УДК 534.12

©2000. **М.П. Петренко**

КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ НА УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТАХ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ

Получено точное решение задачи о колебаниях круглых пластин с присоединенными на упругих элементах сосредоточенными массами. Изучение колебаний сводится к совместному решению уравнения в частных производных и системы обыкновенных дифференциальных уравнений соответствующей размерности. Сущность предлагаемого подхода состоит в разложении искомого прогиба по собственным формам колебаний пластины без присоединенных масс.

1. Совместные колебания круглой пластины радиуса R и толщины h с плотностью материала p цилиндрической жесткостью D с N присоединенными на пружинах жесткости c_k сосредоточенными массами m_k $(k = 1, 2, ..., N)$ описываются системой дифференциальных уравнений [1,2]

$$D\nabla^4 w + ph\ddot{w} = \sum_{k=1}^{N} c_k(y_k - w_k)\delta_k + q(r,\theta,t),$$

$$m_k\ddot{y}_k + c_k(y_k - w_k) = P_k(t), \tag{1}$$

где $k = 1, 2, ..., N$, ∇^2 — оператор Лапласа в полярной системе координат r и θ с полюсом в центре пластины, w - прогиб пластины, $w_k = w(r_k, \theta_k, t)$ — прогиб пластины в точке (r_k, θ_k) крепления k–ой пружины с сосредоточенной массой m_k, y_k — расстояние массы m_k от срединной плоскости пластины,

$\delta_k = \delta(r - r_k, \theta - \theta_k)$ — дельта–функция Дирака, $q(r,\theta,t)$ — внешняя распределенная нагрузка, приложенная к пластине, P_k — внешняя сила, приложенная к k–ой массе.

Решение задачи о собственных колебаниях рассматриваемой механической системы будем искать в виде

$$w = W(r,\theta)\sin(\omega t + \varphi), \qquad y_k = Y_k \sin(\omega t + \varphi). \tag{2}$$

Тогда для определения собственных форм колебаний пластины $W(r,\theta)$ и собственных прогибов Y_k пружин с массами получим систему

$$D\nabla^4 W - ph\omega^2 W - \sum_{k=1}^{N} c_k(Y_k - W_k)\delta_k = 0, \qquad -m_k\omega^2 Y_k + c_k(Y_k - W_k) = 0, \tag{3}$$

решение $W(r,\theta)$ которой должно быть ограничено в центре пластины и удовлетворять граничным условиям

$$L_1(W)|_{r=R} = 0, \qquad L_2(W)|_{r=R} = 0. \tag{4}$$

2. Для решения этой задачи (и аналогичных задач о колебаниях упругих тел— балок, пластин, оболочек — с сосредоточенными включениями в виде сосредоточенных масс, сосредоточенных упругих подпорок или оттяжек, защемленных точек) предлагается следующий метод. Дельта-функцию δ_k разложить в ряд Фурье по собственным функциям $V_{ni}(r,\theta)$ той же пластины, но без сосредоточенных масс на пружинах, при этом [3]

$$V_{ni}(r,\theta) = [J_n(\alpha_{ni}r) + \lambda_{ni}I_n(\alpha_{ni}r)]\cos(n\theta), \tag{5}$$

где $n = 0, 1, 2, ...$, $i = 1, 2, ...$, α_{ni} - корни уравнения

$$\{L_1[J_n(\alpha,r)]L_2[I_n(\alpha,r)] - L_1[I_n(\alpha,r)]L_2[J_n(\alpha)]\}|_{r=R} = 0, \ \ n = 0, 1, 2, ..., \tag{6}$$

λ_{ni} - постоянная, определяемая видом граничных условий.

