ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2001. Вып. 31

УДК 517.9, 531.36

©2001. **Р.И.Гладилина**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Получены критерии асимптотической устойчивости и неустойчивости решений периодических систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, основанные на применении функций Ляпунова. При этом не требуется ни знакоопределенности производной функции Ляпунова $V(t,x)$ по времени, ни того, чтобы скачки ΔV функции Ляпунова в моменты импульсных воздействий были положительны (отрицательны). Приведены примеры.

Введение. Многие эволюционные процессы характеризуются тем, что в определенные моменты их развития они подвергаются резким изменениям. При математическом описании таких процессов обычно пренебрегают длительностью этих возмущений и считают, что возмущения имеют мгновенный характер. Это приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями, которые описываются дифференциальными уравнениями с импульсным воздействием.

Теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием начала активно развиваться в восьмидесятые годы XX столетия. Возрастание интереса в последние годы к системам с разрывными траекториями связано с запросами науки и новейшей техники, прежде всего с интенсивным развитием импульсных систем автоматического регулирования, импульсных вычислительных систем. Вследствие этого, произошло заметное увеличение числа математических работ по исследованиям дифференциальных уравнений с импульсным воздействием как в нашей стране, так и за рубежом. Наиболее систематические и глубокие исследования были выполнены в киевской школе нелинейной механики. В написанной в 1987 г. представителями этой школы А.М. Самойленко и Н.А. Перестюком монографии "Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием"[1] изложены основы математической теории указанных уравнений.

Теория систем с импульсным воздействием имеет широчайшие возможности для ее применения. Например, процессы со скачкообразными изменениями наблюдаются в механике (движение пружины при ударном воздействии; работа часового механизма; изменение скорости ракеты при отделении ступеней), в радиотехнике (генерация импульсов различной формы), в биологии (работа сердца; деление клеток), в биотехнологии (выращивание биокорма), в теории контроля (работа промышленных роботов) и так далее.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \neq t_i,$$

$$\triangle x \mid_{t=t_i} = I_i(x), \tag{1}$$

где $t \in R_+$, $R_+ = [0;+\infty)$, $i \in N$, $x \in \Omega = B_H \subset R^n$ $(H > 0)$, $B_H = \{x \in R^n : \ \mid x \mid < H\}$, $\mid x \mid$ – норма вектора x.

Решением такой системы будет функция $x = x(t)$, удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений, когда $t \neq t_i$, и имеющая разрывы первого рода со скачками $\Delta x = x(t+0) - x(t-0) = I_i(x)$ в моменты импульсного воздействия $t = t_i$. Функция $x(t)$ предполагается непрерывной слева, то есть $x(t-0) = x(t)$. Обозначим через $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Введем следующие условия.

(H1) Функция $f : R_+ \times \Omega \to R^n$ непрерывна в $R_+ \times \Omega$, $f(t, 0) = 0$ для $t \in R_+$ и существует константа $L > 0$ такая, что $\mid f(t,x) - f(t,y) \mid \leq L \mid x - y \mid$ для $t \in R_+$, $x \in \Omega$, $y \in \Omega$.

(H2) Функции $I_i : \Omega \to R^n$ непрерывны в Ω и $I_i(0) = 0$ $(i \in N)$.

(H3) Существует константа $h \in (0, H)$ такая, что, если $x \in B_h$, то $x + I_i(x) \in \Omega$, $(i \in N)$.

(H4) Последовательность моментов времени $\{t_i\}$ такова, что $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую скалярную функцию $V(t,x)$, определенную в области $R_+ \times \Omega$. Определим производную функции $V(t,x)$ в силу системы (1) следующим образом :

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x).$$

Обозначим

$$\Delta V_i = V(t_i, x + I_i(x)) - V(t_i, x), \quad i \in N.$$

Пусть функция $V(t,x)$ удовлетворяет условиям:

$$a(|x|) \leq V(t,x) \leq b(|x|) \quad \text{для} \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega, \tag{2}$$

где $a(s)$, $b(s)$– непрерывные, строго возрастающие функции; $a(0) = b(0) = 0$;

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \leq 0 \quad \text{для} \quad t \neq t_i, \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega; \tag{3}$$

$$V(t_i, x + I_i(x)) \leq V(t_i, x), \quad (i \in N). \tag{4}$$

Вопросы устойчивости систем с импульсным воздействием с применением второго метода Ляпунова рассматривались в работах [1-6]. Критерии асимптотической устойчивости, полученные в этих работах, в том или ином виде требуют, чтобы неравенства (3) либо (4) были строгими во всей области $R_+ \times \Omega$. В настоящей статье этого не требуется. В данной статье обобщена теорема Красовского [7,8] для периодических систем на случай систем с импульсным воздействием, что дополняет исследования указанных выше работ.

