

УДК 531.38

©2001. Л.Г. Лобас, Л.Л. Лобас

ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРХНЕГО ПОЛОЖЕНИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО ДВУХЗВЕННОГО МАЯТНИКА

Установлена зависимость границ областей флаттерной и дивергентной неустойчивости от параметра асимметрии следящей силы. Показано, что при некоторых значениях параметра область флаттерной неустойчивости исчезает, область дивергентной неустойчивости существует всегда. Предложена методика нахождения границ применимости статической концепции Л. Эйлера в теории устойчивости сжатых упругих стержней.

Попытка А. Пфлюгера [1] перенести статический метод Л. Эйлера (предложенный для решения задачи устойчивости упругого стержня, сжатого силой неизменного направления) на задачу устойчивости консольного стержня, сжатого следящей силой, привела к неправдоподобному результату. Парадокс Пфлюгера разрешил Г. Циглер [2-4], исследовавший вместо континуального стержня его дискретную модель – двухзвенный математический маятник. Вследствие непрерывной зависимости решений гладкой динамической системы от параметра должна существовать область пространства параметров, в которой статический метод Эйлера все же решает задачу устойчивости верхнего положения равновесия. Нахождению этой области и другим вопросам посвящена настоящая работа.

Асимметрия следящей силы и соединительных пружин рассматривалась в [5-7]. Основное внимание уделено окрестности двойного нулевого собственного значения матрицы линеаризации. Бифуркации стационарных состояний, приводящие к катастрофам складки и сборки, исследовались в [8-10].

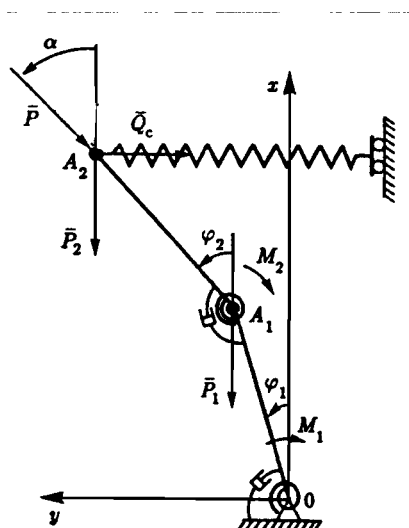


Рис. 1. Схема маятника.

1. Дифференциальные уравнения движения двухзвенного перевернутого маятника. Механическая система, изображенная на рис. 1, состоит из двух материальных точек A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2 соответственно, соединенных невесомыми недеформируемыми стержнями OA_1 и A_1A_2 . Их длины обозначим l_1 и l_2 соответственно. Стержни могут отклоняться от вертикали на углы φ_1 и φ_2 . Верхний конец звена A_1A_2 упруго закреплен посредством горизонтального линейно деформируемого упругого элемента с жесткостью c . Считается, что в положении равновесия, когда $\varphi_1 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = 0$, горизонтальная пружина недеформирована. В нижних концах O, A_1 обоих звеньев размещены упруговязкие шарниры. Пусть c_1 и c_2 – жесткости спиральных пружин; μ_1 – коэффициент вязкости в нижнем шарнире O , учитывающий действие внешнего трения; μ_2 – коэффициент вязкости в промежуточном шарнире A_1 , отражающий влияние внутреннего трения в системе. К верхнему концу маятника

приложена сила \mathbf{P} , модуль которой постоянен, а направление зависит от конфигурации системы: она образует с вертикалью угол $\alpha = k\varphi_2$, то есть является асимметричной следящей силой. В [1-4] изучался случай $k = 1$.

