УДК 62-50

©2001. **А.М.Ковалев**

РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИЗМЕРЯЕМОЙ ФУНКЦИИ НА НЕСКОЛЬКИХ ТРАЕКТОРИЯХ

Для нелинейных систем с одномерным управлением получено решение двухточечной задачи управления методом обратной системы с использованием множества траекторий. Предполагается, что система управляема и существует одномерная измеряемая функция, относительно которой система наблюдаема и идентифицируема по множеству траекторий. Рассматриваемый класс систем включает флэт-системы, характеризуемые свойством идентифицируемости по одной траектории.

Введение. Двухточечная задача является одной из основных прямых задач управления и состоит в нахождении такого управления, для которого траектория системы проходит через заданные начальную и конечную точки. Один из способов ее решения основан на использовании методов обратных задач, что вызвано, с одной стороны, практическими требованиями представления искомого управления в виде функции выходной переменной, а с другой — возможностью использования явных формул для управления, получаемых при решении задач обратимости и идентификации. Этот подход получил завершенную форму для флэт-систем [1], характеризуемых тем, что фазовый вектор и вектор управления могут быть выражены через измеряемую функцию и ее производные по времени. Это позволяет получить решение двухточечной задачи, задав выход в виде специальным образом выбранной функции времени.

В общем случае система управления не является флэт-системой. Анализ флэт-систем показывает, что они обладают свойствами наблюдаемости и идентифицируемости. Наличие этих свойств и определяет область применимости метода флэт-систем. Возможность его обобщения состоит в использовании свойства λ-идентифицируемости [2,3], позволяющего выразить вектор управления через значения измеряемой функции на λ траекториях системы. В силу наблюдаемости такое же представление возможно и для фазового вектора. При использовании этих представлений для решения двухточечной задачи необходимо удовлетворить граничным условиям, что приводит к краевым задачам для дифференциальных уравнений для измеряемых функций на дополнительных $\lambda - 1$ траекториях.

Решение двухточечной задачи управления в настоящей работе сведено к решению некоторой краевой задачи, а соответствующий алгоритм назван обобщенным флэт-алгоритмом. Его изложение дано для систем с одномерным управлением и одномерной измеряемой функцией.

1. Исходные соотношения. Рассмотрим нелинейные системы управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1}$$

где $x \in D \subseteq R^n$ – фазовый вектор, $u \in D \subseteq R^1$ – вектор управления (вход), $t \in T \subseteq$ $\subseteq [0, \infty)$.

На траекториях системы (1) задана измеряемая функция (выход)

$$y = h(t, x), \qquad y \in Y \subseteq R^1. \tag{2}$$

Функции f, h предполагаются непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов достаточное число раз.

Для системы (1) рассматривается двухточечная задча, которая состоит в нахождении допустимого управления $u(t)$ такого, что соответствующее ему решение системы (1) удовлетворяет заданным граничным условиям $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$, при $t_0, t_1 \in T; \quad x_0, x_1 \in D$.

Один из подходов к решению двухточечной задачи основывается на использовании расширенного вектора наблюдения, состоящего из измеремой функции (2) и ее производных в силу систему (1):

$$\begin{aligned}
&y = h_1(t,x) = h(t,x),\\
&y^{(i-1)} = h_i(t,x) = \frac{\partial h_{i-1}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_{i-1}}{\partial x^k} f^k, \quad i = 2, ..., \alpha,\\
&y^{(j-1)} = h_j(t, x, u, ..., u^{(j-\alpha-1)}) =\\
&\quad = \frac{\partial h_{j-1}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_{j-1}}{\partial x^k} f^k + \sum_{k=0}^{j-\alpha-2} \frac{\partial h_{j-1}}{\partial u^k} u^{(k+1)}, \quad j = \alpha+1, ..., n+1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Число α называется относительным порядком системы [4] и равно порядку производной измеремой функции, содержащей явно управление $u(t)$ в первый раз. С использованием вектора (3) возможно системе (1), (2) сопоставить обратную систему, для которой входом является выход (и его производные) системы (1), а выходом – вход исходной системы.

