ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2001. Вып. 31

УДК 531.38

©2001. $\boxed{\text{П.В.Харламов}}$, Г.В.Мозалевская, М.Е.Лесина

О РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА[1]

Обсуждены некоторые свойства уравнений Кирхгофа (в дальнейшем пользуемся аббревиатурой УК), рассматриваемых как первично данный математический объект безотносительно к постановке тех или иных задач механики[2], для которых УК служат математической моделью. Это согласуется с установкой современной теории дифференциальных уравнений, выделившейся в отдельную математическую дисциплину из так называемой математической физики именно вследствие отвлечения ее от физических оснований[3]

Основное внимание уделено наличию четырех представлений УК и последствиям этого – появлению псевдоновых решений (а то и просто – псевдорешений[4]).

Введение. В течение длительного времени классические задачи динамики твердого тела последовательно обобщали (иногда с утратой конструктивности постановок), соответственно их усложняя. В результате был создан чисто математический объект – уравнения Кирхгофа. Это система шести нелинейных дифференциальных уравнений специальной алгебраической структуры, отображающей особенности рассматриваемого класса задач.

Частные случаи УК всегда привлекали внимание математиков, ставивших по отношению к ним свои задачи, представляющие лишь математический интерес. Созданы в математике и свои направления исследований УК: топологический анализ абстрактной модели объекта – шестимерного фазового пространства, доказательства различных теорем существования (несуществования) того или иного класса представлений интегрального многообразия и т.п.

Но для механика УК могут представлять интерес, если будут найдены решения этих уравнений, ибо, как заметил наш замечательный механик Николай Евграфович Кочин, "бессмысленно приводить уравнения, не давая им решения"[1, с.11]. Для механика и дифференциальные уравнения, и решения их – всего лишь инструменты при исследовании движений изучаемого объекта.

И то, что УК моделируют реальные явления, и то, что несмотря на их нелинейность и высокий порядок все же удавалось находить их отдельные точные решения, стимулировало интерес исследователей, сохранявшийся неизменно со времен Эйлера. Сложность задачи, немногочисленность таких результатов обусловили их оценку в этой области механики – каждое точное решение становилось событием, порождало свою,

[1]В основу положен текст лекции, прочитанной П.В.Харламовым на объединенном семинаре отделов прикладной механики и технической механики ИПММ НАНУ 27.06.2000, обработанный и дополненный М.Е. Лесиной и Г.В. Мозалевской. Привлечены некоторые результаты работ [2 - 4].

[2]Наиболее общая из них – задача о движении ограниченного многосвязной поверхностью тела в простирающейся беспредельно идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в безвихревом движении и покоящейся на бесконечности. Ее частные случаи – задача Н.Е. Жуковского о гиростате, задача Эйлера о движении тела, имеющего неподвижную точку, и др.

[3]Например, в теории уравнений в частных производных при исследовании краевой задачи для уравнения эллиптического типа обычно не оговаривают ее происхождения из гидродинамики, электростатики или из теории упругости.

[4]В буквальном переводе с греческого "псевдо-"соответствует русской приставке "лже-"[5, с.417].

подчас обширную литературу. Решение персонизировали – присваивали ему имя автора. И некоторые ученые именно таким результатом приобретали известность в науке (С.В. Ковалевская, Г.Г. Аппельрот, Д.Н. Горячев, Н. Ковалевский и др.), как бы приближаясь к ряду выдающихся механиков – Л. Эйлеру, Л. Пуансо, Н.Е. Жуковскому, С.А. Чаплыгину, активно занимавшихся поисками и исследованиями точных решений уравнений динамики твердого тела.

Однако подобные успехи постоянно сопровождались сообщениями об "открытии новых решений", которые оказывались псевдорешениями (некоторые из них обсуждены в главе 5 книги [6]). Отдельные из ошибочных результатов могли долгое время сохраняться в научной литературе. М.Клайн поясняет:

> "Промедление объясняется не только тем, что обнаружение ошибки в чужом доказательстве не приносит славы открывателю, но и другой причиной: математик, которому хватило ума усомниться в правильности ранее известного доказательства теоремы, обычно стремится самостоятельно доказать ее, связав тем самым старый факт со своим именем. Математики гораздо больше озабочены доказательством собственных теорем, нежели поиском ошибок в чужих доказательствах" [7, с.361]. Но именно
>
> "критическую установку можно отождествить с научной установкой, а догматическую – с псевдонаучной... Критическая позиция, традиция свободного обсуждения теорий с целью обнаружения их слабых мест для того, чтобы улучшить их, есть позиция разумности, рациональности" –

утверждает известный современный методолог науки К.Поппер [8, с.266, 267].[5]

А известный организатор науки академик М.А.Лаврентьев категорично утверждает необходимость научной критики:

> "Ученые нередко попадают в условия, когда их знаний проблемы, их авторитета оказывается недостаточно – нужны еще качества бойца и гражданина. Иногда приходится давать отрицательные заключения... И как бы ни было трудно ученому, его долг не только сказать правду, но и добиться осуществления своих рекомендаций. К сожалению, есть еще ученые, не склонные вступать в конфликты. Тем более есть и "волевые"администраторы, которые прикрываясь именами таких ученых и невнятными обтекаемыми заключениями проводят свою линию во имя сохранения чести мундира"[9, с.9].

К настоящему времени в исследованиях УК отчетливо проявились некоторые ложные направления, приводящие к псевдорешениям. Одна из причин их появления – наличие нескольких различных форм представления УК. Сопоставим эти формы.

1. Исходные представления УК. Вводим две тройки[6] переменных ω_i, v_i, и 27 параметров: компоненты α_i, β_i двух векторов и компоненты A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} трех тензоров. Первые два симметричны, от третьего этого не требуем. Квадратичной формой

$$T^0 = \frac{1}{2}(A_{ij}\omega_i\omega_j + B_{ij}v_iv_j) + C_{ij}\omega_iv_j \tag{1}$$

[5]Определяющей роли критики в развитии науки посвящен очерк 10 монографии [10, с.219-223].

[6]Обозначенный строчной буквой латинского алфавита индекс принимает значения 1, 2, 3, и по этим значениям выполняется суммирование, если индекс входит дважды в одночленное выражение. При этом очень удобна возможность замены обозначения индекса суммирования другой буквой, не использованной в этом одночленном выражении.