Из [10] при $\delta = 0$ получаем следующие дифференциальные уравнения для нахождения углов φ_1 и φ_2 :

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1 + \\ + cl_1(l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 + c_1\varphi_1 + \mu_1\dot{\varphi}_1 + c_2(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + \mu_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - Pl_1 \sin(\varphi_1 - k\varphi_2) = 0, \quad (1)$$

$$m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2gl_2 \sin \varphi_2 + \\ + cl_2(l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2) \cos \varphi_2 - c_2(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + Pl_2 \sin(k - 1)\varphi_2 = 0.$$

Для приведения системы (1) к безразмерному виду выберем в качестве базисных параметры верхнего звена маятника: m_2, l_2, c_2 . Безразмерные величины обозначим чертой сверху:

$$\bar{P} = \frac{Pl_2}{c_2}, \quad \bar{m}_1 = \frac{m_1}{m_2}, \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{l_2}, \quad \bar{c}_1 = \frac{c_1}{c_2}, \quad \bar{c} = \frac{cl_2^2}{c_2}, \\ \bar{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{l_2\sqrt{m_2c_2}}, \quad \bar{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{l_2\sqrt{m_2c_2}}, \quad \bar{g} = \frac{gm_2l_2}{c_2}, \quad \bar{t} = \frac{t\sqrt{c_2}}{l_2\sqrt{m_2}}.$$

Оператор дифференцирования по безразмерному времени обозначим штрихом: $d/d\bar{t} = (')$. Дифференциальные уравнения (1) принимают вид

$$(1 + \bar{m}_1)\bar{l}_1^2\varphi_1'' + \bar{l}_1\varphi_2'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \bar{l}_1\varphi_2'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \bar{g}\bar{l}_1(1 + \bar{m}_1) \sin \varphi_1 + \\ + \bar{c}\bar{l}_1(\bar{l}_1 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 + \bar{c}_1\varphi_1 + \bar{\mu}_1\varphi_1' + \varphi_1 - \varphi_2 + \\ + \bar{\mu}_2(\varphi_1' - \varphi_2') - \bar{P} \bar{l}_1 \sin(\varphi_1 - k\varphi_2) = 0, \quad (2) \\ \varphi_2'' + \bar{l}_1\varphi_1'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \bar{l}_1\varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \bar{g} \sin \varphi_2 + \\ + \bar{c} (\bar{l}_1 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \cos \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_2 - \bar{\mu}_2\varphi_1' + \bar{\mu}_2\varphi_2' + \bar{P} \sin(k - 1)\varphi_2 = 0.$$

Система (2) допускает решение $\varphi_1 = 0, \varphi_1' = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_2' = 0$, отвечающее верхнему положению равновесия маятника.

2. Уравнения в вариациях. Классификация сил по их математической структуре. Составим уравнения возмущенного движения в окрестности данного решения и линеаризуем их:

$$(1 + \bar{m}_1)\bar{l}_1^2\varphi_1'' + \bar{l}_1\varphi_2'' + (\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)\varphi_1' - \bar{\mu}_2\varphi_2' + [1 + \bar{c}_1 - \bar{g}\bar{l}_1(1 + \bar{m}_1) + \bar{c}\bar{l}_1^2 - \bar{P} \bar{l}_1]\varphi_1 + \\ + (\bar{c}\bar{l}_1 - 1 + k\bar{P} \bar{l}_1)\varphi_2 = 0, \quad (3) \\ \bar{l}_1\varphi_1'' + \varphi_2'' - \bar{\mu}_2\varphi_1' + \bar{\mu}_2\varphi_2' + (\bar{c}\bar{l}_1 - 1)\varphi_1 + [1 + \bar{c} - \bar{g} + (k - 1)\bar{P}] \varphi_2 = 0.$$

