Если предположить, что $F = \text{const}$ и $H = \text{const}$, то требование к матрице F, заключающееся в положительной определенности матриц F' и $-(H^{\mathrm{T}}F' + \dot{F}'2)$, заменяется на требование определенной положительности функций $(\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}F'x + \Pi)$ и $-x^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(F'x + \frac{\partial\Pi}{\partial x}) - m\dot{g}(t)z_0(\cos x_1 \cos x_2 - 1)$, где $F' = F - AH^2$.

Заметим, что требование к матрице D о положительной определенности матрицы $(D' + AH)$ остается без изменения. Следует также отметить, что при $\dot{g}(t) \le 0$ условия на выбор матрицы F являются более слабыми, чем прежде.

В частном случае, когда $D > 0$, $H = 0$, $F = 0$, имеет место [1]:

$$\frac{d}{dt}[\dot{x}^{\mathrm{T}}A\dot{x} + \Pi(x,t)] = -\dot{x}^{\mathrm{T}}D\dot{x} + m\dot{g}(t)z_0(\cos x_1 \cos x_2 - 1).$$

Следовательно, при наличии диссипации по $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ вертикальное положение оси $0Z$ при $z_0 < 0$ является асимптотически устойчивым.

1. *Безгласный С.П.* О стабилизации программных движений неавтономных управляемых механических систем – Канд. дисс., МГУ. – 1998. – С. 90–97.
2. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений./В кн.: Малкин И.Г. Теория устойчивости движения, Дополнение 4.– М.: Наука, 1966. – С. 475–515.
3. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
4. *Мухаметзянов И.А.* Построение одного семейства функций Ляпунова//Вестник РУДН, сер. Прикл. математика и информатика. – 1995. – **1**. – С. 9–12.
5. *Мухаметзянов И.А.* Построение систем асимптотически устойчивого в целом программного движения//Вестник РУДН, сер. Прикл. математика и информатика. – 1998. – 1. – С. 16–21.
6. *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // Прикл. математика и механика. – 1970. – **34**, вып. 3. –С. 440–456.

Рос. университет дружбы народов, Москва — Получено 22.07.98

УДК 62-50

©2000. **А.Л. Зуев**

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА СО ЗНАКООТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ЗАДАЧАХ ЧАСТИЧНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Рассматривается задача стабилизации управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений по части переменных. Доказано, что если существует определенно - положительная по части переменных функция Ляпунова, для которой нижняя граница ее производных в силу системы является отрицательно-постоянной, то при некоторых дополнительных предположениях система является стабилизируемой по части переменных. При этом предлагается схема построения стабилизирующей обратной связи, с помощью которой решена задача одноосной стабилизации твердого тела под действием двух реактивных управляющих моментов.

1. Введение. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ - вектор управления; предполагается, что $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. Запишем вектор состояния системы (1) покомпонентно:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}),\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n_1},\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n_2},\ (n_1 + n_2 = n). \tag{2}$$

Введем следующие обозначения:

$$|\boldsymbol{y}| = \left(\sum_{i=1}^{n_1} {y_i}^2\right)^{1/2},\ |\boldsymbol{z}| = \left(\sum_{i=1}^{n_2} {z_i}^2\right)^{1/2},\ |\boldsymbol{x}| = \left(|\boldsymbol{y}|^2 + |\boldsymbol{z}|^2\right)^{1/2}.$$

С учетом (2) система (1) записывается следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}_{01}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \boldsymbol{f}_{i1}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \quad \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{f}_{02}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \boldsymbol{f}_{i2}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \tag{3}$$

где функции $\boldsymbol{f}_{ij}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ предполагаются непрерывно-дифференцируемыми в области $\mathcal{D}_H$,

$$\mathcal{D}_H = \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) : \ |\boldsymbol{y}| < H = \mathrm{const},\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n_2}\}.$$

Всякое управление с обратной связью $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ при подстановке в (3) дает автономную систему следующего вида

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}_{01}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + \sum_{i=1}^{m} u_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \boldsymbol{f}_{i1}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \equiv \boldsymbol{Y}_u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}),$$

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{f}_{02}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + \sum_{i=1}^{m} u_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \boldsymbol{f}_{i2}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \equiv \boldsymbol{Z}_u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}). \tag{4}$$

В качестве допустимых обратных связей для системы (3) будем рассматривать непрерывные в области $\mathcal{D}_H$ функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, которые удовлетворяют на всяком компакте из $\mathcal{D}_H$ условию Липшица ($\boldsymbol{u} \in \mathrm{Lip}_{loc}\mathcal{D}_H$). Очевидно, что для всякой допустимой обратной связи система (4) имеет тривиальное решение $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ и удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши в $\mathcal{D}_H$.