2. Основные результаты. Рассмотрим периодическую систему с импульсным воздействием.

(H5) Система (1) периодична с периодом T, если

$$\exists T > 0 : f(t+T, x) \equiv f(t,x),$$

$$\exists p \in N : I_{i+p}(x) \equiv I_i(x),$$

$$t_{i+p} = t_i + T.$$

Очевидно, что для периодической системы с импульсным воздействием условие (H4) выполняется.

Теорема 1. Пусть для системы уравнений (1) выполнены условия (H1)-(H3), (H5) и существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t,x)$, периодическая по времени с периодом Т, удовлетворяющая условиям (2)-(4), причем вдоль любого решения системы, не обращающегося в нуль, начиная с некоторого момента времени, при сколь угодно больших t существуют точки $(t,x) \in R_+ \times \Omega$, в которых неравенства (3) либо (4) являются строгими.

Тогда тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Решение $x \equiv 0$ равномерно устойчиво; это показано в работе [2].

Пусть $0 < \alpha < h$. Тогда из (2) получим, что

$$V_{t,\alpha}^{-1} = \{x \in \Omega : V(t+0,x) \leq a(\alpha)\} \subset \bar{B}_\alpha \subset \Omega, \quad t \in R_+ \ .$$

Пусть $t_0 \in R_+$, $x_0 \in V_{t_0,\alpha}^{-1}$, $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ - решение системы (1), проходящее через точку (t_0,x_0). Тогда $x(t) \in \bar{B}_\alpha$ для $t > t_0$.

Докажем, что $\lim x(t,t_0,x_0) = 0$ при $t \to \infty$.

Функция $V(t,x(t,t_0,x_0))$, как невозрастающая и неотрицательная, имеет предел $V_0 = \lim V(t,x(t,t_0,x_0))$ при $t \to \infty$, причем

$$V(t,x(t,t_0,x_0)) \geq V_0, \quad \text{при} \quad t \geq t_0. \tag{5}$$

Покажем, что $V_0 = 0$. Предположим противное: пусть $V_0 > 0$. Тогда из неравенства (2) следует, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$\delta \leq \mid x(t,t_0,x_0) \mid \leq \alpha, \quad t \geq t_0. \tag{6}$$

Рассмотрим последовательность $x_0^k = x(t_0 + kT, t_0, x_0)$, $(k \in N)$. Из ограниченности области (6) следует, что последовательность $\{x_0^k\}$ имеет предельную точку x_0^*, и существует подпоследовательность, которая сходится к точке x_0^*. Не нарушая общности, будем считать, что сама последовательность $\{x_0^k\}$ сходится к x_0^* при $k \to \infty$.

В силу непрерывности и периодичности функции $V(t,x)$ имеем

$$V_0 = \lim_{t\to\infty} V(t,x(t,t_0,x_0)) = \lim_{k\to\infty} V(t_0+kT, x(t_0+kT,t_0,x_0)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} V(t_0, x(t_0+kT,t_0,x_0)) = \lim_{k\to\infty} V(t_0,x_0^k) = V(t_0,x_0^*). \tag{7}$$

Рассмотрим решение $x(t,t_0,x_0^*)$ при $t \geq t_0$. Так как в силу условий теоремы, существуют точки $(t,x(t,t_0,x_0^*))$, в которых либо $\dot{V}_{(1)}(t,x) < 0$, либо $\Delta V = V(t_i, x + I_i(x)) - V(t_i,x) < 0$, то можно указать момент времени $t^* > t_0$, в который выполняется условие

$$V(t^*, x(t^*,t_0,x_0^*)) = V_1 < V_0. \tag{8}$$

Из условия (H5) следует, что

$$x(t^*,t_0,x_0^k) = x(t^*+kT, t_0+kT, x_0^k) =$$

$$= x(t^*+kT, t_0+kT, x(t_0+kT,t_0,x_0)) = x(t^*+kT,t_0,x_0). \tag{9}$$

Используя (7)-(9) и периодичность $V(t,x)$, приходим к следующему противоречию:

$$V_0 = \lim_{k\to\infty} V(t^* + kT, x(t^* + kT, t_0, x_0)) = \lim_{k\to\infty} V(t^*, x(t^* + kT, t_0, x_0)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} V(t^*, x(t^*, t_0, x_0^k)) = V(t^*, x(t^*, t_0, x_0^*)) = V_1 < V_0.$$

