

УДК 531.38

©2001. И.А. Болграбская

## РАВНОМЕРНЫЕ ВРАЩЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ПОЛУЗАМКНУТОЙ ЦЕПЬЮ

Рассмотрена система одинаковых гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами. Первое тело системы имеет неподвижную точку, а одна из точек оси симметрии последнего тела движется вдоль неподвижной оси. Такие системы относятся к классу систем с полузамкнутой цепью [1]. Найдены условия существования у изучаемой системы равномерных вращений вокруг неподвижной оси, в предположении, что оси симметрии гироскопов могут быть как коллинеарны, так и не коллинеарны этой оси. Выделены классы движений, в которых тела расположены симметрично по отношению к центральному шарниру (четное число тел в системе), либо центральному телу (нечетное число тел в системе). Детально изучены случаи трех и четырех тел.

**Введение.** Использование систем связанных твердых тел (ССТТ) для изучения свойств упругих стержневых конструкций получило обоснование как в теоретических [2–4] так и в экспериментальных исследованиях [5–7]. Следует отметить, что вследствие относительной простоты уравнений движения ССТТ для них оказывается возможным поиск как стационарных, так и нестационарных решений. Такие решения были найдены для несвободных систем [4,8–10], а впоследствии и для систем с полузамкнутой цепью [1,11,12]. ССТТ с полузамкнутой цепью были введены в рассмотрение в работе [1] для моделирования упругих объектов с заданным движением двух его точек. В частности, рассматривались системы, в которых одна из точек первого тела неподвижна, а одна из точек последнего тела движется вдоль неподвижной прямой. Как установлено в работе [3], в линейном приближении такие системы аппроксимируют малые колебания упругих объектов с двумя опорами на концах. Наиболее распространенными и изученными движениями ССТТ являются стационарные движения, в которых каждое из тел вращается вокруг своей оси симметрии, совпадающей с вертикалью [4]. Однако, как известно, при определенных скоростях вращения ССТТ система наряду с равномерными вращениями может совершать и прецессионные движения, частным случаем которых являются равномерные вращения тел вокруг неподвижных осей, не совпадающих с их осями симметрии. Изучение условий существования таких движений в нелинейных системах и исследование их устойчивости позволяет дать более общую картину движения упругих стержневых систем и учесть влияние нелинейных эффектов на движение моделируемых систем.

Регулярные прецессии в системах двух тел с полузамкнутой цепью изучены в работах [11,12]. Найдены условия существования прецессионных движений и исследована их устойчивость.

В работе [1] рассмотрено движение системы  $n$  одинаковых гироскопов Лагранжа с полузамкнутой цепью. Полагалось, что тела связаны упругими сферическими шарнирами и сила тяжести отсутствует. При сделанных предположениях записаны в общем виде условия существования у системы решения, в котором каждое из тел совершает регулярную прецессию вокруг неподвижной оси, найдена одна из таких прецессий, в которой углы между осями симметрий тел и неподвижной осью по модулю равны.

В настоящей работе изучены условия существования у системы, введенной в [1],

равномерных вращений относительно неподвижной оси при различных углах между осями симметрий тел и вертикалью, но, учитывая геометрическую и силовую симметрию, рассматривались конфигурации, в которых  $|\theta_k| = |\theta_{n-k+1}|$ . Оси симметрий тел могут быть как коллинеарны, так и не коллинеарны неподвижной оси. Детально исследованы случаи, когда система состоит из трех и четырех тел.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему  $n$  гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами, расположенными в точках  $O_k$  ( $k = \overline{2, n}$ ) пересечения осей симметрии тел  $S_k$  ( $k = \overline{2, n}$ ). Полагаем, что точка  $O_1$  оси симметрии тела  $S_1$  неподвижна, а точка  $O_{n+1}$  оси симметрии тела  $S_n$  движется вдоль неподвижной оси  $O_1Z$ . Такая система, согласно определению данному в [1], является системой с полужамкнутой цепью и может быть использована при моделировании движения упругих стержневых объектов с двумя опорами на концах.

