ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2001. Вып. 31

УДК 531.38

©2001. **В.Е. Пузырев**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ДВУХЗВЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

В статье рассмотрен вопрос об устойчивости двойного математического (плоского) маятника, первое из звеньев которого жесткое, а второе – упругое. В качестве невозмущенного движения выбран режим, в котором оси звеньев маятника расположены вертикально, но материальная точка, соответствующая второму звену маятника, совершает высокочастотные колебания малой амплитуды. Получены необходимые условия устойчивости – устойчивость для линеаризованной системы; выяснен их механический смысл.

Постановка задачи. Рассмотрим двухзвенный плоский маятник OO_1O_2: точка O неподвижна, материальная точка O_1 соединена с O посредством жесткого невесомого стержня (струны) длиною l_1, материальная точка O_2 соединена с O_1 посредством невесомого стержня длиною l_2, на свободном конце которого расположен упругий телескопический шарнир (точка O_2 может перемещаться вдоль оси второго маятника). Массы точек O_1 и O_2 равны соответственно m_1 и m_2, коэффициент упругости шарнира обозначим через κ. Все связи предполагаются идеальными.

Уравнения движения. Введем в качестве обобщенных координат углы φ_1, φ_2, характеризующие отклонение оси соответствующего звена маятника от вертикали, направленной вниз, и величину ξ – относительное удлинение длины второго звена маятника, то есть $O_1O_2 = l_2 + l_2\xi$. Учитывая, что $\mathbf{OO_1} = l_1(\sin\varphi_1,\ \cos\varphi_1)$, $\mathbf{O_1O_2} = l_2(1+\xi)(\sin\varphi_2, \cos\varphi_2)$, получим для кинетической и потенциальной энергий системы следующие выражения:

$$2T = m_1 l_1^2\dot\varphi_1^2 + m_2[l_1^2\dot\varphi_1^2 + l_2^2\dot\xi^2 + l_2^2(1+\xi)^2\dot\varphi_2^2 + 2l_1l_2\dot\xi\dot\varphi_1\sin(\varphi_2-\varphi_1) +$$

$$+2l_1l_2\ (1+\xi)\ \dot\varphi_1\dot\varphi_2\ \cos(\varphi_2-\varphi_1)],$$

$$\Pi = -m_1 g l_1\ \cos\varphi_1 - m_2 g\ [l_1\cos\varphi_1 - l_2(1+\xi)\ \cos\varphi_2] + \frac{1}{2}\kappa l_2^2\xi^2.$$

Вводя безразмерные парметры и время по формулам

$$\frac{m_2}{m_1} = \mu, \quad \frac{l_2}{l_1} = \gamma, \quad \Omega^2 = \frac{\kappa}{m_2}, \quad \Omega\, t = \tau, \tag{1}$$

и обозначая штрихом дифференцирование по τ, уравнения движения в форме Лагранжа второго рода (с точностью до множителя $m_1 l_1^2\ \Omega^2$) запишем в виде:

$$(1+\mu)\varphi_1'' + \mu\gamma(1+\xi)\varphi_2''\cos(\varphi_2-\varphi_1) + \mu\gamma\xi''\sin(\varphi_2-\varphi_1) + 2\mu\gamma\varphi_2'\ \xi' -$$

$$-\mu\gamma(1+\xi){\varphi_2'}^2\sin(\varphi_2-\varphi_1) + (1+\mu)\frac{g}{\Omega^2\ l_1}\sin\varphi_1 = 0,$$

$$\mu\gamma(1+\xi)\varphi_1''\cos(\varphi_2-\varphi_1) + \mu\gamma^2(1+\xi)^2\varphi_2'' + 2\mu\gamma^2(1+\xi)\varphi_2'\ \xi' +$$

$$+\mu\gamma(1+\xi){\varphi_1'}^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+\mu\gamma\frac{g}{\Omega^2\, l_1}(1+\xi)\sin\varphi_2=0,$$

$$\mu\gamma\varphi_1''\sin(\varphi_2-\varphi_1)+\mu\gamma\xi''-\mu\gamma{\varphi_1'}^2\cos(\varphi_2-\varphi_1)-\mu\gamma^2(1+\xi){\varphi_2'}^2-\mu\gamma\frac{g}{\Omega\, l_1}\cos\varphi_2+\mu\gamma^2\,\xi=0,$$