Отсюда получаем $V_0 = 0$ и, следовательно, $\lim_{t\to\infty} x(t,t_0,x_0) = 0$. □

Теорема 2. Пусть для системы уравнений (1) выполнены условия (H1)-(H3), (H5) и существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t,x)$, периодическая по времени с периодом T, которая определена в области $R_+ \times \Omega$, допускает в этой области бесконечно малый высший предел и может принимать положительные значения $V > 0$ в некоторых точках, лежащих в произвольной окрестности начала координат. Кроме того,

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \geq 0 \quad \text{для} \quad t \neq t_i, \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega. \tag{10}$$

$$V(t_i, x + I_i(x)) \geq V(t_i, x), \quad (i \in N), \tag{11}$$

причем вдоль любого решения системы (1) не обращающегося в нуль, начиная с некоторого момента времени, при сколь угодно больших t существуют точки $(t,x) \in R_+ \times \Omega$, в которых неравенства (10) либо (11) являются строгими.

Тогда тривиальное решение системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть нулевое решение системы (1) устойчиво, тогда

$$(\forall \alpha > 0) \quad (\bar{B}_\alpha \subset \Omega) \quad (\forall t_0 \in R_+) \quad (\exists \eta > 0)$$

$$(\forall x_0 \in B_\eta) \quad (\forall t \geq t_0) \quad | x(t,t_0,x_0) | \leq \alpha.$$

Из условия теоремы следует, что для некоторых $t_0 \in R_+$ и $x_0 \in B_\eta : V(t_0,x_0) > 0$.

Так как функция $V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел, то найдется $\delta > 0$ такое, что

$$| V(t,x) | < V(t_0,x_0) \quad \text{при} \quad | x | < \delta, \ t \in R_+. \tag{12}$$

В силу неравенств (10), (11) функция $V(t,x)$ является неубывающей, тогда

$$V(t, x(t,t_0,x_0)) \geq V(t_0,x_0), \quad t \in R_+.$$

Из неравенства (12) следует, что $| x(t,t_0,x_0) | \geq \delta$ при $t > t_0$. Тогда

$$\delta \leq | x(t,t_0,x_0) | \leq \alpha. \tag{13}$$

Покажем, что найдется момент времени $t_1 > t_0$, в который $| x(t_1,t_0,x_0) | > \alpha$, то есть решение покинет область (13).

В силу неравенств (10), (11) функция $V(t, x(t,t_0,x_0))$ является монотонно неубывающей функцией и ограниченной в области (13), так как она допускает бесконечно малый высший предел. Поэтому существует предел

$$\lim_{t\to\infty} V(t, x(t,t_0,x_0)) = V_0. \tag{14}$$

Рассмотрим последовательность точек $x_0^k = x(t_0 + kT, t_0, x_0), \quad (k \in N)$. Из ограниченности области (13) следует, что последовательность $\{x_0^k\}$ имеет предельную точку

x_0^*, и существует подпоследовательность, которая сходится к точке x_0^*. Будем считать, что сама последовательность $\{x_0^k\}$ сходится к этой точке, то есть $x_0^k \to x_0^*$ при $k \to \infty$. Так как $V(t,x)$ непрерывна и периодична по t, то $V_0 = V(t_0, x_0^*)$.