Введя вектор конфигураций $\varphi = \text{col}(\varphi_1, \varphi_2)$ и матрицы

$$A = \begin{vmatrix} (1 + \bar{m}_1)\bar{l}_1^2 & \bar{l}_1 \\ \bar{l}_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 & -\bar{\mu}_2 \\ -\bar{\mu}_2 & \bar{\mu}_2 \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} 0 & \frac{k}{2}\bar{P} \bar{l}_1 \\ -\frac{k}{2}\bar{P} \bar{l}_1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 + \bar{c}_1 + \bar{c}\bar{l}_1^2 - \bar{g}\bar{l}_1(1 + \bar{m}_1) - \bar{P}\bar{l}_1 & \bar{c}\bar{l}_1 - 1 + \frac{k}{2}\bar{P}\bar{l}_1 \\ \bar{c}\bar{l}_1 - 1 + \frac{k}{2}\bar{P}\bar{l}_1 & 1 + \bar{c} - \bar{g} + (k-1)\bar{P} \end{vmatrix},$$

запишем систему (3) в виде одного матричного уравнения $A\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + (C + Q)\varphi = 0$.

Матрицы A, B, C, Q отвечают инерционным, диссипативным, потенциальным и неконсервативным позиционным силам соответственно [11]. Наличие последних приводит к непрогнозируемости поведения системы в том смысле, что характер устойчивости состояния равновесия зависит во многом от матриц C и Q . Они содержат параметр k , могущий изменяться в широких пределах.

Характеристическое уравнение системы (3) имеет вид

$$\lambda^4 + B_1\lambda^3 + B_2\lambda^2 + B_3\lambda + B_4 = 0, \quad (4)$$

где

$$B_1 = -c_{22} - c_{44}, \quad B_2 = \bar{c} + E_2, \quad B_3 = \bar{c}E_3 + E_4, \quad B_4 = -h_2\bar{c} + h_1,$$

$$E_2 = c_{22}c_{44} - c_{24}c_{42} - c_{21} - b_{43}, \quad E_3 = c_{24}\bar{l}_1 - c_{22}, \quad E_4 = c_{21}c_{44} - c_{23}c_{42} + c_{22}b_{43} - c_{24}b_{41},$$

$$h_1 = c_{21}b_{43} - c_{23}b_{41}, \quad h_2 = c_{21} - c_{23}\bar{l}_1, \quad c_{21} = -\frac{1}{\bar{m}_1\bar{l}_1^2} [1 + \bar{c}_1 - \bar{g}\bar{l}_1(1 + \bar{m}_1) + \bar{l}_1(1 - \bar{P})],$$

$$c_{22} = -\frac{1}{\bar{m}_1\bar{l}_1^2} [\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2(1 + \bar{l}_1)], \quad c_{23} = \frac{1}{\bar{m}_1\bar{l}_1^2} [1 + \bar{l}_1(1 - \bar{g} - \bar{P})], \quad c_{24} = \frac{\bar{\mu}_2(1 + \bar{l}_1)}{\bar{m}_1\bar{l}_1^2},$$

$$c_{41} = -\bar{c}\bar{l}_1 + b_{41}, \quad c_{43} = -\bar{c}b_{43}, \quad b_{41} = \frac{1}{\bar{m}_1\bar{l}_1} [1 + \bar{c}_1 + \bar{l}_1(1 - \bar{g})(1 + \bar{m}_1) - \bar{P}\bar{l}_1],$$

$$b_{43} = -\frac{1}{\bar{m}_1\bar{l}_1} \{1 + \bar{l}_1(1 - \bar{g})(1 + \bar{m}_1) + \bar{l}_1\bar{P} [\bar{m}_1(k-1) - 1]\},$$

$$c_{42} = \frac{1}{\bar{m}_1\bar{l}_1} \{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2[1 + \bar{l}_1(1 + \bar{m}_1)]\},$$

$$c_{43} = -\frac{1}{\bar{m}_1\bar{l}_1} \{1 + \bar{l}_1(1 - \bar{g})(1 + \bar{m}_1) + \bar{m}_1\bar{l}_1\bar{c} + \bar{l}_1\bar{P}[\bar{m}_1(k-1) - 1]\},$$

$$c_{44} = -\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{m}_1\bar{l}_1} [1 + \bar{l}_1(1 + \bar{m}_1)].$$