Введем связанную с осью  $O_1Z$  неподвижную систему координат  $O_1XYZ$  (орты  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ) и связанную с телом  $S_k$  систему координат  $O_kX_kY_kZ_k$  (орты  $\mathbf{e}_x^k, \mathbf{e}_y^k, \mathbf{e}_z^k$ ), в которой ось  $O_kZ_k$  направим вдоль оси симметрии тела  $S_k$ . Полагаем, что жесткость  $\alpha^2$  в упругих шарнирах одинакова и возникающий в них упругий момент равен  $\mathbf{L}_k = -\alpha^2(\mathbf{e}_z^{k-1} \times \mathbf{e}_z^k)$ . Поскольку точка  $O_{n+1} \in O_1Z$ , то сила реакции связи  $\mathbf{R}_{n+1}$  перпендикулярна этой оси и  $\mathbf{R}_{n+1} = R_{n+1}^x \mathbf{e}_x + R_{n+1}^y \mathbf{e}_y$ .

Допустим, что рассматриваемая система состоит из одинаковых гироскопов Лагранжа и точка  $C_k$  – центр масс тела  $S_k$  равноудалена от точек  $O_k$  и  $O_{k+1}$ . Тогда считаем  $O_kO_{k+1} = 2O_kC_k = 2c$ . В этом случае уравнения движения ССТТ, полученные в [1], могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} (\widehat{A}\boldsymbol{\omega}_1)' + 2mce_z^1 \times \sum_{i=2}^n \dot{\mathbf{v}}_i^c + 2ce_z^1 \times (R_{n+1}^x \mathbf{e}_x + R_{n+1}^y \mathbf{e}_y) &= \alpha^2(\mathbf{e}_z^1 \times \mathbf{e}_z^2); \\ (\widehat{A}\boldsymbol{\omega}_k)' + mce_z^k \times \dot{\mathbf{v}}_k^0 + 2mce_z^k \times \sum_{i=k+1}^n \dot{\mathbf{v}}_i^c + 2ce_z^k \times (R_{n+1}^x \mathbf{e}_x + R_{n+1}^y \mathbf{e}_y) &= \\ &= \alpha^2(\mathbf{e}_z^k \times \mathbf{e}_z^{k-1} - \mathbf{e}_z^{k+1} \times \mathbf{e}_z^k), \\ &k = \overline{2, n-1}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$(\widehat{A}\boldsymbol{\omega}_n)' + mce_z^n \times \dot{\mathbf{v}}_n^0 + 2ce_z^n \times (R_{n+1}^x \mathbf{e}_x + R_{n+1}^y \mathbf{e}_y) = -\alpha^2(\mathbf{e}_z^{n-1} \times \mathbf{e}_z^n).$$

Здесь  $\widehat{A}$  – тензор инерции тела  $S_k$  в точке  $O_k$ ,  $\mathbf{v}_k^0$  и  $\mathbf{v}_k^c$  – соответственно скорости точек  $O_k$  и  $C_k$ .

Определим положение системы координат, связанной с телом  $S_k$ , по отношению к неподвижной системе координат углами Эйлера  $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$ . Для систем с полужамкнутой цепью эти углы должны удовлетворять уравнениям связи [1]

$$\sum_{k=1}^n \sin \theta_k \sin \psi_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \sin \theta_k \cos \psi_k = 0. \quad (2)$$

Поставим задачу определения условий, при которых у системы (1), (2) существует решение

$$\dot{\varphi}_k = 0, \quad \dot{\psi}_k = \Omega, \quad \dot{\theta}_k = 0, \quad (k = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Этому решению соответствует движение ССТТ, в котором каждое из тел равномерно вращается вокруг неподвижной оси  $O_1Z$ .