2. Решение двухточечных задач методом обратной системы. Положим $\alpha = n$ и считаем, что система (1), (2) наблюдаема и идентифицируема (по одной траектории). Тогда фазовый вектор и управление могут быть найдены как функции расширенного вектора наблюдения из формул (3)

$$x = \varphi(t, y, ..., y^{(n-1)}), \qquad u = \varphi_0(t, y, ..., y^{(n)}). \tag{4}$$

Формулы (4) можно использовать для решения двухточечной задачи следующим образом. Граничные условия на фазовый вектор дают по формулам (3) граничные условия на измеряемую функцию и ее производные

$$y^{(i)}(t_0) = y_0^i, \qquad y^{(i)}(t_1) = y_1^i \qquad i = 0, ..., n-1. \tag{5}$$

Выбираем функцию $y(t) \in C^n[t_0, t_1]$, удовлетворяющую условиям (5). Тогда решение двухточечной задачи определяется этой функцией с помощью формул (4).

Система (1), для которой возможно указать такую функцию (2), что $\alpha = n$ и система (1), (2) наблюдаема и идентифицируема, названа [1] флэт-системой. Установить существование этого свойства достаточно трудно. Для произвольно выбранной измеряемой функции, как правило, $\alpha < n$, и в случае наблюдаемости системы (1), (2) вместо соотношений (4) имеют место следующие равенства

$$x = \varphi(t, y, ..., y^{(n-1)}, u, ..., u^{(n-\alpha-1)}), \qquad F = (t, y, ..., y^{(n)}, u, ..., u^{(n-\alpha)}) = 0.$$

Для получения условий (5) необходимо задать граничные значения для $u, ..., u^{(n-\alpha-1)}$, на которые по условию задачи никаких ограничений не накладывается. Применение схемы флэт-системы с выбором функции $y(t)$ приводит к решению двухточечной задачи для дифференциального уравнения порядка $n-\alpha$, которая имеет решение только при специальном выборе граничных условий на $u, ..., u^{(n-\alpha-1)}$. Выбор этих граничных условий является принципиальной трудностью в применении данной схемы к решению двухточечной задачи в случае $\alpha < n$.

3. Обобщенный флэт-алгоритм. Считаем, что $\alpha < n$ и система (1), (2) наблюдаема и идентифицируема по множеству траекторий. В глобальной постановке свойство идентифицируемости по множеству траекторий может быть установлено в результате построения обратной системы и рассмотрения свойства взаимной однозначности соответствующих отображений. В локальной постановке достаточное условие идентифицируемости может быть получено в ранговой форме [2] из условия

$$\mathrm{rank}\frac{\partial(H(t,x_1,u,\nu),...,H(t,x_\lambda,u,\nu))}{\partial(x_1,...,x_\lambda,u,\nu)} = 1+\mathrm{rank}\frac{\partial(H(t,x_1,u,\nu),...,H(t,x_\lambda,u,\nu))}{\partial(x_1,...,x_\lambda,\nu)}, \tag{6}$$

где $H=(h_1,...,h_{n+1})$ – расширенный вектор наблюдения, ν – вектор производных по времени от управления. Необходимо отметить, что при сделанных предположениях $s=\lambda_{\min}=n-\alpha+1$ и существуют области, в которых отображение $x_1,...,x_s,u,...,u^{(s-1)} \to y_1,...,y_1^{(n)},...,y_s,...,y_s^{(n)}$ взаимнооднозначно.

Для решения двухточечной задачи используем схему построения обратной системы [3] для расширенной системы

$$\dot{x}_1 = f(t,x_1,u),...,\dot{x}_s = f(t,x_s,u), \tag{7}$$

$$y_1 = h(t,x_1),...,y_s = h(t,x_s). \tag{8}$$

По формулам (3) вычисляем

$$y_i^{(j)} = h_{ij+1}(t,x_i) \quad i=1,...,s;\ j=0,...,\alpha-1. \tag{9}$$

Из уравнения $y_1^{(\alpha)} = h_{1\alpha+1}(t,x_1,u)$ находим

$$u = \varphi_1(t,x_1,y_1^{(\alpha)}(t)) \tag{10}$$

и подставляем это выражение в уравнения (7) и функции $y_i^{(\alpha)}$ $(i=2,...,s)$. Вместо систем (7), (8) рассматриваем следующие

$$\dot{x}_1 = f(t,x_1,\varphi_1(t,x_1,y_1^{(\alpha)}(t))),...,\dot{x}_s = f(t,x_s,\varphi_1(t,x_1,y_1^{(\alpha)}(t))), \tag{11}$$

$$\begin{gathered} y_2^{(\alpha)} = h_{2\alpha+1}(t,x_2,\varphi_1(t,x_1,y_1^{(\alpha)}(t))),..., \\ y_s^{(\alpha)} = h_{s\alpha+1}(t,x_s,\varphi_1(t,x_1,y_1^{(\alpha)}(t))). \end{gathered} \tag{12}$$