Разрешим полученную систему относительно вторых производных. Имеем

$$\varphi_1''=-\frac{g}{\Omega^2\, l_1}\sin\varphi_1+\mu\gamma\,\xi\sin(\varphi_2-\varphi_1),$$

$$\varphi_2''=\frac{1}{(1+\xi)}\{-2\xi'\,\varphi_2'-[\frac{g}{\Omega^2\, l_2}\,\cos\varphi_1+\mu\cos(\varphi_2-\varphi_1)+\frac{1}{\gamma}{\varphi_1'}^2]\sin(\varphi_2-\varphi_1)\},\qquad(2)$$

$$\xi''=\frac{g}{\Omega^2\, l_2}\cos\varphi_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)-\xi\,[1+\mu\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)]+\frac{1}{\gamma}{\varphi_1'}^2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+(1+\xi){\varphi_2'}^2.$$

Уравнения движения (2) допускают частное решение:

$$\varphi_1^0=0,\ \varphi_2^0=\pi,\ {\varphi'}_1^0={\varphi'}_2^0=0,\ \xi^0(\tau)=-\frac{g}{\Omega^2\, l_2}+\alpha\cos\tau,\ {\xi'}^0=-\alpha\sin\tau,\qquad(3)$$

которое описывает вертикальные колебания точки O_2 с произвольной амплитудой αl_2 и частотой Ω; оси звеньев маятника расположены вертикально, при этом первое звено занимает нижнее положение равновесия, а второе – верхнее.

Обозначая относительное статическое удлинение пружины через β (ускорение силы тяжести при этом можно записать в виде $g=\beta l_2\Omega^2$), рассмотрим вопрос об устойчивости по Ляпунову решения (3) . Сохраняя для возмущений обозначения соответствующих переменных, запишем уравнения (2) в вариациях

$$\varphi_1''=-\beta\gamma\varphi_1+\mu\gamma\xi^0(\tau)\ (\varphi_1-\varphi_2),$$

$$\varphi_2''=-\frac{2\xi'^0}{1+\xi^0}\ {\varphi'}_2+(\beta-\mu\xi^0)\ (\varphi_1-\varphi_2),$$

$$\xi''=-\xi.$$

Третье уравнение записанной линейной системы отщепляется и имеет ограниченное (устойчивое) решение, поэтому задача сводится к исследованию устойчивости системы двух уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Поскольку получение достаточно общих условий устойчивости в случае произвольных величин α и Ω является проблематичным, то ограничимся традиционным для подобных ситуаций (см., например, [1], [2]) предположением о малости амплитуды колебаний и их высокой частоте. Заметим, что положение относительного равновесия, в котором оба звена маятника занимают нижнее положение "как правило"устойчиво, исключение составляют области параметрического резонанса – некоторые области на плоскости $O\alpha\Omega$, в которых происходит "раскачивание"системы. Для случая одинаковых звеньев $(l_1=l_2, m_1=m_2)$ эти области построены в монографии [2].

Для асимптотического представления показательной матрицы изучаемой системы воспользуемся результатами работы [3]. Выполним предварительно некоторые преобразования, упрощающие последующие вычисления. Для того чтобы избавиться от первой производной во втором из уравнений системы, сделаем замену $u=(1+\xi^0(\tau))\varphi_2$, получим

$$\varphi_1''=\gamma[-\beta+\mu\xi^0(\tau)]\varphi_1-\frac{\mu\gamma\xi^0(\tau)}{1+\xi^0(\tau)}u,$$

$$u'' = [-\beta + \mu\xi^0(\tau)]\varphi_1 - \frac{(1+\mu)\xi^0(\tau)}{1+\xi^0(\tau)}u.$$