определена система уравнений[7]

$$\left(\frac{\partial T^0}{\partial \omega_1}\right)^{\bullet} = \omega_3\left(\frac{\partial T^0}{\partial \omega_2} + \alpha_2\right) - \omega_2\left(\frac{\partial T^0}{\partial \omega_3} + \alpha_3\right) + v_3\left(\frac{\partial T^0}{\partial v_2} + \beta_2\right) - v_2\left(\frac{\partial T^0}{\partial v_3} + \beta_3\right),$$

$$\left(\frac{\partial T^0}{\partial v_1}\right)^{\bullet} = \omega_3\left(\frac{\partial T^0}{\partial v_2} + \beta_2\right) - \omega_2\left(\frac{\partial T^0}{\partial v_3} + \beta_3\right) \quad (123). \tag{2}$$

Известны три интеграла уравнений (2)

$$T^0 = h, \quad \left(\frac{\partial T^0}{\partial \omega_i} + \alpha_i\right)\left(\frac{\partial T^0}{\partial v_i} + \beta_i\right) = m, \quad \left(\frac{\partial T^0}{\partial v_i} + \beta_i\right)\left(\frac{\partial T^0}{\partial v_i} + \beta_i\right) = R^2. \tag{3}$$

Запишем (2), (3) с использованием формы (1):

$$A_{1i}\omega_i^{\bullet} + C_{1i}v_i^{\bullet} = (A_{2i}\omega_3 - A_{3i}\omega_2)\omega_i + (C_{2i}\omega_3 - C_{3i}\omega_2)v_i + \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2 +$$

$$+(C_{i2}v_3 - C_{i3}v_2)\omega_i + (B_{2i}v_3 - B_{3i}v_2)v_i + \beta_2 v_3 - \beta_3 v_2, \tag{4}$$

$$C_{i1}\omega_i^{\bullet} + B_{1i}v_i^{\bullet} = (C_{i2}\omega_3 - C_{i3}\omega_2)\omega_i + (B_{2i}\omega_3 - B_{3i}\omega_2)v_i + \beta_2\omega_3 - \beta_3\omega_2, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}(A_{ij}\omega_i\omega_j + B_{ij}v_iv_j) + C_{ij}\omega_iv_j = h^0, \tag{6}$$

$$(A_{ij}\omega_j + C_{ij}v_j + \alpha_i)(C_{ki}\omega_k + B_{ik}v_k + \beta_i) = m, \tag{7}$$

$$(C_{ji}\omega_j + B_{ij}v_j + \beta_i)(C_{ki}\omega_k + B_{ik}v_k + \beta_i) = R^2. \tag{8}$$

В таком общем виде УК были использованы лишь при исследовании стационарных решений. Каждое такое решение представляют винтом, составленным векторами ω_i, v_i. Совокупность винтов образует конгруэнцию.

Систему (4), (5) активно изучали при отсутствии компонент тензоров с различными индексами. Запишем ее для этого частного случая, оставив у компонент с одинаковыми индексами лишь один:

$$A_1\omega_1^{\bullet} + C_1v_1^{\bullet} = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2 + (C_2 - C_3)(\omega_2v_3 + \omega_3v_2) +$$

$$+(B_2 - B_3)v_2v_3 + \beta_2v_3 - \beta_3v_2, \quad (123) \tag{9}$$

$$C_1\omega_1^{\bullet} + B_1v_1^{\bullet} = (C_2 - C_3)\omega_2\omega_3 + B_2v_2\omega_3 - B_3v_3\omega_2 + \beta_2\omega_3 - \beta_3\omega_2.$$

Интегралы (6)-(8) в этом случае таковы

$$\sum_{(123)}(A_1\omega_1^2 + B_1v_1^2 + 2C_1\omega_1v_1) = 2h, \tag{10}$$

$$\sum_{(123)}(A_1\omega_1 + C_1v_1 + \alpha_1)(C_1\omega_1 + B_1v_1 + \beta_1) = m, \tag{11}$$

$$\sum_{(123)}(C_1\omega_1 + B_1v_1 + \beta_1)^2 = R^2. \tag{12}$$

[7]Символ (123) означает, что невыписанные уравнения следуют из приведенных при циклической перестановке индексов.

Но даже эту систему в классических трактатах по механике (например, в [11]) рассматривали лишь в простейших случаях.

2. Основное представление УК. Обозначим

$$P_i^0 = \partial T^0 / \partial \omega_i = A_{ij}\omega_j + C_{ij}v_j, \tag{13}$$

$$R_i^0 = \partial T^0 / \partial v_i = C_{ji}\omega_j + B_{ij}v_j. \tag{14}$$

Полагаем форму (1) положительно определенной. Из (13), (14) получаем

$$\omega_i = a_{ij}P_j^0 + c_{ij}R_j^0, \quad v_i = c_{ji}P_j^0 + b_{ij}R_j^0. \tag{15}$$

Вместо P_i^0, R_i^0 вводим переменные P_i, R_i заменой

$$P_i = P_i^0 + \gamma_i, \qquad R_i = R_i^0 + \beta_i, \tag{16}$$

определив появившиеся параметры γ_i так, чтобы

$$\omega_i = a_{ij}P_j + c_{ij}R_j, \tag{17}$$

что приводит к линейной системе алгебраических по отношению к γ_j уравнений $a_{ij}\gamma_j = -c_{ij}\beta_j$. Вследствие положительной определенности формы (1) тензор a_{ij} имеет обратный ему J_{ji}

$$a_{ik}J_{kj} = \delta_{ij} \tag{18}$$

(δ_{ij} – символ Кронекера), так что

$$\gamma_i = -c_{kj}J_{ik}\beta_j. \tag{19}$$

Из (15), (16) имеем $v_i = (P_j - \gamma_j)c_{ji} + (R_j - \beta_j)b_{ij}$, и обозначим, привлекая (19),

$$u_i = c_{ji}P_j + b_{ij}R_j, \tag{20}$$

$$\mu_i = c_{ji}\gamma_j + b_{ij}\beta_j = (b_{ij} - c_{ki}c_{qj}J_{kq})\beta_j.$$

При этом

$$v_i = u_i - \mu_i. \tag{21}$$

Введем вектор $\lambda_i = \alpha_i - \gamma_i$ и внесем (16), (21) с учетом (13)-(15), (17) в уравнения (2)

$$P_1^\bullet = (P_2 + \lambda_2)\omega_3 - (P_3 + \lambda_3)\omega_2 + (u_3 - \mu_3)R_2 - (u_2 - \mu_2)R_3, \tag{22}$$

$$R_1^\bullet = \omega_3 R_2 - \omega_2 R_3 \qquad (123). \tag{23}$$

Интегралы этих уравнений:

$$\frac{1}{2}(a_{ij}P_iP_j + b_{ij}R_iR_j) + c_{ij}P_iR_j - \mu_iR_i = h, \tag{24}$$

$$(P_1 + \lambda_1)R_1 + (P_2 + \lambda_2)R_2 + (P_3 + \lambda_3)R_3 = m, \tag{25}$$

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R^2. \tag{26}$$

Основное представление УК (22), (23) получено из исходного (4), (5) заменой кинематических характеристик ω_i, v_i динамическими P_i, R_i. Важнейшее преимущество основного представления заключается в том, что в нем УК разрешены относительно производных $P_i^\bullet, R_i^\bullet$, в то время как в исходном представлении (4), (5) каждое из УК содержит в общем случае все шесть производных $\omega_i^\bullet, v_i^\bullet$.