Из формулы Орландо [12] следует, что гиперповерхности пространства параметров, являющиеся границами области устойчивости, описываются (при условии $B_1 > 0, B_2 > 0, B_3 > 0$) уравнениями

$$\Delta_3 = 0, \quad \Delta_3 = B_3(B_1B_2 - B_3) - B_1^2B_4, \quad (5)$$

$$B_4 = 0. \quad (6)$$

На плоскости параметров \bar{P} и \bar{c} каждому из уравнений (5) и (6) соответствуют две алгебраические уникальные кривые, являющиеся гиперболами. Уравнения ветвей гиперболы (5) имеют вид

$$\bar{c} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ad}}{2a}, \quad (7)$$

$$\bar{c} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ad}}{2a}, \quad (8)$$

где

$$a = E_3(B_1 - E_3), \quad b = B_1(E_2E_3 + E_4 + h_2B_1) - 2E_3E_4, \quad d = B_1(E_2E_4 - h_1B_1) - E_4^2.$$

Гипербола (6) описывается уравнением

$$\bar{c} = \frac{h_1(\bar{P})}{h_2(\bar{P})}. \quad (9)$$

3. Анализ влияния параметра ориентации k следящей силы на области устойчивости. Положим $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 5$ кг, $l_1 = l_2 = 0,5$ м, $c_1 = c_2 = 400$ Нм, $\mu_1 = \mu_2 = 10$ Нмс. Пусть $D(s, 4 - s)$ – область плоскости параметров \bar{P} и \bar{c} , в которой s корней уравнения (4) имеют отрицательные действительные части. D -разбиение этой плоскости показано на рис. 2, а для $k = 1$. Даже небольшое увеличение параметра k приводит к тому, что кривая (7) опускается из первого квадранта в четвертый, поэтому в D -разбиении участвует лишь одна ветвь кривой (9) (рис. 2, б).

При $k = 0,96$ D -разбиение качественно не отличается от такового при $k = 1$. Однако начиная со значения $k = 0,8$ (рис. 2, в) оно другое. Изменения обусловлены тем, что при достаточно больших значениях \bar{P} кривая (9) не опускается (как на рис. 2, а), а поднимается. В результате возникает дополнительная точка пересечения кривых (5) и (6).

Еще более разительные изменения возникают при последующем уменьшении параметра k и приближении к "мертвой" силе P . Тогда происходит перестройка обеих кривых (5) и (6), вызывающая иную конфигурацию областей $D(s, 4 - s)$. Хотя при $k = 0,6$ общее разбиение плоскости параметров \bar{P} и \bar{c} в принципе аналогично разбиению при $k = 0,8$, однако соотношение между размерами областей отличается, поскольку соответствующая ветвь кривой (5) опускается для $\bar{P} > 11$.

На рис. 2, г приведено разбиение плоскости параметров \bar{P} и \bar{c} при $k = 0,4$. Принципиально новыми являются два обстоятельства: 1) кривая (5) становится эллипсом, 2) в разбиении принимают участие обе ветви гиперболы (6).

При меньших значениях параметра k ориентация ветвей гиперболы (6) сохраняется до $k = 0,19$, но для $k \leq 0,18$ она изменяется. В отличие от случая $k = 0,4$, в D -разбиении при $k = 0,18$ (рис. 2, д) принимает участие вся кривая (5).

Дальнейшее уменьшение параметра $0 \leq k \leq 0,17$ приводит к тому, что кривая (5) исчезает, и D -разбиение производится лишь кривой (6). Такая ситуация показана на рис. 2, е для $k = 0$ (случай Эйлера), и она сохраняется до $k = -0,4$. Однако при $k = -0,5$ (рис. 3) на плоскости параметров \bar{P} и \bar{c} появляется граница (5) области $D(4, 0)$, являющаяся теперь эллипсом, нижняя и верхняя части которого описываются уравнениями (7) и (8). Поэтому область $D(4, 0)$ асимптотической устойчивости вертикального состояния равновесия маятника получается вырезанием области $D(2, 2)$ из части первого квадранта, расположенного левее ветви кривой (9). С уменьшением k эта область смещается вправо. Поэтому уже при $k = -0,52$ D -разбиение качественно такое же, как на рис. 2, д.