Дифференцируя функции (12) в силу систем (11) до $(n+1)$-го порядка, имеем

$$y_i^{(j)} = h_{ij+1}(t,x_i,x_1) \quad i=2,...,s;\ j=\alpha,...,n+1. \tag{13}$$

Формулы (9),(10) вместе с формулами (13) для $i = 2, ..., s$; $j = \alpha, ..., n$ определяют отображение $x_1, ..., x_s, u \to y_1, ..., y_1^{(n)}, ..., y_s, ..., y_s^{(n)}$, которое в областях G_p однозначно определят x_i, u как функции $y_i^{(j)}$

$$x_i = \psi_i(t, y_1, ..., y_s, ..., y_1^{(n)}, ..., y_s^{(n)}) \quad i = 1, ..., s, \tag{14}$$

$$u = \psi_0(t, y_1, ..., y_s, .., y_1^{(n)}, ..., y_s^{(n)}). \tag{15}$$

Подставляя выражения (14) в формулы (13) для $i = 2, ..., s$; $j = n + 1$, получаем $s - 1$ дифференциальное соотношение между выходами y_i $(i = 1, ..., s)$

$$y_i^{(n+1)} = g_i(t, y_1, ..., y_s, ..., y_1^{(n)}, ..., y_s^{(n)}) \quad i = 2, ..., s, \tag{16}$$

Формулы (14), (15) обобщают формулы (4) на расширенную систему (7), (8) с той разницей, что выходы (8) связаны дифференциальными соотношениями (16). Это приводит к изменению флэт-алгоритма. Граничные условия на фазовый вектор x_1 дают $2n$ граничных условий на измеряемые функции y_i

$$\begin{aligned} x_{10} &= \psi_1(t_0, y_1(t_0), ..., y_s(t_0), ..., y_1^{(n)}(t_0), ..., y_s^{(n)}(t_0)), \\ x_{11} &= \psi_1(t_1, y_1(t_1), ..., y_s(t_1), ..., y_1^{(n)}(t_1), ..., y_s^{(n)}(t_1)). \end{aligned} \tag{17}$$

В отличие от флэт-систем функции $y_i(t)$ находятся как решения граничной задачи (16), (17), после чего решение заданной двухточечной задачи получается по формулам (14), (15).

Рассмотрим подробнее краевую задачу (16), (17). По постановке двухточечной задачи в силу соотношений (9) первые α граничных условий накладываются на функцию $y_1(t)$. С учетом предположения о наблюдаемости системы (1), (2) имеем

$$\text{rank} \ \frac{\partial(h_{11}(t, x_1), ..., h_{1\alpha}(t, x_1))}{\partial x_1} = \alpha.$$

Поэтому с помощью уравнений (9) можно выразить α переменных x_1^j, пусть это будут $x_1^1, ..., x_1^\alpha$, через остальные $x_1^{\alpha+1}, ..., x_1^n$. Поскольку в системе дифференциальных уравнений (16) одна из функций является свободной, можно выбрать функцию $y_1(t)$ таким образом, чтобы удовлетворить первым α граничным условиям (9) при $t = t_0, t_1$. Тогда вместо граничных условий (17) останутся только $n - \alpha$ граничных условий для оставшихся переменных. Таким образом, решение краевой задачи (16), (17) можно проводить по следующей схеме.

Обобщенный флэт-алгоритм. Выбирается функция $y_1(t) = \theta(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\theta^{(j)}(t_0) = h_{1j+1}(t_0, x_0), \qquad \theta^{(j)}(t_1) = h_{1j+1}(t_1, x_1), \quad j = 0, ..., \alpha - 1.$$