Могут быть сформированы и другие представления УК, при которых уравнения отнесены к тройкам ω_i, R_i или P_i, u_i, но они уже не будут обладать преимуществом основного представления.

3. Третье представление УК. С учетом введенного в (18) тензора J_{ij} находим из (17)

$$P_i = J_{ij}\omega_j - c_{jk}J_{ij}R_k, \tag{27}$$

и это значение вносим в (20)

$$u_i = N_{ij}R_j + c_{ki}J_{kj}\omega_j, \tag{28}$$

Тензор N_{ij} введен вместо тензора b_{ij}:

$$N_{ij} = b_{ij} - c_{ki}c_{lj}J_{kl}. \tag{29}$$

Дифференцируя (27) по t , используем уравнения (22), (23)

$$J_{1j}\omega_j^\bullet = c_{j1}J_{1j}(\omega_3R_2 - \omega_2R_3) + c_{j2}J_{1j}(\omega_1R_3 - \omega_3R_1) + c_{j3}J_{1j}(\omega_2R_1 - \omega_1R_2)+$$

$$+(J_{2j}\omega_j - c_{jk}J_{2j}R_k + \lambda_2)\omega_3 - (J_{3j}\omega_j - c_{jk}J_{3j}R_k + \lambda_3)\omega_2+$$

$$+(N_{3j}R_j + c_{k3}J_{kj}\omega_j - \mu_3)R_2 - (N_{2j}R_j + c_{k2}J_{kj}\omega_j - \mu_2)R_3, \quad (123)$$

или

$$J_{1j}\omega_j^\bullet = (J_{2j}\omega_j + \lambda_2)\omega_3 - (J_{3j}\omega_j + \lambda_3)\omega_2 + (N_{3j}R_j - \mu_3)R_2 - (N_{2j}R_j - \mu_2)R_3+$$

$$+\omega_2\big[(c_{j3}J_{1j} + c_{j1}J_{3j})R_1 + (c_{j2}J_{3j} + c_{j3}J_{2j})R_2 + (c_{j3}J_{3j} - c_{j1}J_{1j} - c_{j2}J_{2j})R_3\big]-$$

$$-\omega_3\big[(c_{j2}J_{1j} + c_{j1}J_{2j})R_1 + (c_{j2}J_{2j} - c_{j3}J_{3j} - c_{j1}J_{1j})R_2 + (c_{j3}J_{2j} + c_{j2}J_{3j})R_3\big] \quad (123). \tag{30}$$

Вводим тензор

$$E_{ij} = c_{ki}J_{kj} + c_{kj}J_{ki} - c_{kl}J_{kl}\delta_{ij}, \tag{31}$$

представляя (30) в виде

$$J_{1j}\omega_j^\bullet = (J_{2j}\omega_j - E_{2j}R_j + \lambda_2)\omega_3 - (J_{3j}\omega_j - E_{3j}R_j + \lambda_3)\omega_2+$$

$$+(N_{3j}R_j - \mu_3)R_2 - (N_{2j}R_j - \mu_2)R_3 \quad (123). \tag{32}$$

Вместе с (23) уравнения (32) образуют замкнутую систему, устанавливающую зависимости $\omega_i(t), R_i(t)$. Ее интегралы следуют из (24)-(26) при замене (27). Подстановка (27) в (25) $(J_{ij}\omega_j - c_{jk}J_{ij}R_k + \lambda_i)R_i = m$ с привлечением (31), (26) преобразует этот интеграл к виду

$$(J_{ij}\omega_j - \frac{1}{2}E_{ij}R_j + \lambda_i)R_i = m + \frac{1}{2}c_{kl}J_{kl}R^2. \tag{33}$$

Записав интеграл (24) с учетом (17), (20)

$$\omega_i P_i + u_i R_i = 2(h + \mu_i R_i), \tag{34}$$

подставим в него P_i, u_i из (27), (28)

$$J_{ij}\omega_i\omega_j + N_{ij}R_iR_j = 2(h + \mu_i R_i). \tag{35}$$

С.А.Чаплыгин отметил [12, с.144], что на отсутствие произведений $\omega_i R_j$ в (35) указал Г. Минковский.

В этом представлении УК достоинства основного представления частично утрачены. Уравнения (32) не разрешены относительно $\omega_i^\bullet$, хотя по сравнению с исходным представлением (4), (5), содержащим все шесть производных $\omega_i^\bullet$, $v_i^\bullet$, в (32) их три.

Иногда в (32) вместо ω_i предлагают использовать переменные

$$G_i = J_{ij}\omega_j, \tag{36}$$

так что, вследствие (18),

$$\omega_i = a_{ij}G_j. \tag{37}$$

При заменах (36), (37) уравнения (32), (23) и интегралы (33), (35) записываются так:

$$G_1^\bullet = (G_2 + \lambda_2)a_{3j}G_j - (G_3 + \lambda_3)a_{2j}G_j + (a_{2i}E_{3j} - a_{3i}E_{2j})G_iR_j +$$

$$+ (N_{3i}R_i - \mu_3)R_2 - (N_{2i}R_i - \mu_2)R_3 \quad (123), \tag{38}$$

$$R_1^\bullet = (a_{3i}R_2 - a_{2i}R_3)G_i, \tag{39}$$

$$a_{ij}G_iG_j + N_{ij}R_iR_j = 2(h + \mu_i R_i), \quad (G_i - \frac{1}{2}E_{ij}R_j + \lambda_i)R_i = m_*, \quad R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R^2.$$

По существу, это частичный переход к основному представлению.

4. Четвертое представление УК. В исходном представлении (4), (5) переменные ω_i объективны – это кинематические характеристики тела, а v_i содержат элемент субъективного выбора точки в теле. В основном представлении объективны R_i, а P_i зависят от выбора точки тела. В третьем представлении ни ω_i , ни R_i от выбора точки не зависят. В этом смысле совокупность переменных u_i, P_i неудачна, так как и u_i и P_i зависят от субъективного выбора точки в теле. Хотя представления УК посредством этих переменных, по-видимому, не использовали для нахождения нетривиальных решений,[8] и к тому же это представление плохо обозримо, все же для полноты исследования отметим и его.