Как и в [1], считаем, что оси симметрии всех гироскопов лежат в одной плоскости, угол  $\theta$  изменяется от  $\pi$  до  $-\pi$  и  $\psi = \Omega t$ . Тогда из (2) следует

$$\sin \theta_n = - \sum_{k=1}^{n-1} \sin \theta_k. \quad (4)$$

Подставив (3) в систему (1), получаем следующие условия существования у изучаемой ССТТ заданного режима:

$$\begin{aligned} \Omega^2(a-1) \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_n) - 2\Omega^2 \cos \theta_1 \sum_{l=1}^n l \sin \theta_l + K^2 [\sin(\theta_2 - \\ - \theta_1) + \cos \theta_1 \sin(\theta_n - \theta_{n-1}) / \cos \theta_n] = 0, \\ \Omega^2(a-1) \cos \theta_k (\sin \theta_k - \sin \theta_n) - 2\Omega^2 \cos \theta_k [k \sum_{l=1}^k \sin \theta_l + \sum_{l=k+1}^n l \sin \theta_l] + \\ + K^2 [\cos \theta_k \sin(\theta_n - \theta_{n-1}) / \cos \theta_n + \sin(\theta_{k+1} - \theta_k) - \sin(\theta_k - \theta_{k-1})] = 0, \\ (k = \overline{2, n-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) введены обозначения:  $a = (A - C)/(2mc^2)$ ,  $K^2 = \alpha^2/(2mc^2)$ , где  $A$  и  $C$  соответственно экваториальный и осевой моменты инерции тела  $S_k$ .

Решение системы (4), (5) позволит определить скорость вращения  $\Omega^2$  каждого тела и углы  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ , определяющие соответствующую форму оси моделируемого упругого вала. Поскольку в общем случае найти в явном виде решение системы (4), (5) не представляется возможным, рассмотрим ее при конкретном числе тел в системе.

**2. Система трех гироскопов.** Пусть система состоит из трех тел. Тогда уравнения (4), (5) имеют вид

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 = 0. \quad (6)$$

$$\Omega_1^2 \cos \theta_1 (a+1) (\sin \theta_3 - \sin \theta_1) - K^2 \cos \theta_2 \sin(\theta_3 - \theta_1) = 0, \quad (7)$$

$$\Omega_1^2 \cos \theta_2 [a(\sin \theta_3 - \sin \theta_2) - \sin \theta_1] - K^2 [(\cos \theta_2 + \cos \theta_3) \sin(\theta_3 - \theta_2) - \cos \theta_3 \sin(\theta_2 - \theta_1)] = 0,$$

здесь  $\Omega_1^2 = \cos \theta_3 \Omega^2$ .

Система (7) представляет собой линейную однородную систему уравнений относительно переменных  $\Omega_1^2, K^2$  и имеет ненулевое решение при условии равенства нулю ее определителя. Тогда имеем

$$(a+1)f_1 + f_2 = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 = \cos \theta_1 (\sin \theta_3 - \sin \theta_1) [(\cos \theta_2 + \cos \theta_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) - \cos \theta_3 \sin(\theta_1 - \theta_2)] + \\ + \cos^2 \theta_2 \sin(\theta_3 - \theta_1) (\sin \theta_3 - \sin \theta_2), \end{aligned} \quad (9)$$

$$f_2 = 2 \sin \theta_2 \cos^2 \theta_2 \sin(\theta_3 - \theta_1). \quad (10)$$

Уравнение (8) будет удовлетворено при любых значениях параметра  $a$  при условии  $f_1 = 0, f_2 = 0$ . Из (9), (10) заключаем, что эти условия выполнены, если  $|\theta_1| = |\theta_3| = \theta$ .