Будем иметь

$$\delta_k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{V_{nik}}{s_{ni}}V_{ni}(r,\theta), \tag{7}$$

где

$$V_{nik} = V_{ni}(r_k,\theta_k), \qquad s_{ni} = \int_0^R\int_0^{2\pi}V_{ni}^2(r,\theta)rdrd\theta.$$

Тогда первое уравнение системы (3) примет вид

$$\nabla^4W - \beta^4W = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_k(Y_k - W_k)V_{nik}}{Ds_{ni}}V_{ni}(r,\theta), \tag{8}$$

где

$$\beta^4 = \frac{ph\omega^2}{D}, \tag{9}$$

а его общее решение

$$W(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}[A_nJ_n(\beta r) + B_nI_n(\beta r)]\cos(n\theta) -$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_k(Y_k - W_k)V_{nik}}{Ds_{ni}(\beta^4 - \alpha_{ni}^4)}V_{ni}(r,\theta). \tag{10}$$

В этом решении неизвестными постоянными являются A_n , B_n (n =0,1,2,...), Y_k и W_k (k =1,2,...,N). Для их определения необходимо воспользоваться граничными условиями (4), вторым уравнением системы (3) и равенством

$$W_j \equiv W(r_j,\theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty}[A_nJ_n(\beta r_j) + B_nI_n(\beta r_j)]\cos(n\theta_j) -$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_k(Y_k-W_k)V_{nik}V_{ijk}}{Ds_{ni}(\beta^4-\alpha_{ni}^4)},\qquad j=1,2,...,N, \tag{11}$$

характеризующим значение прогиба пластины в точках крепления пружины с массами.

Исключая на основании второго равенства системы (3) величину $c_k(Y_k-W_k)$ в выражении (10), и подставляя полученное выражение в граничные условия (4), а также принимая во внимание, что функции $V_{ni}(r,\theta)$ удовлетворяют этим граничным условиям, получим

$$A_nL_1[J_n(\beta r)]_{r=R}+B_nL_1[I_n(\beta r)]_{r=R}=0,$$

$$A_nL_2[J_n(\beta r)]_{r=R}+B_nL_2[I_n(\beta r)]_{r=R}=0, \tag{12}$$

$$n=1,2,...,N.$$

Исключая на основании того же второго равенства системы (3) величину W_k в равенствах (11) получим N уравнений с неизвестными A_n, B_n и Y_k

$$\sum_{n=0}^{\infty}[A_nJ_n(\beta r_j)+B_nI_n(\beta r_j)]\cos(n\theta_j)-$$

$$-(1-\frac{m_jD\beta^4}{phc_j})Y_j-\frac{\beta^4}{ph}\sum_{k=1}^{N}m_k\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{V_{nik}V_{nij}}{s_{ni}(\beta^4-\alpha_{ni}^4)}Y_k=0,\quad j=1,2,...,N. \tag{13}$$

Равенства (12) и (13) образуют систему уравнений для определения неизвестных A_n, B_n $(n=0,1,2,...)$ и Y_k $(k=1,2,...,N)$. Определитель этой системы распадается на определитель уравнений (12) и определитель, состоящий из коэффициентов при неизвестных Y_k уравнений (13). Приравнивая нулю первый из них, получим уравнение (6), в котором вместо α будут стоять β и, следовательно, его корни $\beta_{ni}=\alpha_{ni}$. Приравнивая нулю второй определитель, получим уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{ph}{m_1\beta^4}+a_{11}-\frac{D}{c_1} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \frac{ph}{m_2\beta^4}+a_{22}-\frac{D}{c_2} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & \frac{ph}{m_N\beta^4}+a_{NN}-\frac{D}{c_N} \end{vmatrix}=0, \tag{14}$$

где $a_{sp}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{V_nisV_nip}{s_{ni}(\beta^4-\alpha_{ni}^4)}$, $\qquad s,p=1,2,...,N.$

Подставляя значение корня $\beta_{ml}=\alpha_{ml}$ в одно из уравнений (12), находим $B_{ml}=$ $=\lambda_{ml}A_{ml}$, при этом $A_{ni}=B_{ni}=0$ при $n\neq m$, $i\neq l$. Тогда при $\beta=\alpha_{ml}$ равенство (13) с учетом выражения (5) примет вид

$$A_{ml}V_{mlj} - (1 - \frac{m_j D\alpha_{ml}^4}{phc_j})Y_j - \frac{\alpha_{ml}^4}{ph}\sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{V_{nik}V_{nij}}{s_{ni}(\alpha_{ml}^4 - \alpha_{ni}^4)}Y_k = 0, \quad j = 1, 2, ..., N. \tag{15}$$

Но при $n = m$ и $i = l$ разность $\alpha_{ml}^4 - \alpha_{ni}^4 = 0$, поэтому равенство (15) имеет смысл лишь при условии, что $V_{mlj} = 0$. Для определения Y_k получим однородную систему, определитель которой не равен нулю, так как $\beta = \alpha_{ml}$ не является корнем (14), следовательно $Y_k = 0, (k = 1, 2, ..., N)$.