В задаче Кирхгофа матрица (b_{ij}) симметрична и сопоставляемая ей квадратичная форма $b_{ij}R_iR_j$ положительно определенна. Но в смежных задачах, приводящих к УК, она может такой и не быть. Однако УК содержат лишь разности диагональных элементов этой матрицы, поэтому добавление к ним произвольной величины не отражается на УК, и ее всегда можно назначить такой, чтобы $\det(b_{ij}) \neq 0$. Поэтому можем считать, что у тензора b_{ij} существует обратный ему тензор $\Gamma_{ij} : b_{ik}\Gamma_{kj} = \delta_{ij}$, причем Γ_{ij} симметричен вместе с $b_{ij} : \Gamma_{ji} = \Gamma_{ij}$. Из (20) и (17) имеем

$$R_k = \Gamma_{qk}(u_q - c_{jq}P_j). \tag{40}$$

[8]В [3] рассмотрены простейшие решения при $P_i \equiv 0$ при постоянных u_i.

$$\omega_i = n_{ij}P_j + c_{ik}\Gamma_{jk}u_j, \qquad (41)$$
$$n_{ij} = a_{ij} - c_{ik}c_{jq}\Gamma_{qk}.$$

Тензор n_{ij} симметричен, хотя c_{ij} может и не быть таким.

Подставим (41), (40) в (22), (23):

$$P_1^\bullet = [n_{3j}(P_2+\lambda_2) - n_{2j}(P_3+\lambda_3)]P_j + [c_{3k}(P_2+\lambda_2) - c_{2k}(P_3+\lambda_3)]\Gamma_{kj}u_j +$$
$$+[\Gamma_{2k}(u_3-\mu_3) - \Gamma_{3k}(u_2-\mu_2)](u_k - c_{jk}P_j), \qquad (42)$$
$$(u_i^\bullet - c_{ji}P_j^\bullet)\Gamma_{1i} = \big[(n_{3j}\Gamma_{2i} - n_{2j}\Gamma_{3i})P_j + (c_{3k}\Gamma_{2i} - c_{2k}\Gamma_{3i})\Gamma_{kj}u_j\big](u_i - c_{si}P_s).$$

В интегралы (25), (26) вносим значения (40):

$$(P_i+\lambda_i)(u_q - c_{jq}P_j)\Gamma_{qi} = m, \qquad (u_p - c_{ip}P_i)(u_q - c_{jq}P_j)\Gamma_{ps}\Gamma_{qs} = R^2.$$

Интеграл (24) используем в его записи (34), подставив значения (40), (41),

$$(n_{ij}P_j + c_{ik}\Gamma_{jk}u_j)P_i + (u_j - 2\mu_j)(u_k - c_{ik}P_i)\Gamma_{kj} = 2h.$$

Но слагаемые $c_{ik}\Gamma_{kj}u_jP_i$ приводятся, и интеграл записывается проще

$$n_{ij}P_iP_j + \Gamma_{ij}u_iu_j - 2\mu_j(u_k - c_{ik}P_i)\Gamma_{kj} = 2h.$$

Отсутствие здесь произведений u_iP_j аналогично обнаруженному Г. Минковским отсутствию ω_iR_j в представлении (35) этого интеграла.

5. Об отличиях представлений УК. Поскольку все представления УК описывают один и тот же математический объект, возникает естественный вопрос: почему существует несколько внешне различающихся представлений этого объекта. Не следовало бы сохранить лишь одно, устранив тем самым возможность появления псевдоновых решений?

Сосуществование различных представлений – это следствие истории формирования УК. Эти уравнения создавались как математическая модель реального явления в процессе длительного поиска наиболее приемлемого ее представления. Переменные ω_i, u_i прямо и непосредственно характеризуют кинематическое состояние объекта исследования. И именно их стремились сохранить основными переменными задачи, что в наиболее общей постановке и привело к представлению УК в виде (4)-(8). Но эта система уравнений не разрешена относительно производных $\omega_i^\bullet$, $u_i^\bullet$, что существенно осложняет ее исследование. И, быть может, именно поэтому в зарубежной литературе, где уравнения (4)-(8) фактически оставались единственным объектом исследования, так и не был достигнут сколько-нибудь значительный успех в построении решений. Впрочем, этот недостаток исходного представления УК не помешал нашим выдающимся ученым Н.Е.Жуковскому, А.М.Ляпунову, В.А.Стеклову и при таком представлении УК получить крупнейшие результаты для системы (9)-(12).

Но наивысшие достижения в исследовании УК принадлежат С.А.Чаплыгину. Он избрал принципиально новый подход к задаче – в полной мере использовал преимущества основного представления УК в переменных P_i, R_j. С глубоким проникновением в механизм явления он разработал новые методы исследования и не только открыл новые обширные классы точных решений, значительно превосходившие по общности результаты предшественников, но и во многих случаях использовал свои решения при исследовании *движения* тела, его результаты относятся не только к математике, но и механике.

Последователям С.А.Чаплыгина оставалось распространить его результаты, относившиеся к случаю односвязной поверхности тела, на случай поверхности многосвязной.

Частные случаи уравнений (38), (39) появились во второй половине XX в. как бы вне связи с УК. Авторы искусственно, без каких-либо обоснований, толковали их как некие "обобщения"уравнений классических задач о движении тела, имеющего неподвижную точку. Но в последних тензор E_{kl} и билинейная форма $E_{kl}\omega_k R_l$ отсутствовали. Введение их в упомянутые классические задачи сопровождалось несостоятельными "обоснованиями". Критический анализ подобных "постановок"будет дан ниже.

6. О параметрах УК. Характерная особенность УК – наличие в них большого количества параметров. В основном представлении (22), (17), (20), (23)-(26) – это компоненты a_{ij}, b_{ij} симметричных тензоров, компоненты c_{ij} тензора общего вида, компоненты векторов λ_i, μ_i и константы интегрирования h, m, R^2. Важно заметить, что у каждого *данного* объекта при фиксированной в нем системе координат (выбранном определенном начале координат в физической точке тела и неизменно связанными с ним направлениями осей координат) числовые значения параметров $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \lambda_i, \mu_i$ полностью определены – это объективно существующие физические величины, и в каждой системе координат их всегда можно полагать *заданными*.

Но при замене системы координат – переносе ее начала в другую физическую точку и изменении направления осей, связываемых неизменно с телом – эти физические величины принимают свои значения, присущие уже новой системе координат.