Следует заметить, что именно эти условия подтверждают правомерность использования введенной ССТТ для моделирования движения однородных упругих стержней с двумя опорами на концах, поскольку для этих систем мы имеем геометрическую и силовую симметрию. Поэтому в дальнейшем будем полагать выполненным условие

$$|\theta_k| = |\theta_{n-k+1}|. \quad (11)$$

В случае трех тел полагаем в уравнении (11)  $n = 3$  и из (6), (7) получаем следующие решения

$$\theta_1 = -\theta_3 = \theta, \quad \theta_2 = 0, \quad \Omega_{3,1}^2 = \frac{K^2}{(a+1)\cos\theta}. \quad (12)$$

$$\theta_1 = \theta_3 = \theta, \quad \theta_2 = -2\arcsin\theta, \quad \theta \leq \frac{\pi}{6}, \quad \Omega_{3,2}^2 = \frac{K^2(\cos\theta_2 + 2\cos\theta)^2}{(3a+1)\cos\theta\cos\theta_2}. \quad (13)$$

В (12), (13) для скоростей вращения введено обозначение  $\Omega_{i,j}^2$ , где  $i$  обозначает количество тел в системе, а  $j$  – число перемен знака в последовательности  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ . На рис. 1 изображена соответствующая решениям (12), (13) конфигурация системы.



Рис. 1. Конфигурация ССТТ при  $n = 3$ .

Отметим, что в случае вытянутых тел оба решения существуют, так как при этом  $a > 0$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как установлено, ССТТ допускает равномерные вращения, в которых оси симметрии некоторых тел коллинеарны неподвижной оси. В этом случае, при изучении прецессионных движений ( $\dot{\varphi} \neq 0$ ), как и в работе [13], следует определять положение таких тел в инерциальном пространстве с помощью углов Крылова, а остальных – углами Эйлера.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку в (13)  $|\theta_2| > \theta$ , получаем, что  $\Omega_{3,2}^2 > \Omega_{3,1}^2$ , то есть конфигурации с большим числом перемен знака углов  $\theta_k$  (большое число полувольт в стержневом случае) достигается при большей скорости вращения моделируемого объекта.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть система состоит из  $n$  тел, причем  $n = 3N$ . Тогда система уравнений (3), (4) имеет решения

$$\theta_{3k-2} = -\theta_{3k} = (-1)^{k+1}\theta, \quad \theta_{3k-1} = 0, \quad \Omega_{3N,N}^2 = \Omega_{3,1}^2; \quad (14)$$

$$\theta_{3k-2} = \theta_{3k} = \theta, \quad \theta_{3k-1} = -2\arcsin\theta, \quad \Omega_{3N,2N}^2 = \Omega_{3,2}^2, \quad (15)$$

где  $k = \overline{1, N}$ .

Действительно, из (14) следует

$$\sin\theta_{3k-2} = -\sin\theta_{3k} = (-1)^{k+1}\sin\theta, \quad \sin\theta_{3k-1} = 0,$$

$$\cos \theta_{3k-2} = \cos \theta_{3k} = \cos \theta, \quad \cos \theta_{3k-1} = 1. \quad (16)$$

Тогда имеем

$$\sum_{k=1}^{3p} \sin \theta_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{3p-1} \sin \theta_k = \sum_{k=1}^{3p-2} \sin \theta_k = (-1)^{p+1} \sin \theta, \quad p = \overline{1, N};$$

$$\sigma_l = (3l - 2) \sin \theta_{3l-2} + (3l - 1) \sin \theta_{3l-1} + 3l \sin \theta_l = 2(-1)^p \sin \theta, \quad (17)$$

$$\sum_{l=i}^{i+1} \sigma_l = 0, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Подставляя (16), (17) в (4), (5) убеждаемся, что (14) является решением этой системы. Аналогичным образом устанавливается и наличие у ССТТ равномерных вращений (3) при условии, что скорость вращения и конфигурация системы выбираются согласно (15).

Итак, изучение движения системы трёх тел позволило найти два условия при которых существуют равномерные вращения системы  $n$  связанных твердых тел. Перейдем теперь к изучению движения системы четырех тел.

**3. Система четырех тел.** Положим в уравнении (4)  $n = 4$ . Тогда

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4 = 0. \quad (18)$$

Не ограничивая общности задачи, всегда можно считать  $\theta_1 > 0$ , при этом уравнение (18) позволяет следующие возможные соотношения, определяющие конфигурацию системы

$$\theta_1 = \theta_4 = -\theta_2 = -\theta_3 = \theta, \quad (19)$$

$$\theta_1 = -\theta_4, \quad \theta_2 = -\theta_3, \quad (20)$$

которые изображены соответственно на рис. 2.