При $k = -1,5$ и $k = -10$ ориентация гипербол (9) такая, как на рис. 2, е, однако кривая (5) опять изменяется: из эллипса она превращается в гиперболу.

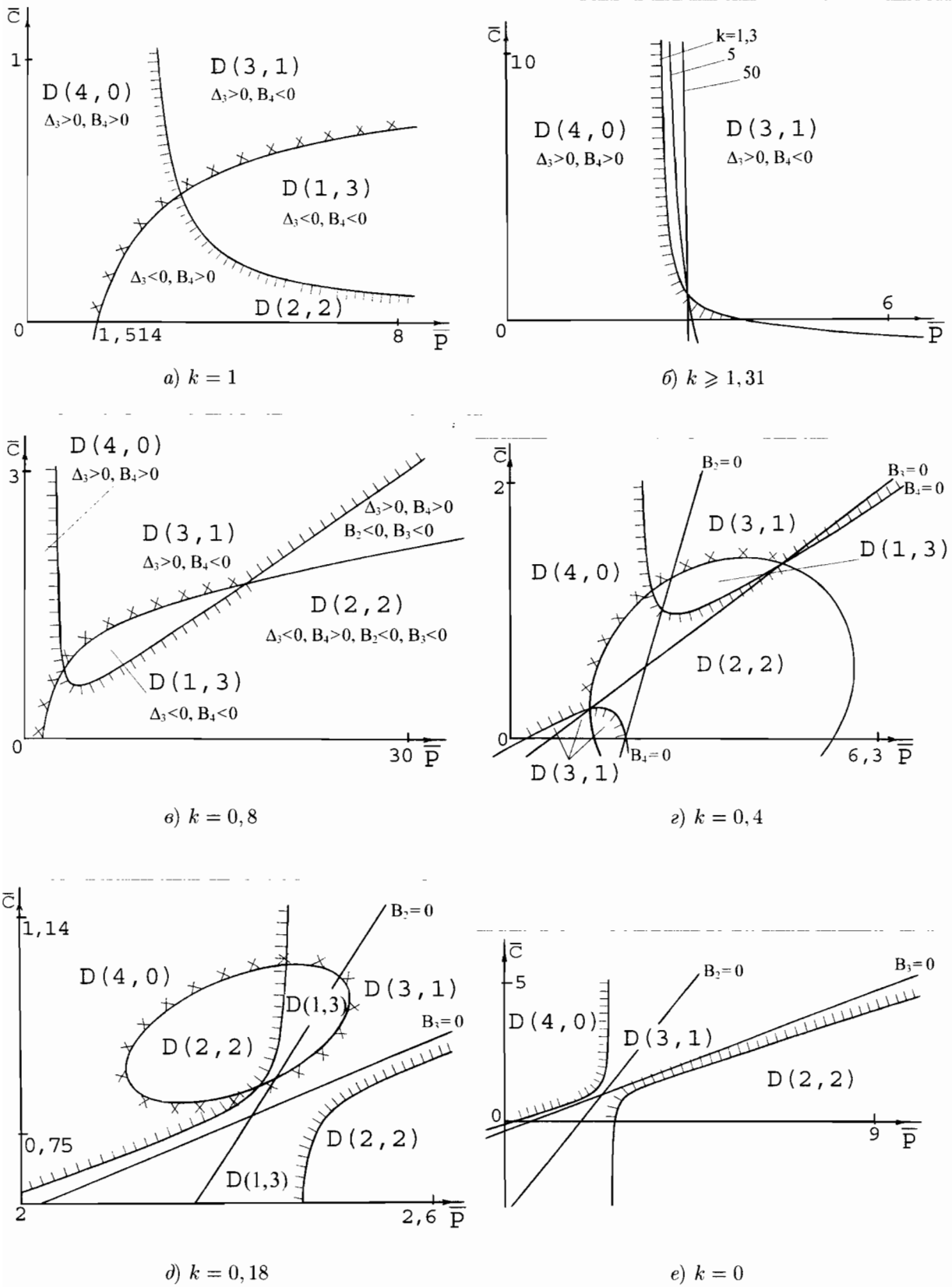


Рис. 2. D - разбиение плоскости существенных параметров.