При ортогональных преобразованиях системы координат компоненты тензоров и векторов преобразуются известным образом. Числовые значения этих объективных в УК физических величин оказываются зависящими от субъективного выбора начала координат и направления осей координат. Например, начало координат может быть выбрано в так называемой *центральной* точке, что превращает тензор c_{ij} в симметричный, уменьшая тем самым количество параметров на три. Выбором направления осей координат одна из трех сопоставляемых симметричным тензорам квадратичных форм $a_{ij}x_ix_j$, $b_{ij}x_ix_j$, $c_{ij}x_ix_j$ может быть приведена к главным осям, что уменьшает количество параметров еще на три.

Разумеется, у каждого конкретного исследуемого объекта эти параметры имеют свои вполне определенные числовые значения. И когда УК рассматривают, не конкретизируя эти значения, то подразумевают, что речь идет не об одном лишь объекте, а о некотором множестве их (иногда называемом *ансамблем* таких объектов).

После того, как получено математическое *решение* УК, его используют для исследования *движения* объекта, моделируемого этими уравнениями. Обычно на этом этапе вводят безразмерные величины, составляя из некоторых параметров характерные величины. В результате количество параметров в УК уменьшается еще на три. Однако на этапе построения решения зачастую удобно оставлять параметры размерными. Это, в частности, доставляет дополнительную возможность контроля правильности выкладок сравнением размерности получаемых соотношений.

Приступая к решению конкретной задачи, всегда следует отделять то объективное, что характеризует исследуемый объект, от вносимых в математическую модель субъективных факторов, которые, разумеется, не могут и не должны проявляться в исследуемом явлении. Это обстоятельство не всегда четко осознается. Автор, введя в математическую модель избыточные параметры, сохраняет их в полученном на основе такой модели результате, и иногда полагает, что их наличие присуще исследуемому объективно протекающему явлению, модель которого в таком представлении как бы обогащена дополнительными факторами. Тем самым полученному результату приписывается бо̀льшая общность, утверждается значимость подобного "обобщения". В действительности это утверждение оказывается ложным.

Приведем очень характерный исторический пример.

Разработав теорию моментов инерции тела и установив существование в теле главных центральных осей инерции, Л.Эйлер, как механик, четко осознает их значение. И в 1758 г. свое знаменитое решение задачи о движении по инерции свободного твердого тела он, естественно, строит, используя именно эти оси в качестве неизменно связанных с телом. Конкретизирует он и неподвижную систему координат с учетом имеющегося в этом случае неизменного в пространстве направления момента количества движения тела относительно его центра масс.

В 1773 г. к этой задаче обращается и Лагранж, но уже как математик со стремлением к наибольшей общности постановки задач. Он оставляет произвольными обе системы координат и во всем процессе построения решения сохраняет избыточные параметры. Он видит в этом обобщение результатов Эйлера, заявляя: "если это решение несколько пространно, то это обстоятельство следует приписать лишь большой общности, которую я хотел сохранить" [13, с.280]. Имеющие четкий механический смысл и строго обоснованные предпосылки Эйлера он рассматривает как некие "допущения", которых следует избегать: "Первое из этих допущений[9] всегда считали необходимым для получения полного решения проблемы, до тех пор, пока в своем мемуаре в 1773 г. я не дал способа, с помощью которого можно избежать этого допущения" [13, с.281]. И второе положение[10] Лагранж именует допущением.

Стремление в математике к подобным "обобщениям"проявляется и в наше время. Приведем характерный пример.

В 1985 г. появилась публикация [14], в которой приведены уравнения

$$\mathbf{G}^{\bullet} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{G} + \mathbf{k} - H\boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\mathbf{J}}) = \boldsymbol{\gamma} \times [\mathbf{s} + \boldsymbol{\gamma} \cdot (\lambda \mathbf{I} + \mu \mathbf{J})], \qquad \boldsymbol{\gamma}^{\bullet} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0. \tag{43}$$

Примечательна "постановка"задачи, которую, пожалуй, стоит здесь привести.

"Пусть на основном теле гиростата, движущемся вокруг некоторой его неподвижной точки O, имеет место *неизменное* распределение электрических зарядов. Пусть система движется в центральном поле *ньютоновской* и кулоновской сил с общим центром в точке O', который имеет магнитный момент вдоль $O'O$. Предположим, что $O'O$ достаточно велико по сравнению с размерами гиростата. Введем следующие обозначения: $\mathbf{I}$ – матрица инерции гиростата для точки O ; в системе главных осей $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(A, B, C)$, $\overline{\mathbf{I}} = \frac{1}{2}(Tr\mathbf{I})\mathbf{E} - \mathbf{I}$; $\mathbf{E}$ – единичная матрица; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела-носителя в *неподвижном* пространстве; $\mathbf{G} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$; $\mathbf{k}$ – гиростатический момент симметричных роторов, постоянный в теле; $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор оси $O'O$; $H, E_0, \boldsymbol{g}$ – напряженности магнитного и электрического полей и ускорение силы тяжести центра в точке O; $\mathbf{r}_0$ –

[9] Совмещение подвижных осей с главными осями инерции.

[10] Выбор осей координат в пространстве.

радиус-вектор центра масс гиростата относительно точки O; $\mathbf{J}, \overline{\mathbf{J}}$ – матрицы, составленные для распределения зарядов по тому же правилу, что и матрицы $\mathbf{I}$ и $\overline{\mathbf{I}}$ для распределения масс.[11] В главной системе осей инерции $\mathbf{J}, \overline{\mathbf{J}}$ не обязательно диагональные. Возьмем в качестве потенциала функцию $V = \mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2}\mu\gamma\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\gamma}$, где[12] $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu}$ – постоянные, $\mathbf{s} = Mg\mathbf{r}_0 + E_0\sum e\mathbf{r}$, а сумма распространяется на электрические заряды. На систему действует также сила Лоренца, момент которой в принятом приближении равен $H\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\gamma}\cdot\overline{\mathbf{J}})$ ". В связи с этой "постановкой"[13] уместно привести высказывание замечательного механика В.В.Новожилова:

> "Все чаще стали появляться всевозможные "мыслимые"модели сплошной среды, возникающие вне связи с непосредственными потребностями практики; последнее подчеркивается тем, что обычно никто не интересуется определением входящих в эти теории физических констант; для соответствующих уравнений тем не менее решаются краевые задачи, доказываются теоремы существования и единственности, словом, развивается бурная математическая деятельность"[15, с.362].