Функция $y_1 = \theta(t)$ подставляется в соотношения (16), (17)

$$y_i^{(n+1)} = g_i(t, \theta(t), y_2, ..., y_s, ..., \theta^{(n)}(t), y_2^{(n)}, ..., y_s^{(n)}) \quad i = 2, ..., s, \tag{18}$$

$$x_0^j = \psi_1^j(t_0, \theta(t_0), y_2(t_0), ..., y_s(t_0), ..., \theta^{(n)}(t_0), y_2^{(n)}(t_0), ..., y_s^{(n)}(t_0)),$$
$$j = \alpha + 1, ..., n \qquad (19)$$
$$x_1^j = \psi_1^j(t_1, \theta(t_1), y_2(t_1), ..., y_s(t_1), ..., \theta^{(n)}(t_1), y_2^{(n)}(t_1), ..., y_s^{(n)}(t_1)).$$

Решается краевая задача (18), (19). Найденные функции $\theta(t), y_2(t), ..., y_s(t)$ подставляются в формулы (14), (15), которые определяют решение исходной двухточечной задачи.

Отметим, что число граничных условий (19) равно $N_b = 2(n - \alpha)$, а общий порядок системы (18) равен $N_s = (n+1)(n-\alpha)$, поэтому для $n \geq 1$ имеем $N_s \geq N_b$, и краевая задача является либо классической ($N_s = N_b$), либо краевой задачей со свободными условиями ($N_s > N_b$). Предложенный алгоритм может быть обобщен на случай многомерного управления использованием схемы построения обратной системы, предложенной в [3].

4. Пример. Рассмотрим следующую двухточечную задачу.

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_3^2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u, \qquad (20)$$

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 1,$$
$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9\pi}{4} + \frac{\pi^2}{4} - 4, \qquad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 1, \qquad x_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

В качестве измеряемой функции примем

$$y = x_1. \qquad (21)$$

По формулам (3) получаем расширенный вектор наблюдения

$$y = x_1, \qquad \dot{y} = x_2 + x_3^2, \qquad y^{(2)} = x_3(1 + 2u), \qquad y^{(3)} = u(1+2u) + 2x_3\dot{u}. \qquad (22)$$

Выбирая $H = (y, \dot{y}, y^{(2)}, y^{(3)}), \nu = \dot{u}$, находим, что условие (6) выполнено для $\lambda = 2$ при $u \neq -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$; $x_{31}^2 + x_{32}^2 \neq 0$, $x_{31} \neq x_{32}$, где x_{ij} ($i = 1,2,3$; $j = 1,2$) – координаты j-ой траектории. Поэтому система (20), (21) идентифицируема по двум траекториям, и для решения задачи будут использованы две траектории. Из формул (22), записанных для первой и второй траекторий, находим

$$u = \frac{y_1^{(2)} - x_{31}}{2x_{31}}. \qquad (23)$$

Подставляя выражение (23) в уравнения (20), (22) для первой и второй траекторий, получаем преобразованные расширенную систему и измеряемую функцию

$$\begin{gathered} \dot{x}_{11} = x_{21} + x_{31}^2, \quad \dot{x}_{21} = x_{31}, \quad \dot{x}_{31} = \frac{y_1^{(2)} - x_{31}}{2x_{31}}, \\ \dot{x}_{12} = x_{22} + x_{32}^2, \quad \dot{x}_{22} = x_{32}, \quad \dot{x}_{32} = \frac{y_1^{(2)} - x_{31}}{2x_{31}}, \end{gathered} \qquad (24)$$

$$y_2^{(2)} = \frac{x_{32}}{x_{31}} y_1^{(2)}. \qquad (25)$$

Дифференцируя функцию (25) в силу системы (24), получаем

$$2x_{31}^2(y_1^{(2)}y_2^{(3)} - y_1^{(3)}y_2^{(2)}) - y_1^{(2)}(x_{31} - y_1^{(2)})(y_2^{(2)} - y_1^{(2)}) = 0, \tag{26}$$

$$2x_{31}^2(y_1^{(2)}y_2^{(4)} - y_1^{(4)}y_2^{(2)}) - y_1^{(2)}(2x_{31} - 3y_1^{(2)})(y_2^{(3)} - y_1^{(3)}) = 0. \tag{27}$$

Соотношения (25), (26) определяют зависимость x_{31}, x_{32} от измеряемых функций y_1, y_2. После подстановки найденного отсюда выражения для x_{31} в уравнение (27) получаем дифференциальное уравнение на функции y_1, y_2 . С другой стороны, это же уравнение можно считать заданным неявно уравнениями (26), (27). Дополнив соотношения (23), (25)-(27) формулами

$$x_{11} = y_1, \qquad x_{21} = \dot{y}_1 - x_{31}^2, \qquad x_{12} = y_2, \qquad x_{22} = \dot{y}_2 - x_{32}^2, \tag{28}$$

получаем полную систему уравнений, определяющих зависимость фазовых векторов и управления от функций y_1, y_2, и дифференциальное уравнение для функций y_1, y_2 .