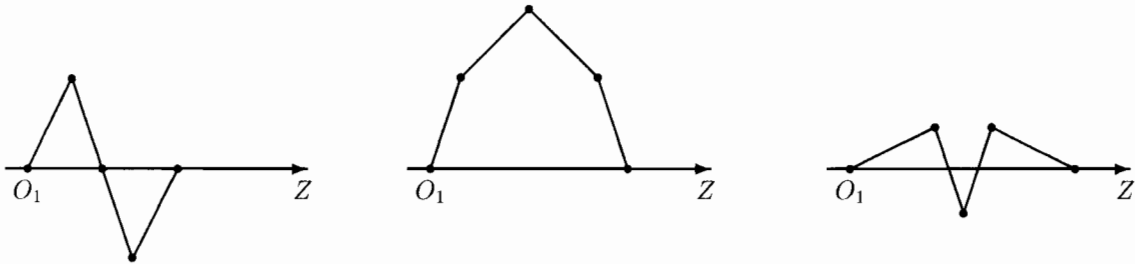


Рис. 2. Конфигурация ССТТ при  $n = 4$ .

Решение (20) допускает наличие как положительных, так и отрицательных углов  $\theta_2$ . Подставляя (19) в (5), находим, что это решение существует при условии, что скорость вращения равна

$$\Omega_{42}^2 = \frac{2K^2}{a}. \quad (21)$$

Сравнивая полученное решение с найденным в [1], где следует положить скорость собственного вращения  $\omega = 0$ , убеждаемся, что они совпадают и что для любой системы,

состоящей из четного числа тел  $n = 2N$  существует равномерное вращение, в котором углы  $\theta_k$  ( $k = \overline{1, 2N}$ ) удовлетворяют соотношениям

$$\theta_2 = -\theta_1, \theta_{j+1} = -\theta_{j-1} \quad (j = \overline{1, 2N-2}), \quad \theta_{2N} = -\theta_{2N-1}$$

и при этом скорость вращения, как и в (21), равна  $\Omega_{2N,N} = 2K^2/a$ .

Подстановка (20) в (5) дает следующие условия существования этого решения:

$$\Omega^2 \cos \theta_1 [(a+2) \sin \theta_1 + \sin \theta_2] + K^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0, \quad (22)$$

$$\Omega^2 \cos \theta_2 (a \sin \theta_2 + \sin \theta_1) - K^2 [\sin 2\theta_2 + \sin(\theta_2 - \theta_1)] = 0.$$

Отметим, что  $|\theta_2| \neq \theta_1$ . Действительно, если  $\theta_2 > 0$ , то при  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  из (22) следует  $\theta = 0$ , а это известный случай равномерных вращений вокруг вертикали, совпадающей с осью симметрии, который здесь не рассматривается. Если же  $\theta_2 < 0$ , то  $\theta_2 = -\theta_1 = -\theta$  и при этом система (22) несовместна.

Из (22) следует, что решение (20) существует при скоростях вращения

$$\Omega_{4,1(3)}^2 = \frac{K^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_1 [(a+2) \sin \theta_1 + \sin \theta_2]}. \quad (23)$$

при этом углы  $\theta_1, \theta_2$ , определяющие конфигурацию системы, удовлетворяют уравнению

$$F_1 + aF_2 = 0, \quad (24)$$

где

$$2F_1 = \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 + \sin(\theta_2 - \theta_1)(\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2),$$

$$F_2 = \sin(\theta_2 - \theta_1)[\sin 2\theta_1 + \sin(\theta_2 + \theta_1)] + \cos \theta_1 (2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2) \sin 2\theta_2.$$

В (23) введено два значения индекса  $j$  у скорости  $\Omega^2$ . Случай  $j = 1$  имеем при условии  $\theta_2 > 0$ , а  $j = 3$  – при  $\theta < 0$ . Отметим, что в случае  $\theta_2 > 0$  и  $a > 0$  решение существует при условии  $\theta_2 < \theta_1$ , а при  $\theta_2 < 0$  при условии  $(a+2) \sin \theta_1 + \sin \theta_2 > 0$ .