Поскольку коэффициенты при переменной φ_1 в первом и втором уравнениях отличаются постоянным множителем, положим также $\varphi_1 - \gamma u = x$. Обозначая $\alpha = \varepsilon^2, \beta = b\varepsilon^4$ и подставляя из (3) выражение для $\xi^0(\tau)$, имеем

$$\varphi_1'' + \varepsilon^2\{[b\gamma(1+\mu)\varepsilon^2 - \gamma\mu\cos\tau + \frac{\mu(-b\varepsilon^2+\cos\tau}{1-b\varepsilon^4+\varepsilon^2\cos\tau}]\varphi_1 - \frac{\mu(-b\varepsilon^2+\cos\tau)}{1-b\varepsilon^4+\varepsilon^2\cos\tau}u\} = 0,$$

$$x'' + \varepsilon^2\frac{-b\varepsilon^2+\cos\tau}{1-b\varepsilon^4+\varepsilon^2\cos\tau}(-\varphi_1 + x) = 0. \tag{4}$$

Система (4) есть система вида

$$\mathbf{y}'' + \varepsilon^2\mathbf{P}(\tau,\varepsilon)\mathbf{y} = \mathbf{0},$$

и для вычисления ее показательной матрицы воспользуемся результатами работы [3]. Учитывая, что

$$\mathbf{P_0}(\tau) = \cos\tau \begin{bmatrix} \mu(1-\gamma) & -\mu \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P_1} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} -b\gamma(1+\mu) + \mu(b-\cos^2\tau) & \mu(-b+\cos^2\tau) \\ -b+\cos^2\tau & b-\cos^2\tau \end{bmatrix},$$

последовательно вычисляем: $\widehat{\mathbf{P_0}} = \mathbf{0}$ (среднее за период),

$$\mathbf{P_0^\star} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\tau} [\mathbf{P_0(t)} - \widehat{\mathbf{P_0}}]\mathbf{dt} = \sin\tau \begin{bmatrix} \mu(1-\gamma) & -\mu \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{P_0^\star}} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{P_0^{\star\star}} = (\mathbf{1} - \cos\tau) \begin{bmatrix} \mu(1-\gamma) & -\mu \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P_0P_0^{\star\star}} = (\cos\tau - \cos^2\tau) \begin{bmatrix} \mu^2(1-\gamma)^2 + \mu & -\mu^2(1-\gamma) - \mu \\ -\mu(1-\gamma) - 1 & \mu + 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}(\varepsilon) = \varepsilon \begin{bmatrix} -\varepsilon\widehat{\mathbf{P_0^\star}} - \varepsilon^2\widehat{\mathbf{P_1^\star}} & \mathbf{E} + 2\varepsilon^2\widehat{\mathbf{P_0^{\star\star}}} \\ -\widehat{\mathbf{P_0}} - \varepsilon\widehat{\mathbf{P_1}} + \varepsilon^2[\widehat{\mathbf{P_0P_0^{\star\star}}} - \widehat{\mathbf{P_2}} - (\widehat{\mathbf{P_0^\star}})^2 + \widehat{\mathbf{P_0^{\star\star}}\mathbf{P_0}}] & \varepsilon\widehat{\mathbf{P_0^\star}} + \varepsilon^2\widehat{\mathbf{P_1^\star}} \end{bmatrix} + \mathbf{o}(\varepsilon^4) =$$

$$= \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} + 2\varepsilon\widehat{\mathbf{P_0^{\star\star}}} + \mathbf{o_1}(\varepsilon^3) \\ \varepsilon^2(\widehat{\mathbf{P_0P_0^{\star\star}}} - \widehat{\mathbf{P_2}}) + \mathbf{o_2}(\varepsilon^3) & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A(t)X}, \tag{6}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R^{2n}}$, матрица-функция $\mathbf{A(t)}$ – интегрируемая, кусочно-непрерывная в любом конечном промежутке, T-периодическая по времени. Согласно теореме Флоке-Ляпунова

[4], ее (системы) матрицант представим в виде $\mathbf{X(t)} = \mathbf{F_1(t)e^{tK_1}}$, где $\mathbf{F_1}$ – неособая непрерывная, периодическая периода T матрица-функция, порядка $2n * 2n$, производная которой есть интегрируемая кусочно-непрерывная функция, а $\mathbf{K_1}$ – некоторая постоянная матрица.

