является задачей определения вектора x , который является частью координат расширенного вектора

$(x, \xi_1, ..., \xi_s, u, ..., u^{(s)})$, образ которого $(y_{[n+1]}(t), z_{1[n+1]}(t), ..., z_{s[n+1]}(t))$ удовлетворяет системе (11). Если в дополнение к функции $y_{[n+1]}(t)$ будет найдено решение $z_{1[n+1]}(t), ...,$ $z_{s[n+1]}(t)$ системы (11), то искомый вектор состояния может быть найден по формуле

$$x = G(y_{[n+1]}(t), z_{1[n+1]}(t), ..., z_{s[n+1]}(t), \dot{y}_{n+1}), \tag{12}$$

полученной в результате подстановки в (6) равенств (9). Итак, задача определения состояния системы, содержащей неопределенные функции времени в динамических уравнениях, свелась к определению виртуальных выходов, которые система (1) имела бы при некоторых других начальных условиях. Последняя задача может быть сведена к задаче Коши для системы (11) в случае, если удасться определить начальные значения $z_{1[n+1]}(0), ..., z_{s[n+1]}(0)$. Эти значения являются образом $\xi_i(0), u(0), \dot{u}(0), ..., u^{(s)}(0)$, $i = \overline{1, s}$, при отображении, определяемом формулами (5). При этом единственное ограничение на выбор величин $\xi_i(0)$, $i = \overline{1, s}$ состоит в том, что никакие две из них не совпадают между собой и величиной x_0. С учетом вышеизложенного получаем теорему

Теорема 1. Пусть для системы (1), (2) выполняются условия:
1) при $t = 0$ известны значения $u(t_0), \dot{u}(t_0), ..., u^{(s)}(t_0)$;
2) система (1), (2) при любой функции $u(t)$ является наблюдаемой;
3) система (1), (2) является идентифицируемой по $s + 1$ траектории.
Тогда система (1), (2) является наблюдаемой при неопределенных возмущениях $u(t)$.

Значения производных от функций $z_i(t)$, $i = \overline{1, s}$ определяются не численным дифференцированием, а в результате решения задачи Коши, поэтому основной источник погрешности в предлагаемой схеме решения задачи наблюдения связан с использованием производных от измеряемой функции $y(t)$. В связи с этим естественно вместо системы (10) использовать наблюдатель

$$\begin{aligned}
&\dot{\tilde{y}}_i = \dot{\tilde{y}}_{i+1} + k_i(\tilde{y}_1 - y_1), \\
&\dot{\tilde{y}}_{n+1} = \tilde{y}_{n+1} + k_{n+1}(\tilde{y}_1 - y_1) + \nu(t), \\
&\dot{z}_{ji} = z_{ji+1}, \qquad i = \overline{1, n}, \\
&\dot{z}_{jn+1} = H(\tilde{y}_{[n+1]} + k(\tilde{y}_1 - y_1), z_{1[n+1]}, ..., z_{z[n+1]}, k_{n+1}(\tilde{y}_1 - y_1) + \nu(t)), \quad j = \overline{1, s}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь коэффициенты k_i и функция $\nu(t)$ должны быть выбраны такими, чтобы $\tilde{y}_{[n+1]}(t) \to y_{[n+1]}(t)$. Например, пусть $\nu(t) = 0$ и k_i являются коэффициентами характеристического многочлена, все корни которого расположены в левой полуплоскости

$$\lambda^{(m+1)} - (1 + k_1)\lambda^n + (k_1 - k_2)\lambda^{n-1} + ... + (k_{n-1} - k_n)\lambda + k_n - k_{n+1} = 0.$$

При этом получаем, что известны значения выхода $y(t)$ и его производных, а также – значения $z_{j[n+1]}(t)$, полученные на других траекториях, и для которых выбор начального условия обеспечивает соответствие тому же управлению, что и $y(t)$. В результате искомое состояние системы может быть найдено по формулам (12).

3. Задача определения угловой скорости твердого тела. Рассмотрим уравнения, описывающие вращения твердого тела вокруг неподвижной точки под действием момента силы, расположенного в координатной плоскости подвижной системы координат.

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 &= a_1\omega_2\omega_3 + u_1, \\
\dot{\omega}_2 &= a_2\omega_1\omega_3 + u_2, \\
\dot{\omega}_3 &= a_3\omega_1\omega_2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Проекции момента сил на первую и вторую координатные оси $u_1(t), u_2(t)$ известны лишь в начальный момент $t = 0$. Полагаем, что в процессе движения измеряются величины $\omega_1(t), \omega_2(t)$, то есть выходом системы (14) являются функции $y_1(t) = \omega_1,\ y_2(t) = \omega_2$.

Задача. Определить недостающую компоненту вектора угловой скорости $\omega_3(t)$.

Для решения этой задачи воспользуемся подходом, связанным с построением обратной системы.