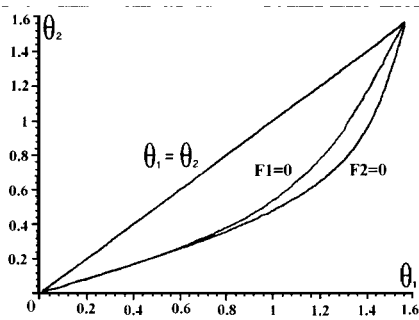


Рис. 3. Область существования решений (24).

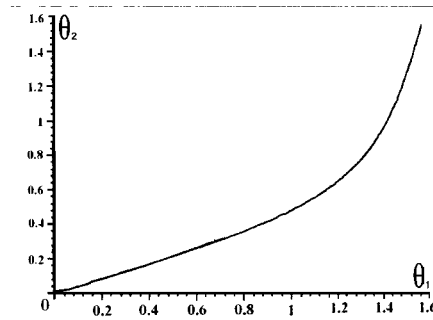


Рис. 4. Решение (24) при  $a = 0.5$ .

Если параметр  $a > 0$  (случай вытянутых тел), то уравнение (24) имеет действительные решения в области  $F_1 F_2 < 0$ . Так в случае  $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$  эта область изображена на рис. 3. Она расположена между кривыми  $F_1 = 0$  и  $F_2 = 0$ . Для конкретных значений параметра  $a$  графики зависимости  $\theta_2$  от  $\theta_1$  могут быть построены численно. На рис. 4. приведен график при  $a = 0.5$ .

Итак, найдены условия существования решений в случае четырех тел. При этом установлено, что решение (19) существует при любом положительном  $n = 2N$ . Определим условия существования у ССТТ, состоящей из четного числа тел, решения (20), в котором

$$\theta_k = -\theta_{2N-k+1}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (25)$$

**4. Система  $n$  тел.** Полагаем, что система состоит из  $n = 2N$  тел и выполнено соотношение (25). Тогда из (5) находим условия существования решения (3), (25). Имеем

$$\Omega_{2N,1(2N-1)}^2 = \frac{K^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_1 \left[ \sin \theta_1 (a + 2N - 2) + \sum_{l=2}^N (2N - 2l + 1) \sin \theta_l \right]}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_k \{ (a - 1)(\sin \theta_k + \sin \theta_1) + 2[(2N - k) \sin \theta_1 + \\ & + \sum_{l=k+1}^N (2N - 2l + 1)] \} \left[ \sin \theta_1 (a + 2N - 2) + \sum_{l=2}^N (2N - 2l + 1) \sin \theta_l \right] \times \end{aligned} \quad (27)$$

$$\times [\cos \theta_k \sin(\theta_2 - \theta_1) - \cos \theta_1 \sin(\theta_{k+1} - \theta_k) + \cos \theta_1 \sin(\theta_k - \theta_{k-1})] = 0, \quad k = \overline{2, N}.$$

Очевидно, что при увеличении числа тел в ССТТ, моделирующей упругий объект, начиная с некоторого числа  $N$  параметр  $a$  становится отрицательным. В этом случаи углы  $\theta_k$  выбираются из области

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) \left[ \sin \theta_1 (a + 2N - 2) + \sum_{l=2}^N (2N - 2l + 1) \sin \theta_l \right] > 0.$$

Численное решение системы (27) позволит определить  $\theta_i = \theta_i(\theta_1)$ ,  $i = \overline{2, N}$ . Подобным образом находятся и остальные решения системы (5) при условии  $\theta_{2N-k+1} = \delta_k \theta_k$ , где  $\delta_k$  равно 1 либо  $-1$  в зависимости от конфигурации системы.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Аналогично подходу, предложенному в [14], поставленная в данной работе задача может быть решена в предположении малых углов  $\theta_k$ . Тогда из результатов [15] следует, что равномерные вращения существуют при условии, что скорость вращения  $\Omega^2$  равна резонансной скорости вращения первого рода

$$\Omega_k^2 = \frac{32K^2 \sin^4 kc}{1 + 8a_1 \sin^2 kc}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (28)$$

где  $a_1 = (A-C)/(2mc^2) - 1$ . В случае  $A < C$ , начиная с некоторого номера  $k$ , знаменатель в (28) отрицателен и решение в случае линейного подхода не может быть определено.