Тогда, если $\mathbf{K_1}$ представима в виде

$$\mathbf{K_1} = \mathbf{diur}(\mathbf{B_{12}}, \mathbf{B_{21}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B_{12}} \\ \mathbf{B_{21}} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

где матрица $\mathbf{B_{12}}$ невырождена, то из ограниченности решений системы (6) следует ограниченность решений системы

$$\ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{B}_{12}\mathbf{B}_{21}\mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{7}$$

($\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$), и обратно – из ограниченности решений системы (7) следует ограниченность решений системы (6).

Доказательство. С помощью линейного невырожденного преобразования $\mathbf{z} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$ представим (7) как систему уравнений первого порядка. Выбирая матрицу $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{diul}(\mathbf{E}, \mathbf{B_{12}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{12} \end{bmatrix},$$

и используя свойства умножения матриц "**diul**" и "**diur**" (9) работы [3], имеем

$$\mathbf{CB_{12}B_{21}C^{-1}} = \mathbf{diul}(\mathbf{E}, \mathbf{B_{12}^{-1}}) * \mathbf{diur}(\mathbf{E}, \mathbf{B_{12}B_{21}}) * \mathbf{diul}(\mathbf{E}, \mathbf{B_{12}}) =$$

$$= \mathbf{diur}(\mathbf{E^2}, \mathbf{B_{21}}) * \mathbf{diul}(\mathbf{E}, \mathbf{B_{12}}) = \mathbf{diur}(\mathbf{E^2B_{12}}, \mathbf{B_{21}E}) = \mathbf{diur}(\mathbf{B_{12}}, \mathbf{B_{21}}) = \mathbf{K_1},$$

то есть получаем систему вида $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{K}_1\mathbf{z}$. Выполняя далее линейное невырожденное преобразование $\mathbf{z} = \mathbf{F}_1^{-1}(t)\mathbf{x}$, приходим к системе (6). Поскольку матрица-функция $\mathbf{F}_1(t)$ невырождена и T-периодична, то этими же свойствами обладает и обратная матрица; кроме того обе матрицы являются ограниченными по времени. Следовательно, из ограниченности решений (6) следует ограниченность решений системы (7). Поскольку же (7) есть система с постоянными коэффициентами, (и из ограниченности $\mathbf{y}$ следует ограниченность $\dot{\mathbf{y}}$), то справедливо и обратное утверждение. Лемма доказана. □

Из доказательства леммы вытекает также, что корни характеристического уравнения системы (7) совпадают с собственными значениями матрицы $\mathbf{K}_1$ и, как следствие, – с характеристическими показателями системы (6) (с точностью до слагаемых вида $\mathrm{i}\,\frac{2\pi m}{T}$, где m – некоторое целое число, i – мнимая единица). Поэтому для изучения вопроса об ограниченности [1] решений системы (6) достаточно исследовать уравнение $\det[\lambda^2\mathbf{E} - \mathbf{B}_{12}\mathbf{B}_{21}] = 0$.

Применительно к изучаемой задаче, учитывая (5), имеем:

$$\det[\lambda^2\mathbf{E} - \varepsilon^4(\widehat{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_0^{**}} - \widehat{\mathbf{P}_2}) + ...] = 0$$

[1]Напомним, что для произвольных неавтономных по времени линейных систем из ограниченности решений следует устойчивость по Ляпунову и обратно.

или

$$\det \begin{bmatrix} 2\lambda^2 + \alpha^2\{2b[\gamma - \mu(1-\gamma)] + \mu^2(1-\gamma)^2\} + \ldots & \alpha^2[2b\mu - \mu^2(1-\gamma)] + \ldots \\ \alpha^2[2b - \mu(1-\gamma)] + \ldots & 2\lambda^2 + \alpha^2(\mu - 2b) + \ldots \end{bmatrix} = 0,$$

многоточием обозначены слагаемые порядка малости выше выписанных. Раскрывая определитель, получаем биквадратное уравнение

$$4\lambda^4 + \alpha^2(a_2 + \ldots)\lambda^2 + \alpha^4(a_0 + \ldots) = 0, \tag{8}$$

где

$$a_2 = 2\{\mu\,[\mu(1-\gamma)^2 + 1] - 2b(\mu+1)\,(1-\gamma)\}, \quad a_0 = 2b\gamma\{\mu\,[\mu(1-\gamma) + 1] - 2b(\mu+1)\}.$$