Таким образом, собственные формы, соответствующие корням $\beta_{ml} = \alpha_{ml}$, определяются равенством $W_{ml}(r,\theta) = V_{ml}(r,\theta)$ и точки (r_j, θ_j) для них являются узлами, поскольку $W_{mlj} = V_{mlj} = 0$.

На основании уравнения (14) находим корни β_s, расположенные между значениями α_{ni}. В этом случае из (12) следует $A_{ns} = B_{ns} = 0$, поэтому система (13) превратится в однородную систему относительно Y_k, определитель которой равен нулю. Из $N - 1$ уравнений этой системы находим $Y_{js} = C_{js}Y_{Ns}$ $(j = 1, 2, ..., N;\ C_{Ns} = 1)$.

Таким образом, на основании (10) совместно со вторым из уравнений (3) можем написать выражение собственной формы $W_s(r, \theta)$ и значения собственных амплитуд Y_{js} $(j = 1, 2,...,N;\ s = 1, 2, 3,...)$, соответствующих корню β_s , которые имеют вид

$$W_s(r,\theta) = -\frac{\beta_s^4}{ph}\sum_{k=1}^{N} C_{ks}m_k \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{V_{nik}V_{ni}}{s_{ni}(\beta_s^4 - \alpha_{ni}^4)},\ Y_{ks} = C_{ks}\,(C_{Ns} = 1). \tag{16}$$

Корни уравнений (6) и (14) расположим в порядке возрастания и присвоим им один индекс m. Тогда собственные частоты ω_m находим в соответствии с (9).

Получим условие ортогональности собственных форм $W_m(r,\theta)$ и собственных амплитуд Y_{km}. Для этого на основании (3) напишем уравнения собственных форм W_m и W_j и собственных амплитуд Y_{km} и Y_{kj}. Уравнение для W_m умножим на W_j, для W_m — на W_j, после чего из первого вычтем второе и проинтегрируем по площади пластины, при этом в случае классических граничных условий

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} (W_j \nabla^2 W_m - W_m \nabla^2 W_j) r dr d\theta = 0,$$

а на основании свойств дельта-функции

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} [W_j(W_{mk} - Y_{km})\delta_k - W_m(W_{jk} - Y_{kj})\delta_k] r dr d\theta = W_{mk}Y_{kj} - W_{jk}Y_{kj}.$$

Уравнения собственных амплитуд для Y_{km} и Y_{kj} умножим соответственно на Y_{kj} и Y_{km} и вычтем второе из первого. Исключая из полученных равенств разность $Y_{mk}W_{kj} - Y_{jk}W_{km}$ и принимая во внимание, что $\omega_m \neq \omega_j$, находим условие ортогональности собственных форм и амплитуд

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} W_m W_j r dr d\theta + \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{ph} Y_{km} Y_{kj} = 0, m \neq j. \tag{17}$$

3. Общее решение системы (1) будем искать в виде

$$w(r,\theta,t)=\sum_{m=1}^{\infty}q_m(t)W_m(r,\theta),\qquad y_k(t)=\sum_{m=1}^{\infty}q_m(t)Y_{km},\ k=1,2,\dots,N. \tag{18}$$

Подставляя выражения (18) в систему (1) и принимая во внимание уравнения собственных форм и амплитуд (3), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\ddot{q}_m+\omega_m^2q_m)phW_m=q(r,\theta,t),\qquad \sum_{m=1}^{\infty}(\ddot{q}_m+\omega_m^2q_m)m_kY_{km}=P_k(t),k=1,2,\dots,N. \tag{19}$$

Умножим первое из равенств (19) на W_j и проинтегрируем по площади пластины, второе — на Y_{kj} и просуммируем по k, после чего сложим с первым. Тогда, принимая во внимание условие ортогональности, получим

$$\ddot{q}_j+\omega_j^2q_j=Q_j(t),j=1,2,\dots, \tag{20}$$

где обобщенная сила

$$Q_j(t)=\frac{1}{phM_j}(\int_0^R\int_0^{2\pi}q(r,\theta,t)W_j(r,\theta)rdrd\theta+\sum_{k=1}^{N}P_k(t)Y_{kj}), \tag{21}$$