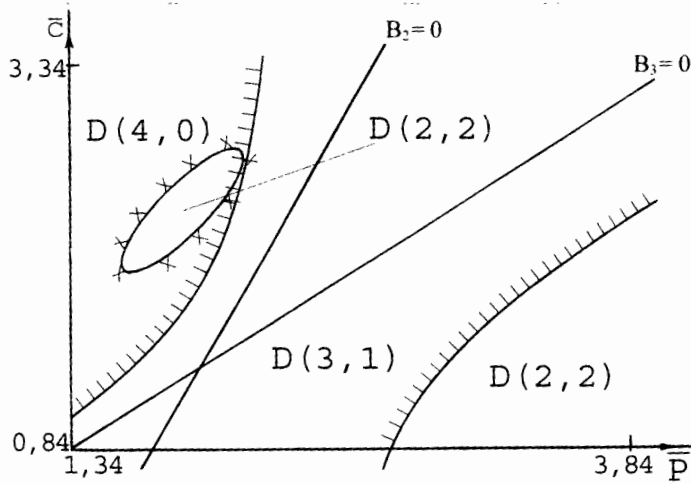


Рис. 3. D -разбиение плоскости существенных параметров при $k = -0,5$.

Таким образом, с изменением параметра k наиболее существенных деформаций претерпевает кривая (5). Кривая (6) при $0,18 < k < 0,19$ изменяет лишь свою ориентацию (рис. 4).