Рассмотрим траекторию $x(t, t_0, x_0^*)$ при $t \geq t_0$. В силу условий теоремы существуют точки $(t, x(t, t_0, x_0^*))$, в которых либо $V_{(1)}(t,x) > 0$, либо $\Delta V > 0$. Тогда можно указать момент времени $t^* > t_0$, в который выполняется условие

$$V(t^*, x(t^*, t_0, x_0^*)) = V_1 > V_0.$$

Из условия (H5) периодичности системы (1) следует, что

$$x(t^*, t_0, x_0^k) = x(t^* + kT, t_0 + kT, x_0^k) =$$

$$= x(t^* + kT, t_0 + kT, x(t_0 + kT, t_0, x_0)) = x(t^* + kT, t_0, x_0).$$

Из периодичности функции $V(t,x)$ имеем

$$V(t^*, x) = V(t^* + kT, x).$$

Поэтому условие (14) можно записать таким образом

$$V_0 = \lim_{k\to\infty} V(t^* + kT, x(t^* + kT, t_0, x_0)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} V(t^*, x(t^*, t_0, x_0^k)) = V(t^*, x(t^*, t_0, x_0^*)) = V_1 > V_0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Пример 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = -y, & \dot{y} = x, & t \neq \frac{\pi}{2}i = t_i, \quad (i \in N). \\ \Delta x = -\frac{1}{2}x, & \Delta y = 0, & t = \frac{\pi}{2}i = t_i, \quad (i \in N). \end{array} \tag{15}$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений, которыми система описывается при $t \neq \frac{\pi}{2}i$, имеет вид

$$x = c_2 \cos t - c_1 \sin t, \qquad y = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \tag{16}$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные. При начальных условиях $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ решение (16) принимает вид

$$x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \qquad y = y_0 \cos t + x_0 \sin t,$$

откуда $x_-(\frac{\pi}{2}) = -y_0$, $y_-(\frac{\pi}{2}) = x_0$, $x_+(\frac{\pi}{2}) = -\frac{y_0}{2}$, $y_+(\frac{\pi}{2}) = x_0$. Здесь и в дальнейшем используются обозначения

$$x_-(t_i) = x(t_i - 0), \quad y_-(t_i) = y(t_i - 0), \quad x_+(t_i) = x(t_i + 0), \quad y_+(t_i) = y(t_i + 0).$$

Решая систему (15), находим последовательно.

$$x_-(\pi) = -x_0, \quad y_-(\pi) = -\frac{y_0}{2}, \quad x_+(\pi) = -\frac{x_0}{2}, \quad y_+(\pi) = -\frac{y_0}{2},$$

$$x_-(\frac{3}{2}\pi) = \frac{y_0}{2}, \quad y_-(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{x_0}{2}, \quad x_+(\frac{3}{2}\pi) = \frac{y_0}{4}, \quad y_+(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{x_0}{2},$$
$$x_-(2\pi) = \frac{x_0}{2}, \quad y_-(2\pi) = \frac{y_0}{4}, \quad x_+(2\pi) = \frac{x_0}{4}, \quad y_+(2\pi) = \frac{y_0}{4}.$$

Продолжая процесс решения, получаем

$$x_+(2\pi k) = \frac{x_0}{4^k}, \quad y_+(2\pi k) = \frac{y_0}{4^k}, \quad k \in N,$$

откуда следует, что решение системы (15) с произвольными начальными условиями стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Докажем теперь этот факт, используя теорему 1. В качестве функции Ляпунова берем функцию $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Вычислим $\dot{V}$ и ΔV_i.

$$\dot{V}(x,y) = \frac{1}{2}(2x\dot{x} + 2y\dot{y}) = 0,$$

$$\Delta V_i = V(x + \Delta x, y + \Delta y) - V(x,y) = -\frac{3}{8}x^2 \leq 0.$$

Теперь для выполнимости теоремы 1 нужно показать, что для любого ненулевого решения системы (15) существует последовательность $\{t_{i_s}\} \to \infty$ такая, что $x(t_{i_s}) \neq 0$. Для этого достаточно доказать, что $x^2(t_i) + x^2(t_{i+1}) \neq 0$. Действительно, если согласно (16) $x_+(t_i) = c_2\cos(t_i) - c_1\sin(t_i)$, то $x_-(t_{i+1}) = x_+(t_i + \frac{\pi}{2}) = -c_2\sin(t_i) - c_1\cos(t_i)$, откуда $x_+^2(t_i) + x_-^2(t_{i+1}) = c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

Следовательно, на основании теоремы 1 нулевое решение системы (15) асимптотически устойчиво.