Задача стабилизации системы (1) по переменным $\boldsymbol{y}$ состоит в построении такой допустимой обратной связи $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, для которой тривиальное решение соответствующей системы (4) становится асимптотически устойчивым по $\boldsymbol{y}$, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что всякое решение $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0)$ системы (4) с начальными условиями $|\boldsymbol{x}_0| < \delta(\varepsilon)$ определено на $[0, +\infty)$ и удовлетворяет условиям:

$$|\boldsymbol{y}(t; \boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon, \forall t \geq 0; \quad \lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{y}(t; \boldsymbol{x}_0)| = 0.$$

Стабилизация нелинейной системы (1) является, вообще говоря, довольно сложной задачей. Как показано в [5], систему (1) возможно стабилизировать по всем переменным тогда и только тогда, когда у нее существует управляемая функция Ляпунова, т.е. определенно-положительная функция $V(\boldsymbol{x})$, для которой нижняя граница ее производных в силу системы (1) является определенно-отрицательной функцией. При этом стабилизирующая обратная связь выражается в виде известной функции от производных $V(\boldsymbol{x})$ по направлениям $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})$ [9]. Следует отметить, что на практике нахождение управляемой функции Ляпунова может оказаться затруднительным, в то время как функция $V(\boldsymbol{x})$ со знакопостоянной нижней границей производных в силу системы (1) может быть в ряде случаев построена исходя из физических соображений (например, если система (1) консервативна при $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$). Этот факт обуславливает интерес к конструктивному определению обратной связи с помощью определенно-положительной функции $V(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющей условию знакопостоянства производной:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_H\ \exists \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : \ \boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \leq 0. \tag{5}$$

В работах [8, 7] получены формулы для стабилизации системы (1) по всем переменным при условиях локальной управляемости [8] в окрестности нуля и существования у системы (1) при $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ функции Ляпунова с отрицательно-постоянной производной. При этом условие локальной управляемости системы гарантирует выполнение условий теоремы Барбашина – Красовского на траектории системы с обратной связью.

Настоящая статья посвящена решению задачи стабилизации системы (1) по части переменных при условии, если известна функция (5).

2. Основные теоремы. Введем в рассмотрение класс $\mathcal{K}$ функций Хана, состоящий из всех непрерывных строго возрастающих функций $a : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, удовлетворяющих условию $a(0) = 0$. Пусть $V \in C^1(\mathcal{D}_H)$. Вычислим производную от V в силу системы (1):

$$\dot{V} = a(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}),$$

где скалярная функция $a(\boldsymbol{x})$ и компоненты вектор-функции $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ определяются следующими выражениями

$$a(\boldsymbol{x}) = \nabla V(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}), \quad b_i(\boldsymbol{x}) = \nabla V(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}),\ i = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что функция $V(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет свойству (5) тогда и только тогда, когда при всех $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_H$ выполнено:

$$|\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})| = 0 \Rightarrow a(\boldsymbol{x}) \le 0.$$

Докажем теорему о стабилизации системы (1) по переменным $\boldsymbol{y}$.