В соответствии с этим замечанием присмотримся к введенным в систему (43) физическим параметрам λ, μ . Первый из них характеризует поле тяготения, которое принимается "центральным ньютоновским", а стало быть, предполагается, что приложенная к центру масс тела сила не параллельна $O'O$, а направлена к центру O' Земли. Ее ортогональная к оси $O'O$ составляющая равная $mg\mathrm{tg}\varepsilon$, где $\mathrm{tg}\varepsilon = l_2/l_3$ – отношение характерного размера гиростата l_2 к радиусу Земли $l_3 \approx 6400$ км. Если, к примеру, положить $l_2 = 0,64$ м, то $\mathrm{tg}\varepsilon = 10^{-7}$. Величины такого порядка в макроскопической механике сохранять бессмысленно (напомним, что эта механика не рассматривает, например, движение броуновских частиц, размер которых по сравнению с принимаемой единицей длины – сантиметром имеет порядок 10^{-5}).

Не имеет физического смысла и предположение, что распределение электрических зарядов *неизменно* в теле, движущемся в магнитном поле. Если тело – проводник, то неизбежно появление циркулирующих токов, а в диэлектрике – токов смещения. Эти токи неизбежно влияют на магнитное поле, которое не будет сохранять неизменной напряженность $\mathbf{H}$. Насколько сложна эта задача можно судить по монографии Ю.Г.Мартыненко [16], где решаются эти задачи в достаточно строгой для прикладных исследований постановке. Чтобы составить представление о сложности ее, приведем некоторые сведения из [16].

Уравнения движения проводящего твердого тела, помещенного в магнитное поле с напряженностью $\mathbf{H}(t)$, неотделимы от уравнений электродинамики. Последние записываются в осях, неизменно связанных с телом,

$$4\pi\,\frac{\lambda\mu}{c^2}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \Delta\ \mathbf{H}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{H} = 0 \tag{44}$$

(λ – проводимость материала тела, μ – его магнитная проницаемость). Полагая, что вне тела создан идеальный вакуум, имеем $\nabla\times\mathbf{H} = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{H} = 0$, это означает, что в области

$$\mathbf{H} = \nabla U, \tag{45}$$

так что

$$\Delta U = 0 \tag{46}$$

[11] А значит симметричные.

[12] Явная опечатка – должна быть λ вместо γ .

[13] Автор цитируемой работы связывает такую постановку с именами Д. Гриоли и В.В. Лунева.

- магнитное поле вне тела потенциально, и потенциал U – гармоническая функция. На поверхности тела касательная и нормальная составляющие $\mathbf{H}$ подчинены условиям

$$\mathbf{H}_\tau = [\mathbf{n} \times (\nabla U \times \mathbf{n})]_S, \qquad \mathbf{H}_n = (\mathbf{n} \cdot \nabla U)_S.$$

Уравнения движения тела:

$$m(\boldsymbol{v}^\bullet + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \big[(\nabla U \cdot \mathbf{n})\nabla U - \frac{1}{2}(\nabla U)^2 \mathbf{n}\big] dS, \tag{47}$$

$$\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}^\bullet + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \mathbf{r} \times \big[(\nabla U \cdot \mathbf{n})\nabla U - \frac{1}{2}(\nabla U)^2 \mathbf{n}\big] dS, \tag{48}$$

(m – масса тела, $\boldsymbol{v}$ – скорость центра масс).

В отличие от УК уравнения (44)-(48) в общем случае не были разделены. Это сделано лишь в двух предельных случаях: $R_m \gg 1$ и $R_m \ll 1$, где $R_m = 4\pi\lambda\mu L^2/c^2$ – магнитное число Рейнольдса. В первом случае $\varepsilon = 1/\sqrt{R_m}$, асимптотическим приближением к (48) служит уравнение

$$\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}^\bullet + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \Big(P^{(0)}\mathbf{H}^\infty(t) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} P^{(1)} \int\limits_0^t \frac{\mathbf{H}^\infty(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\Big) \times \mathbf{H}^\infty,$$

а во втором $\varepsilon = \sqrt{R_m}$ – (49)

$$\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}^\bullet + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \Big(\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \varepsilon^n P^{(n)} d^n \mathbf{H}^\infty(t)/dt^n\Big) \times \mathbf{H}^\infty.$$

Постоянные тензоры $P^{(n)}$ зависят только от формы тела.

Такая асимптотика приемлема лишь на малых промежутках времени. Поэтому нет смысла ставить для таких моделей вопросы, относящиеся к неограниченным промежуткам времени (например, обсуждать ляпуновскую устойчивость).

На фоне математических моделей (49) отчетливо проявляется несостоятельность модели (43). В частности, в ней отсутствуют какие-либо обоснования предлагаемых взаимодействий тела с магнитным полем. Апелляция Х.М.Яхьи к четырехстраничной заметке Д.Гриоли [17] не может служить таким обоснованием.

Вряд ли стоило обсуждать работы Д.Гриоли и Х.М.Яхьи, если бы они не вызвали появление подобных им публикаций, основывающихся на их "постановках"без попыток критического анализа. Отсутствие его и оценок приемлемости модели исключает возможность относить эти публикации к естественнонаучным исследованиям.

Но и как объект математических исследований "уравнения Гриоли"также не представляют интереса - это весьма частный случай УК. Это утверждение неоднократно было высказано, но оно не было воспринято, не остановило появление работ, относящихся к "уравнениям Гриоли". Поэтому приходится войти в детали, указать те ограничения на параметры УК, при которых они сводятся к уравнениям (43).

Запишем последние в компонентах

$$Ap^\bullet = (Bq + \lambda_2 - Hb\gamma_2)r - (Cr + \lambda_3 - Hc\gamma_3)q + (\varepsilon C\gamma_3 - \mu_3)\gamma_2 - (\varepsilon B\gamma_2 - \mu_2)\gamma_3. \tag{50}$$

$$\gamma_1^\bullet = r\gamma_2 - q\gamma_3, \tag{51}$$

$$(123;\ ABC;\ abc). \tag{52}$$

В основном сохранены обозначения Х.М.Яхьи, но его k_i, λ, s_i здесь заменены на $\lambda_i, \varepsilon, -\mu_i$. Символ (52) означает, что уравнения (50), (51) следует дополнить еще четырьмя, которые получим циклической перестановкой по указанным тройкам.