Условие устойчивости нулевого решения системы (4) есть условие существования у уравнения (8) двух пар различных чисто мнимых корней, то есть:

$$a_2 > 0, \quad a_0 > 0, \quad D = a_2^2 - 16a_0 > 0. \tag{9}$$

Поскольку величины b и γ положительны, то в случае $\gamma \geq 1$ коэффициент a_2 положителен. Если же $0 < \gamma < 1$, то справедлива оценка

$$a_2 = 2\,[\,\mu^2(1-\gamma)^2 + \mu(1-\gamma) + \mu\gamma - 2b(\mu+1)\,(1-\gamma)] >$$

$$> 2\,(1-\gamma)\,[\,\mu^2(1-\gamma) + \mu - 2b(\mu+1)] = \frac{1-\gamma}{b\gamma}a_0,$$

и из положительности a_0 следует положительность a_2. Записывая далее выражение для D (с точностью до положительного множителя) как квадратный трехчлен относительно величины b

$$4b^2(\mu+1)[(\mu+1)(1-\gamma)^2 + 4\gamma] - 4b\mu\,[\mu^2(1-\gamma)^3 + \mu(2+\gamma^2)\,(1-\gamma) + 1 + \gamma] +$$

$$+\mu^2[\mu(1-\gamma)^2 + 1]^2$$

и вычисляя его дискриминант D_1, получаем: $D_1 = -64\mu\gamma^4 < 0$. Следовательно, $D > 0$ для любых допустимых значений параметров. Таким образом, необходимым и достаточным условием выполнения неравенств (9) является положительность свободного члена характеристического уравнения (8), то есть величины a_0. Как можно видеть из ее представления, для этого необходима положительность выражения, стоящего в квадратных скобках, и ограничение сверху на параметр b. Выражая величины μ, γ и b через параметры системы по формулам (1), получаем условия:

$$m_1 l_1 > m_2(l_2 - l_1), \tag{10}$$

$$\alpha^2\,\kappa > 2g m_1(m_1 + m_2)/[(m_1 + m_2)l_1 - m_2 l_2]. \tag{11}$$

Условие (10) можно интерпретировать следующим образом. На концах вертикально расположенного невесомого жесткого стержня длиною l_2 закреплены две точечные массы: m_1 на верхнем конце и m_2 – на нижнем. Центр масс системы находится при этом на расстоянии l_1 от нижнего конца стержня. Тогда неравенство (10) означает, что точка закрепления стержня находится выше центра масс, то есть положение равновесия такой системы устойчиво. Если неравенство (10) имеет противоположный знак, то точка закрепления лежит ниже центра масс, и положение равновесия неустойчиво.

Условие (11) накладывает ограничение снизу на величину жесткости шарнира – колебания точки O_2 должны быть "достаточно быстрыми".

Заметим, что внося соответствующие изменения в вычисления в случае, когда первое звено маятника направлено вверх, а второе – вниз ($\varphi_1^0 = \pi$, $\varphi_2^0 = 0$), получим условия

$$m_1 l_1 < m_2(l_2 - l_1), \tag{12}$$

$$\alpha^2\, \kappa > 2g m_1(m_1 + m_2)/[m_2 l_2 - (m_1 + m_2) l_1]. \tag{13}$$

Выводы. Таким образом, в работе получены условия (10) - (13) – условия устойчивости (в первом приближении) относительного положения равновесия двузвенного математического маятника с одним упругим звеном в случае, когда одно из звеньев маятника занимает верхнее положение равновесия, а другое – нижнее. Эти условия имеют простой механический смысл: 3. V

– маятник со сложенными и "склеенными"звеньями устойчив;

– жесткость упругого звена достаточно велика, а амплитуда колебания точки O_2 относительно оси этого звена обратно пропорциональна частоте этого колебания.

Если же одно из неравенств (10) - (13) имеет противоположный знак, то соответсвующее невозмущенное движение неустойчиво (для нелинейной системы).

1. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наукова думка. – 1971. – 440 с.
2. *Старжинский В.М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. – М.: Наука. – 1977. – 256 с.
3. *Пузырев В.Е.* Об асимптотическом представлении решений линейной динамической системы с периодическими коэффициентами // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 71-76.
4. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука. – 1972. – 720 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
techmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 20.02.01