**Выводы.** В настоящей статье поставлена задача нахождения условий существования равномерных вращений у ССТТ, состоящей из  $n$  одинаковых гироскопов Лагранжа. Выделен класс движений, в которых тела расположены симметрично относительно центрального тела или центрального шарнира соответственно, когда система состоит из четного или нечетного числа тел. Определены скорости вращения объекта и условия на его конфигурацию в зависимости от угла  $\theta_1$  – угла между осью симметрии первого тела и неподвижной осью. Выделены области существования решения как для вытянутых ( $a > 0$ ), так и для сплюснутых ( $a < 0$ ) тел. Знание условий существования этих режимов позволит в дальнейшем поставить задачу о исследовании их устойчивости.

1. Болграбская И.А., Савченко А.Я. Системы связанных твердых тел, образующих полузамкнутую цепь // Механика твердого тела. - 1994. - Вып. 26(1). - С. 33-39.
2. Болграбская И.А. Обоснование исследования динамических свойств упругого стержня на основе модели системы связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. - 1996. - 60, вып.2. - С. 346-350.
3. Болграбская И.А. Моделирование колебаний упругих вращающихся стержней полузамкнутой цепью твердых тел // Механика твердого тела. - Вып. 29. - 1997. - С. 16-21.
4. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыгин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. - К.: Наук. думка, 1991. - 166 с.
5. Cochran J.E., Christensen D.E. Post-launch effect of transverse bending of a spinning free-flight rocket during the guidance phase // AIAA/Atmos. Flight Mech. Conf.: Future Space Syst. - N.Y., 1979. - P. 324-325.
6. Cochran J.E., Christensen D.E. Free-Flight rocket attitude motion due to transverse vibration // J. Spacecraft and Rockets. - 1980. - 17, N 5. - P. 425-431.
7. Reis G.F., Sundberg W.D. Calculations of the aeroelastic bending of a sounding rocket based on flight data // AIAA Sound. - 1967. - New York, 1967. - P. 402-422.
8. Болграбская И.А., Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений систем связанных твердых тел // Механика твердого тела. - 1989. - Вып. 21. - С. 62-73.
9. Харламов П.В. Некоторые классы точных решений задачи о движении системы гироскопов Лагранжа // Мат. физика. - 1982. - Вып. 32. - С. 73-76.
10. Чебанов Д.А. Об одном обобщении задачи о подобных движениях системы гироскопов Лагранжа // Механика твердого тела. - 1995. - Вып. 27. - С. 57-63.
11. Болграбская И.А., Веласко Г.Э. Регулярная прецессия системы гироскопов Лагранжа, образующих полузамкнутую цепь // Тр. Ин-та прикл. математики и механики. Моделирование непрерывных и дискретных систем. - Донецк, 1998. - Т.2. - С. 3-9.
12. Савченко А.А. Регулярные прецессии двух твердых тел, образующих полузамкнутую цепь // Механика твердого тела. - 1997. - Вып. 29. - С. 21-26.
13. Чебанов Д.А. Об одном классе точных решений уравнений движения системы  $n$  гироскопов Лагранжа // Доп.НАНУ. - 1997. - N 8. - С. 82-85.
14. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е., Сторожженко В.А. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. - М.: Наука, 1991. - 330 с.
15. Болграбская И.А. Резонансные скорости в системах с полузамкнутой цепью // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. - Казань, 2001. - 7, вып. 1(13). - С. 18-23.