Для сопоставления уравнений (50), (51) с уравнениями (32), (23) третьего представления УК отнесем последние тоже к главным осям тензора инерции и заменим некоторые обозначения подстановкой

$$\left\{ \begin{matrix} J_{11}, & J_{22}, & J_{33}; & \omega_1, & \omega_2, & \omega_3; & R_i \\ A, & B, & C; & p, & q, & r; & \gamma_i \end{matrix} \right\} \qquad J_{ij} = 0 \qquad j \neq i, \tag{53}$$

$$Ap^\bullet = (Bq + \lambda_2 - E_{2j}\gamma_j)r - (Cr + \lambda_3 - E_{3j}\gamma_j)q + (N_{3j}\gamma_j - \mu_3)\gamma_2 - (N_{2j}\gamma_j - \mu_2)\gamma_3, \tag{54}$$

$$\gamma_1^\bullet = r\gamma_2 - q\gamma_3 \qquad (123;\ ABC;\ pqr).$$

Достаточно теперь ограничить параметры УК условиями

$$E_{ij} = 0, \qquad N_{ij} = 0 \qquad j \neq i, \tag{55}$$

$$E_{11} = Ha, \quad E_{22} = Hb, \quad E_{33} = Hc, \quad N_{11} = \varepsilon A, \quad N_{22} = \varepsilon B, \quad N_{33} = \varepsilon C, \tag{56}$$

чтобы подставив (55), (56) в (54), убедиться, что уравнения (50) при ограничениях (55), (56) действительно являются частным случаем уравнений (54).

Распространим ограничения (55), (56) и на основное представление УК. Направление осей координат уже зафиксировано условием (53), и из (18) при этом условии имеем

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0, \qquad a_{11} = a_1 = A^{-1}, \qquad a_{22} = a_2 = B^{-1}, \qquad a_{33} = a_3 = C^{-1}. \tag{57}$$

Но в выборе начала координат остался произвол, и всегда можем поместить начало координат в центральной точке тела, так что

$$c_{ji} = c_{ij} \qquad j \neq i. \tag{58}$$

Вследствие (53), (55), (58), из (31) получаем

$$0 = E_{23} = E_{32} = c_{23}(B + C) \qquad (123;\ ABC)$$

и, значит $c_{23} = c_{31} = c_{12} = 0$, так как диагональные компоненты A, B, C тензора инерции положительны. Теперь диагональные компоненты тензора E_{ij} такие: $E_1 = E_{11} = c_1A - c_2B - c_3C$, $c_{11} = c_1$ $(123;\ ABC)$. Ограничения (56) принимают вид

$$c_1A - c_2B - c_3C = Ha \quad (123;\ ABC;\ abc) \tag{59}$$

и, значит, $c_1A = -H(b + c)/2$, $c_2B = -H(c + a)/2$, $c_3C = -H(a + b)/2$. Условия (55), (56), ограничивающие тензор N_{ij}, запишем с учетом (29)

$$0 = N_{23} = b_{23}, \quad \varepsilon A = N_{11} = b_1 - c_1^2A \quad (123;\ ABC), \tag{60}$$

так что $b_1 = (\varepsilon + c_1^2)A, \quad b_2 = (\varepsilon + c_2^2)B, \quad b_3 = (\varepsilon + c_3^2)C$. Из (27), (53) : $P_1 = = Ap - c_1 A\gamma_1 \quad (123;\ ABC)$. Отсюда и (57) находим компоненты угловой скорости

$$p = a_1 P_1 + c_1\gamma_1 \qquad (123;\ pqr), \tag{61}$$

а с учетом (60) из (20) следует, что $u_1 = c_1 P_1 + (\varepsilon + c_1^2)A\gamma_1 \quad (123;\ ABC)$. Теперь УК в основном представлении (22) записываются в виде

$$P_1^{\bullet} = (P_2 + \lambda_2)(a_3 P_3 + c_3\gamma_3) - (P_3 + \lambda_3)(a_2 P_2 + c_2\gamma_2) +$$

$$+ \left[c_3 P_3 + (\varepsilon + c_3^2)C\gamma_3 - \mu_3\right]\gamma_2 - \left[c_2 P_2 + (\varepsilon + c_2^2)B\gamma_2 - \mu_2\right]\gamma_3 \quad (123).$$

Именно этот частный случай УК основного представления при заменах (57), (61), (59) дают уравнения (50).

Но одной "постановкой" задачи автор работы |14| не ограничился. Он предложил своеобразный легкий путь "обобщения" всех решений труднейших классических задач динамики твердого тела. Вместо указанной в “постановке” *неподвижной* системы координат, по отношению к которой тело имеет угловую скорость ω, он предложил ввести "новый вектор

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} + \nu\boldsymbol{\gamma}, \qquad \nu = \text{const}”. \tag{62}$$

Механический смысл этого он не поясняет, но очевидно, что этим предложено рассматривать движение тела уже не по отношению к неподвижной системе координат, а по отношению к системе, имеющей собственное вращение с угловой скоростью $\nu\boldsymbol{\gamma}$ вокруг оси $O'O$. В уравнениях (43) появляются дополнительные слагаемые – так называемые кориолисовы и центробежные силы инерции. И если известно какое-либо решение системы (43), то вследствие (62) оно “обобщается” – оказывается решением вновь получаемой системы. Поскольку такое решение содержит дополнительный параметр ν, автор заявляет, что он обобщил известные решения системы (43):

"в рассматриваемой задаче имеют место шесть общих случаев интегрируемости: обобщение случаев Бруна, Жуковского, Лагранжа, Ковалевской и два случая из пунктов 4 и 5" [14, с.63|.

Для большей убедительности продемонстрируем несостоятельность подобных "обобщений" на простейшем школьном примере.

Пусть в *неподвижной* системе координат $Oxyz$ из точки $(0, y_0, 0)$ брошен камень с начальной скоростью $(v_0\cos\alpha, 0, v_0\sin\alpha)$. Динамические уравнения $\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = 0,\ \ddot{z} = -g$ определяют траекторию

$$x = v_0 t\cos\alpha, \qquad y = y_0, \qquad z = v_0 t\sin\alpha - gt^2/2. \tag{63}$$

Это парабола $\quad y = y_0, \quad z = x\text{tg} - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$.