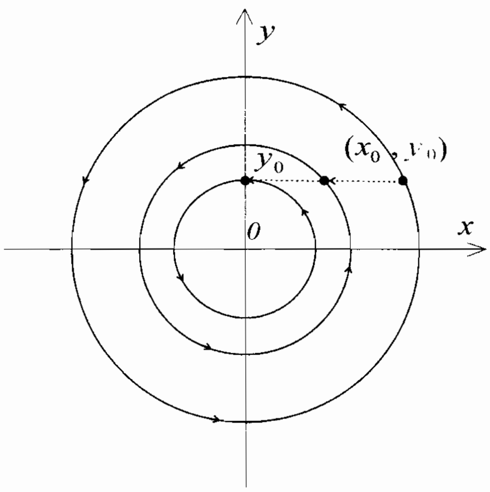
Пример 2. Рассмотрим систему.

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = -y, & \dot{y} = x, & t \neq t_k = 2\pi k, \quad (k \in N). \\ \Delta x = -\frac{1}{2}x, & \Delta y = 0, & t = t_k = 2\pi k, \quad (k \in N). \end{array} \tag{17}$$

Решая систему (17) при $t \in (2\pi k; 2\pi(k+1))$ с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, получаем

$$x = \frac{x_0}{2^k}\cos t - y_0 \sin t, \qquad y = y_0 \cos t + \frac{x_0}{2^k}\sin t,$$

то есть данное решение системы (17) стремится к предельному ненулевому движению $x = -y_0 \sin t$, $y = y_0 \cos t$, и не стремится к нулю при $t \to +\infty$.



Траектория решения системы (17) в фазовом пространстве

На фазовой плоскости (x,y) решению системы (17) соответствуют концентрические окружности с центром в начале координат и радиусами $R_k = \sqrt{y_0^2 + \frac{x_0^2}{2^{2k}}}$, $k = 0, 1, 2 \ldots$ На рисунке изображены такие окружности при $k = 0$, 1 и предельная окружность с центром в начале координат и радиусом $R = |\, y_0 \,|$, к которой стремится решение при $t \to +\infty$.

Выбрав функцию $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, убедимся в том, что для исследования устойчивости системы (17) теорема 1 неприменима. Действительно, существует ненулевое решение системы (17) $x = -y_0 \sin t, \quad y = x_0 \cos t$, вдоль которого $\dot{V} = 0, \quad \Delta V_i = 0$.

Пример 3. Исследуем устойчивость тривиального решения системы.

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x, & & t \neq \frac{\pi}{2}i = t_i, \quad (i \in N). \\ \Delta x = x, \quad \Delta y = 0, & & t = \frac{\pi}{2}i = t_i, \quad (i \in N). \end{array} \tag{18}$$

Функцию Ляпунова возьмем такой же, как и в предыдущих примерах. Найдем

$$\dot{V} = 0, \qquad \Delta V = \frac{1}{2}(2x^2 + x^2) = \frac{3}{2}x^2 \geq 0.$$

Для этой функции выполнены все условия теоремы 2. Следовательно, тривиальное решение неустойчиво.

Решая систему непосредственно, находим $x_+(2\pi k) = 4^k x_0, \quad y_+(2\pi k) = 4^k y_0, \quad k \in N$, откуда следует неустойчивость нулевого решения.

Автор благодарен А.О. Игнатьеву за постановку задачи и проявленное внимание к работе, а также В.Е. Пузыреву за сделанные ценные замечания при обсуждении данной статьи.

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - Киев: Вища школа, 1987. - 287 с.
2. *Bainov D.D., Simeonov P.S.* Systems with impuls effect. Stability, Theory and Applications. - Chichester: Ellis horwood limited, 1989. - 255 p.
3. *Гургула С.И.* Исследование устойчивости решений импульсных систем вторым методом Ляпунова // Укр. мат. журн. - 1982. - **34**, N 1. - С.100-103.
4. *Гургула С.И., Перестюк Н.А.* Второй метод Ляпунова в системах с импульсным воздействием // Док. АН УССР. Сер. А. - 1982. - N 10. - С.11-14.
5. *Гургула С.И., Перестюк Н.А.* Об устойчивости положения равновесия импульсных систем // Укр. мат. журн. - 1982. - **31**, N 2. - С.9-14.
6. *Гургула С.И., Перестюк Н.А.* Прямой метод Ляпунова для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. физика и нелин. механика - 1986. - Вып.5. - С.4-9.
7. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. - М.:Физматгиз, 1959. - 228 с.
8. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. - М.:Мир, 1980. - 300 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ignat@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 22.08.01