Производные от измеряемой функции в силу системы (14) равны

$$y_3 = \dot y_1 = a_1 y_2 \omega_3 + u_1, \qquad y_4 = \dot y_2 = a_2 y_1 \omega_3 + u_2,$$

$$\dot y_3 = \dot y_3 = a_1 y_4 \omega_3 + a_1 a_3 y_1 y_2^2 + \dot u_1, \qquad \dot y_4 = \dot y_4 = a_2 y_3 \omega_3 + a_2 a_3 y_2 y_1^2 + \dot u_2.$$

Введем в рассмотрение вторую траекторию, которая удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \dot p_1 &= a_1 p_2 p_3 + u_1, \\ \dot p_2 &= a_2 p_1 p_3 + u_2, \\ \dot p_3 &= a_3 p_1 p_2, \end{aligned} \tag{15}$$

выход которой равен $z_1 = p_1,\ z_2 = p_2$. Производные от функций выхода $z_1(t), z_2(t)$ до второго порядка включительно в силу системы (15) равны

$$z_3 = a_1 z_2 p_3 + u_1, \quad z_4 = a_2 z_1 p_3 + u_2, \quad \dot z_3 = a_1 z_4 p_3 + a_1 a_3 z_1 z_2^2 + \dot u_1,$$

$$\dot z_4 = a_2 z_3 p_3 + a_2 a_3 z_2 z_1^2 + \dot u_2.$$

Последние формулы порождают взаимнооднозначное соответствие

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3, u_1, u_2, p_1 p_2, p_3) \leftrightarrow (y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4),$$

и неизвестные ω_3, p_3 выражаются через значения выходов и их производных следующим образом

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{-a_1 y_4 z_2 + a_1 z_4 z_2 + a_2 y_3 z_1 - a_2 z_1 z_3}{a_1 a_2 (y_2 z_1 - y_1 z_2)}, \\ p_3 &= \frac{a_2 y_1 y_3 - a_1 y_2 y_4 + a_1 y_2 z_4 - a_2 y_1 z_3}{a_1 a_2 (y_2 z_1 - y_1 z_2)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Из формулы (16) при заданных $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\dot y_1(t)$, $\dot y_2(t)$, $z_1(t)$, $z_2(t)$, $\dot z_1(t)$, $\dot z_2(t)$ находим неизвестную третью компоненту вектора угловой скорости $\omega_3(t)$. Эти формулы верны лишь для тех функций $z(t)$,которые порождены тем же управлением, что и функции $y(t)$. С учетом (16) получаем, что виртуальный выход $z(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot z_1 = z_3, \quad \dot z_2 = z_4, \quad \dot y_1 = y_3, \quad \dot y_2 = y_4, \quad \dot y_3 = \nu_1(t), \quad \dot y_4 = \nu_2(t), \\ &\dot z_3 = \nu_1(t) + a_1 a_3 (z_1 z_2^2 - y_1 y_2^2) \\ &\qquad + \frac{a_1 (y_4 - z_4)(z_4 y_2 - y_4 z_2) + a_2 (y_3 - z_3)(z_4 y_1 - y_4 z_1)}{a_1 y_1 z_2 - a_2 y_2 z_1}, \\ &\dot z_4 = \nu_2(t) + a_2 a_3 (z_2 z_1^2 - y_2 y_1^2) + \\ &\qquad + \frac{a_1 a_2 (y_4 - z_4)(z_3 y_2 - y_3 z_2) + a_2 (y_3 - z_3)(z_3 y_1 - y_3 z_1)}{a_1 y_1 z_2 - a_2 y_2 z_1}. \end{aligned} \tag{17}$$

При известных значениях $u_1(0), u_2(0)$ и любых $p_1(0), p_2(0), p_3(0)$ полагаем, что начальные условия таковы: $z_1(0) = p_1(0)$, $z_2(0) = p_2(0)$, $z_3(0) = a_1 z_2(0) p_3(0) + u_1(0)$, $z_4(0) = a_2 z_1(0) p_3(0) + u_2(0)$. Тогда, решив задачу Коши для системы (17), по формулам (16) вычисляем искомую компоненту $\omega_3(t)$ вектора угловой скорости.

1. *Silverman L.M.* Inversion of multivariable linear systems // IEEE Trans. Autom. Control. – 1969. – AC-14, N 3.- P. 270-276.
2. *Hirschorn R.M.* Invertibility of multivariable nonlinear control systems // Ibid. – 1977. – AC – 24, N 6. – P. 855-860.
3. *Hirschorn R M.* Invertibility of multivariable nonlinear control systems // Ibid. – 1979. – AC-24, N 6. – P. 855-860.
4. *Fliess M.* A note on the invertibility of nonlinear input-output systems // Systems and Control Letters. – 1986. – **8**, N 2. – P. 147-152.
5. *Щербак В. Ф.* Условия идентифицируемости нелинейных механических систем с известным начальным состоянием // Механика твердого тела. – 1985. – Вып.17. – С. 77-91.
6. *Ковалев А. М., Щербак В. Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук.думка, 1993. – 285 с.
7. *A.M. Kovalev, V.F. Shcherbak.* The inverse control problems solvability conditions // Facta Universitates. Ser.A – **12**. – 1997. – P. 58-74.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`techmech@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 12.04.01