Следуя |14|, "обобщим" этот результат. Введем систему координат $Ox'y'z'$, вращающуюся по отношению к $Oxyz$ с угловой скоростью ν вокруг оси Oz , так что

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \qquad z = z', \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \qquad \varphi = \nu t. \end{aligned} \tag{64}$$

Если "поставить" задачу о движении камня по отношению к системе координат $Ox'y'z'$ (полагая ее, например, связанной с вращающейся платформой карусели, на которой находится наблюдатель), то при составлении уравнений движения надо вводить так называемые кориолисово $(2\nu\dot{y}',\ -2\nu\dot{x}',\ 0)$ и центробежное $(\nu^2x',\ \nu^2y',\ 0)$ ускорения, так что $\ddot{x}' = 2\nu\dot{y}' + \nu^2x',\quad \ddot{y}' = -2\nu\dot{x}' + \nu^2y',\quad \ddot{z}' = -g$ при начальных условиях $x'(0) = 0,\ y'(0) = y_0,\ z'(0) = 0,\ \dot{x}'(0) = v_0\cos\alpha + \nu y_0,\ \dot{y}'(0) = 0,\ \dot{z}'(0) = v_0\sin\alpha$. В результате интегрирования этих уравнений получаем $x' = y_0\sin\nu t + v_0t\cos\alpha\cos\nu t,\ y' = y_0\cos\nu t - v_0t\cos\alpha\sin\nu t,\ z' = v_0t\sin\alpha - gt^2/2$. Но конечно же, строить это "новое решение"(как его назвали бы в [14]) не имело смысла – оно непосредственно следует из (63) при замене (64). А само оно, "обобщенное"введением дополнительного параметра ν, лишь плохо представленное описание простейшего явления – движение камня по параболе, искаженное для вращающегося наблюдателя. Для него это неалгебраическая кривая – пространственная раскручивающаяся спираль.

Основное заключение. В большинстве реальных физических задач, приводящих к УК, форма (1) определенно положительная. Поэтому все выполненные здесь линейные замены переменных были невырожденными и обратимыми. А это означает, что все *четыре* представления УК определяют *одно и то же* интегральное многообразие. Другими словами, любое решение УК, найденное при использовании какого-либо из четырех их представлений с выбранной парой из троек основных переменных $\omega_i,\ u_i,\ R_i,\ P_i\ (i = 1, 2, 3)$, при замене этих переменных другой парой оказывается решением УК, представленным посредством последней пары. Это и приводит к *основному* заключению:

Любые математические исследования УК достаточно проводить только для одного их представления – все математические результаты таких исследований элементарной линейной невырожденной заменой переменных переносятся на остальные представления УК.

Чем вызвано это заключение, возведенное здесь в ранг *основного*? Для математика оно тривиально. В нем утверждается лишь то, что любое решение данной системы уравнений при невырожденной замене переменных, выполненной и в уравнениях, и в решении, остается решением и после такой замены. Подобные преобразования постоянно совершают при отыскании решений, и в этом вопросе, казалось бы, нет предмета обсуждения.

Но в естественных науках (в частности – механике) *различные* представления уравнений одной структуры (такие, например, как УК в исходном и промежуточном представлениях) могли вначале появиться при постановках задач, описывающих различные явления. И некоторое время их могли рассматривать как различные математические объекты.

Однако различие физических задач может существенно проявляться лишь на начальном этапе – при формировании математической модели, и на заключительном этапе, когда *решение* используют при исследовании явления. Сама же математическая модель – объект исследования математики. И до тех пор, пока речь идет лишь об отыскании *решений*, ее могут рассматривать безотносительно к моделируемому явлению. Системы уравнений, переводимые одна в другую невырожденной заменой переменных, в математике не различают – это один и тот же объект исследования. Но не увидев (или проигнорировав) факт изоморфности, [14] некоторые авторы продолжают публиковать (а некоторые редколлегии – принимать) "обобщения классических задач"[14] или даже

[14]Здесь этот термин употреблен в обычном толковании: "взаимнооднозначного отображения двух совокупностей, сохраняющего их структурные свойства"[5, с.190].

сообщать о "новых решениях"[18], которые в действительности выводятся из известных указанными заменами переменных, и стало быть, являются *псевдоновыми* решениями.

В соответствии с приведенным здесь основным заключением необходимо выделить то единственное представление УК, с которым следует во избежание дальнейших "открытий"решений сопоставить результаты, получаемые на основе других представлений. Простое сопоставление динамических уравнений (4), (22), (32), (42) показывает, что именно основное представление (22) наиболее удобно использовать при отыскании точных решений. Это подтверждает и высокая результативность исследований С.А.Чаплыгина и его последователей. Относительно просты и зависимости в заменах переменных, связывающих основное представление с остальными, что существенно для реализации упомянутых сопоставлений.

1. *Дородницын А.А.* Н.Е.Кочин – принципы и система работы ученых /Н.Е.Кочин и развитие механики. - М.: Наука, 1984. - 256 с.
2. *Харламов П.В.* Поступательные движения тяжелого твердого тела в жидкости //Прикл. математика и механика. - 1956. - XX. - С. 124-129.
3. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журнал прикл. механики и техн. физики. - 1963. - N 4. - С. 17-29.
4. *Харламова Е.И., Степанова Л.А.* Об изоморфизме некоторых классических задач динамики твердого тела и попытках построения новых решений путем замены переменных // Механика твердого тела. - 1988. - Вып.20. - С. 1-13.
5. Словарь иностранных слов. - М.: Русский язык, 1979. - 624 с.
6. *Горр.Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. - Киев: Наук. думка, 1978. - 296 с.
7. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. - М.: Мир, 1984. - 434 с.
8. *Поппер К.* Логика и рост научного знания. - М.: Прогресс, 1985. - 605 с.
9. *Лаврентьев М.А.* Судьба эксперимента - М.: Изд-во РАН "Поиск", 17.11.2000. N 46 (600) - 16 с.
10. *Харламов П.В.* Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки. - Киев: Наук. думка, 1995. - 409 с.
11. *Ламб Г.* Гидродинамика. - М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. - 924 с.
12. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости (статья первая) // Собр. соч. В 4-х т. - М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948. - Т.1. - С. 136-193.
13. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. В 2-х т. - М.; Л.:Гостехтеориздат, 1950. - Т.2. - 440 с.
14. *Яхья Х.М.* Новые решения задачи о движении гиростата в потенциальном и магнитном полях // Вестн. Моск. ун-та . Сер.1, Математика, механика. - 1985. - N 5 - С. 60-63.
15. *Новожилов В.В.* Вопросы механики сплошной среды. - Л.: Судостроение, 1989. - 400 с.
16. *Мартыненко Ю.Г.* Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. - М.: Наука, 1988. - 368 с.
17. *Grioli G.* Movimenti dinamicamente possible per un solido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Ser. 8. - 1957. - **22**, N 4, - 459-463.
18. *Яхья Х.М.* Об одном классе движений гиростата в ньютоновском, электрическом и магнитном полях // Вестн. Моск. ун-та . Сер.1, Математика, механика. - 1986. - N 1. - С. 89-90.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Донецкий гос. техн. ун-т
`techmech@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 23.01.01