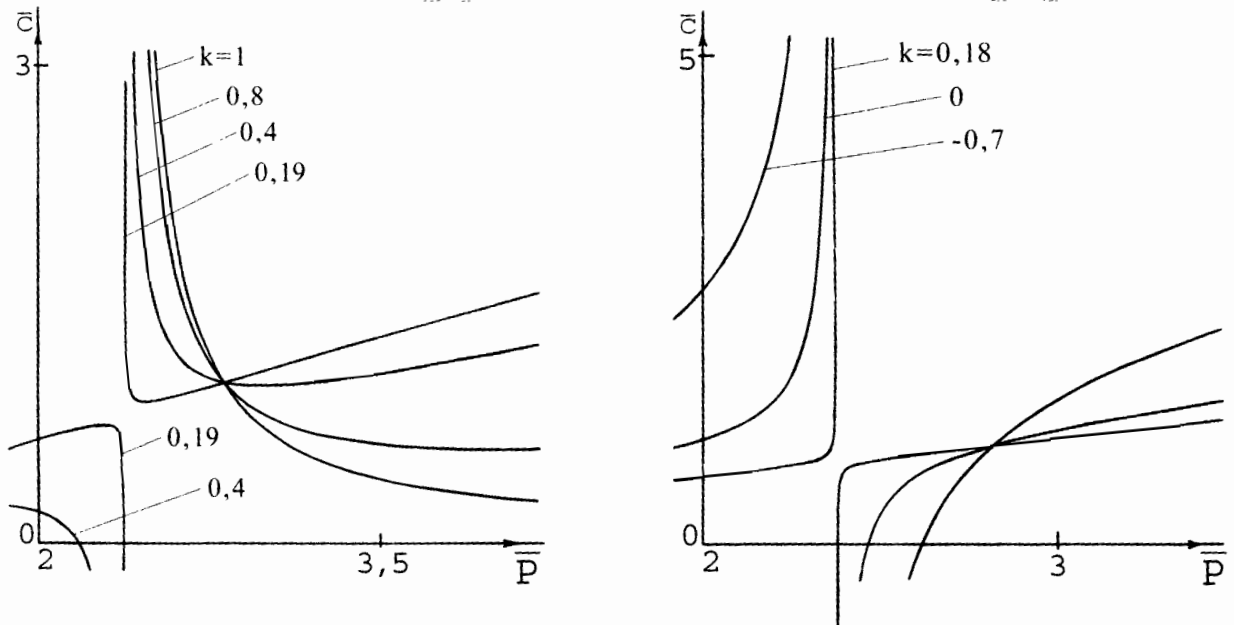


Рис. 4. Эволюция кривых $B_4 = 0$ при изменении параметра k .

4. О границах применимости статической концепции Л.Эйлера в теории упругих систем со следящими силами. Применение метода Циглера к более сложным, чем стержни, упругим системам ограничивается, прежде всего, отысканием подходящей дискретной модели. Но даже если такая модель найдена (для стержня это двух- или трехзвенный маятник), отрезок значений параметра ориентации следящей илы, при которых статический подход Л.Эйлера решает задачу устойчивости вертикального состояния равновесия, зависит от относительных значений так называемых "несущественных" параметров маятника. Для принятых в настоящей работе значений область применимости такова: $-0,4 \leq k \leq 0,17$.

Однако даже для симметричной следящей силы ($k = 1$) можно так подобрать соотношения между массами точек m_1 и m_2 , что D -разбиение плоскости параметров \bar{P} и \bar{c} повторит многие ситуации, показанные на приведенных выше рисунках. Асимметрия следящей силы лишь увеличит соответствующие эффекты.

1. *Pfugger A.* Stabilitätsprobleme der Elastostatik. – Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer, 1950. – 67 s.
2. *Ziegler H.* Die Stabilitatskriterien der Elastomechanik // Ingenieur-Archiv. – 1952. – **20**, N 1. – S. 49-56.
3. *Ziegler H.* Linear elastic stability // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 1953. – **4**, N 2. – P. 89-121; N 3. – S. 167-185.
4. *Цуглер Г.* Об устойчивости упругих систем // Проблемы механики. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – Вып. 2. – С. 116-160.
5. *Jin J.-D., Matsuzaki Y.* Bifurcations in a two-degree-of freedom elastic systems with follower forces // J. Sound and Vibr. – 1988. – **126**, N 2. – P. 265-277.
6. *Jin J.-D., Matsuzaki Y.* Stability and bifurcations of a double pendulum subjected to a follower force // AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 30th Struct., Struct. Dyn. and Mater. Conf. Mobile, Ala, Apr. 3-5, 1989: Collect. Techn. Pap. Pt.1 – Washington, 1989. – P. 432-439.
7. *Matsuzaki Y., Futura S.* Codimension three bifurcation of a double pendulum subjected to a follower force with imperfection // AIAA Dyn. Spec. Conf., Long Beach, Calif., Apr. 5-6, 1990: Collect. Techn. Pap. – Washington (D.C.), 1990. – P. 387-394.
8. *Лобас Л.Л.* До теорії руху перевернутого дволанкового математичного маятника з асиметричною слідкуючою силою // Доп. НАНУ. – 2001. – N 9. – С. 54-56.
9. *Лобас Л.Л.* Стаціонарні стани перевернутого дволанкового математичного маятника з асиметричною слідкуючою силою // Там же. – 2001. – N 10. – С. 70-72.
10. *Лобас Л.Л.* Бифуркации и катастрофы стационарных состояний перевернутого двухзвенного математического маятника при изменении управляющих параметров // Пробл. управления и информатики. – 2001. – N 4. – С. 15-25.
11. *Мержин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
12. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Киевский ун-т экономики и технологий транспорта
Бостонский колледж, США
leolobas@kiev-page.com.ua

Получено 7.09.01