причем

$$M_j=\int_0^R\int_0^{2\pi}W_j^2(r,\theta)rdrd\theta+\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k}{ph}Y_{kj}^2. \tag{22}$$

Общее решение уравнения (20) имеет вид

$$q_j(t)=A_j\cos\omega_jt+B_j\sin\omega_jt+\frac{1}{\omega_j}\int_0^tQ_j(\tau)\sin\omega_j(t-\tau)d\tau, \tag{23}$$

где постоянные A_j и B_j определяются на основании начальных условий

$$w(r,\theta,0)=w_0(r,\theta),\dot{w}(r,\theta,0)=\dot{w}_0(r,\theta),y_k(0)=y_{k0},\dot{y}_k|_{t=0}=\dot{y}_{k0},k=1,2,\dots,N, \tag{24}$$

и условия ортогональности (17):

$$A_j=\frac{1}{M_j}(\int_0^R\int_0^{2\pi}w_0W_jrdrd\theta+\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k}{ph}y_{k0}Y_{kj}),$$

$$B_j=\frac{1}{\omega_jM_j}(\int_0^R\int_0^{2\pi}\dot{w}_0W_jrdrd\theta+\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k}{ph}\dot{y}_{k0}Y_{kj}). \tag{25}$$

Таким образом, выражения (18), совместно с (23) и (25), дают полное решение системы дифференциальных уравнений (1) как краевой задачи математической физики.

1. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. - М.: Гостехиздат, 1965. - 559 с.

2. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания пластинок и оболочек. - Киев: Наук. думка, 1964. - 228 с.

3. *Иваненко Д.Д., Соколов А.А.* Классическая теория поля. - М.: Гостехиздат, 1949. - 432 с.

Национ. техн. ун-т Украины, Киев Получено 13.12.99

УДК 531.36, 532.529

©2000. **О.Ф. Бойчук, А.В. Кузьма**

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ГАЗОВОГО СКОПЛЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ С НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ВИБРАЦИИ

На основании полученных уравнений колебаний сферического газового скопления в вибрирующем цилиндрическом сосуде с идеальной несжимаемой жидкостью в осесимметричном случае определяются условия существования уровней динамического равновесия.В отличии от подхода цилиндрической газовой полости [2,6] в уравнениях движения учтены дополнительные силы, связанных с удовлетворением условий на боковой границе и свободной поверхности жидкости. В линейном приближении показана устойчивость уровней, близких к резонансным положениям системы столб жидкости — сферический объем газа и проведено сравнение с экспериментальными данным.

1. Введение и постановка задачи. Явление роста газовых скоплений в замкнутых объемах жидкости при интенсивной вибрации, в частности в топливопроводах, были обнаруженны и первоначально исследовались в связи с развитием реактивной техники [7,14–16]. Дальнейшие экспериментальные исследования [2,6,12,14] выявили существование уровней динамического равновесия для пузырьков газа в жидкости, колеблющейся и с меньшими значениями виброускорений. Миграция пузырей к этим уровням приводит к образованию локальных газовых скоплений или пробок и к изменению динамических, в частности, резонансных характеристик всей системы. В. Н. Челомей в работе [14] сравнил парадоксальное удержание газовых пузырей или тяжелых твердых частиц в вибрирующих объемах жидкости с известными результатами вибрационной стабилизации статически неустойчивых положений маятника или динамического повышения устойчивости упругих систем. Теоритические исследования колебаний жидкостей с включениями начались с изучения сил, возникающих при осцилляциях или пульсациях сферических тел в периодических потоках. Н.Е. Жуковский [4] показал, что при совпадении частот колебаний идеальной несжимаемой жидкости с частотами колебаний сферических включений на последние действует ненулевая средняя за период колебаний сила, направление которой зависит от разности фаз. Условия, при которых вибрационные силы могут уравновесить гидростатические силы и удерживать газовые пузыри в колеблющейся жидкости, определялись экспериментально и теоретически в [1,6,11,12] и др.

Большинство указанных исследований проведены в предположении о малости частиц или пузырьков по сравнению с характерными размерами системы — расстояниями до внешних границ, соседних включений, длиной волны и т.д. При таком подходе учет