Переходя к решению исходной задачи, находим

$$\det \frac{\partial(y, \dot{y})}{\partial(x_1, x_2)} = 1.$$

Поэтому функцию $y_1 = \theta(t)$ выбираем, исходя из граничных условий

$$y_1(0) = x_1(0) = 1, \qquad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9\pi}{4} + \frac{\pi^2}{4} - 4,$$

$$\dot{y}_1(0) = x_2(0) + x_3^2(0) = 1, \qquad \dot{y}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + x_3^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 3.$$

Пусть это будет функция

$$y_1(t) = \theta(t) = \frac{1}{4}\sin 2t - 4\sin t + \cos t + t^2 + \frac{9t}{2}.$$

Вычисляя ее производные по времени и подставляя их в уравнения (26), (27), получаем дифференциальное уравнение и граничные условия для функции y_2:

$$\begin{aligned}
&2x_{31}^2\left[(\sin 2t - 4\sin t + \cos t - 2)y_2^{(3)} + (-2\cos 2t + 4\cos t + \sin t)y_2^{(2)}\right] + \\
&\quad + (-\sin 2t + 4\sin t - \cos t + 2)(x_{31} + \sin 2t - 4\sin t + \cos t - 2)(y_2^{(2)} + \\
&\quad + \sin 2t - 4\sin t + \cos t - 2) = 0,
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
&2x_{31}^2\left[(\sin 2t - 4\sin t + \cos t - 2)y_2^{(4)} + (4\sin 2t - 4\sin t + \cos t)y_2^{(2)}\right] + \\
&\quad + (-\sin 2t + 4\sin t - \cos t + 2)(2x_{31} - 3(-\sin 2t + 4\sin t - \cos t + 2))(y_2^{(3)} + \\
&\quad + 2\cos 2t - 4\cos t - \sin t) = 0,
\end{aligned} \tag{30}$$

$$2y_2^{(2)}(0) - y_2^{(3)}(0) = 0, \quad y_2^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3. \tag{31}$$

В качестве решения граничной задачи (29)-(31) можно принять

$$y_2 = \frac{1}{4}\sin 2t + \cos t + 2\sin t - \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}t.$$

При этом
$$x_{31} = -\cos t + 2. \tag{32}$$
Подставляя найденное значение (32) в формулы (23), (28), получаем решение исходной задачи
$$\begin{aligned} u &= \sin t, \\ x_1 &= \frac{1}{4}\sin 2t - 4\sin t + \cos t + t^2 + \frac{9t}{2}, \\ x_2 &= -\sin t + 2t, \\ x_3 &= -\cos t + 2. \end{aligned}$$

5. Особенности вычислительного алгоритма. Основные трудности в применении обобщенного флэт-алгоритма связаны с обращением отображения $x_1, ..., x_\lambda, u \to \to y_1, ..., y_\lambda, ..., y_1^{(s)}, ..., y_\lambda^{(s)}$ и решением возникающей краевой задачи. В частности, в рассмотренном примере это отображение имеет особенность при $x_3 = 0$, и избежать ее не удается, если это условие выполнено для граничной точки. Следует отметить, что проблема регуляризации отображения возникает и для флэт-систем в нелинейном случае. В настоящее время вопрос регуляризации и совершенствования флэт-алгоритмов является первоочередным и необходим для их успешного применения. В качестве первых шагов можно рассмотреть использование скользящих режимов и упрощение краевой задачи с помощью специального выбора свободных условий.

1. *Fliess M., Levine J., Martin Ph., Rouchon P.* Sur les systemes non lineaires differentiellement plats // C.R. Acad. Sci. – Paris, 1992. – **315**, ser 1. – P. 619-624.
2. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Условия идентифицируемости нелинейных механических систем // Механика твердого тела. – 1984. – Вып.16. – С. 77-91.
3. *Ковалев А.М.* Критерии функциональной управляемости и обратимости нелинейных систем // Прикл. математика и механика. – 1998. – **62**, вып 1. – С. 110-120.
4. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. - 549 p.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kovalev@iamm.ac.donetsk.ua
Получено 29.03.01