Теорема 1. *Пусть существует функция $V(\boldsymbol{x}) \in C^2(\mathcal{D}_H)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\alpha_1(|\boldsymbol{y}|) \le V(\boldsymbol{x}) \le \alpha_2(|\boldsymbol{y}|)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$;

2) Уравнение

$$a(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = 0,$$

имеет решение $\boldsymbol{u}^0(x) \in \mathrm{Lip}_{loc}\mathcal{D}_H$, для которого множество

$$M_1 = \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})| = 0, |\boldsymbol{y}| \ne 0\}$$

не содержит положительных полутраекторий системы (3) с $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$;

3) Существует функция $h \in \mathrm{Lip}_{loc}\mathcal{D}_H$, $h(\boldsymbol{x}) > 0$, такая что всякое решение системы (3) с обратной связью

$$u_i(\boldsymbol{x}) = u_i^0(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{x}) b_i(\boldsymbol{x}), \quad i = \overline{1, m}, \tag{7}$$

начинающееся в достаточно малой окрестности нуля, ограничено по переменным $\boldsymbol{z}$.

Тогда обратная связь (7) обеспечивает стабилизацию системы по переменным $\boldsymbol{y}$.

Доказательство. Вычислим производную функции V в силу системы (3) с обратной связью $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, определяемой выражением (7):

$$\dot{V} = -h\,|\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})|^2 \le 0.$$

Производная $\dot{V}$ обращается в нуль на следующем множестве:

$$M = \{x : |\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})| = 0\}.$$

Легко видеть, что $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$ на множестве M. По условию 2) теоремы множество M не содержит положительных полутраекторий системы с обратной связью, за исключением траекторий с $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$. Условие 3) вместе с условием $\dot{V} \leq 0$ гарантирует ограниченность по всем переменным для решений системы с обратной связью (7), которые начинаются в достаточно малой окрестности нуля. Таким образом, при использовании обратной связи (7) выполнены все условия теоремы Ризито – Румянцева [3, Теорема 19.1] об асимптотической устойчивости тривиального решения системы (4) по переменным $\boldsymbol{y}$.

Для применения теоремы 1 необходимо проверять ограниченность решений по отношению к части переменных. Условия ограниченности решений по части переменных описаны в [3], в частности, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 [3, Теорема 39.1]. *Для ограниченности решений системы (4) по переменным* $\boldsymbol{z}$ *достаточно, чтобы существовали функции* $W \in C^1(\mathcal{D}_H)$, $a \in C^0([0, +\infty))$, *удовлетворяющие условиям:*

$$\dot{W} \leq 0,\ W(\boldsymbol{x}) \geq a(|\boldsymbol{z}|), \quad a(r) \to \infty \text{ при } r \to \infty.$$

Итак, задача стабилизации системы (1) по части переменных будет решена, если будут известны функции $V(\boldsymbol{x})$, $W(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющие условиям теорем 1, 2.

3. Одноосная стабилизация твердого тела. Рассмотрим модельную задачу о движении твердого тела вокруг центра масс под действием реактивных управляющих моментов без учета изменения массы. Уравнения движения запишем следующим образом:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}\omega_2\omega_3 + u_1;\ \dot{\omega}_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2}\omega_1\omega_3 + u_2;\ \dot{\omega}_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3}\omega_1\omega_2, \tag{8}$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad (123) \tag{9}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на соответствующие главные оси инерции тела; ν_1, ν_2, ν_3 - проекции неподвижного орта $\boldsymbol{\nu}$ на соответствующие главные оси инерции; A_1, A_2, A_3 - главные центральные моменты инерции тела; u_1, u_2 - управляющие моменты.

Система (8),(9) при $u_1 = u_2 = 0$ допускает следующее частное решение:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,\ \nu_1 = \nu_2 = 0,\ \nu_3 = 1. \tag{10}$$

Решение (10) соответствует положению равновесия, при котором третья главная ось инерции тела направлена по вектору $\boldsymbol{\nu}$. Заметим, что решение (10) не может быть асимптотически стабилизировано по всем переменным, поскольку у системы (8),(9) существует геометрический интеграл: $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = const$.

Задача стабилизация решения (10) по переменным $\boldsymbol{\omega}, \nu_1, \nu_2$ решена в [1] для случая трехмерного вектора управления. Стабилизируемость решения $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ системы (8) без учета уравнений Пуассона (9) под действием одномерного управляющего момента изучена в [4] для случая динамически несимметричного тела, а также в [10] для тела с двумя одинаковыми главными моментами инерции. В работе [2] исследованы условия стабилизируемости равномерных вращений под действием одномерного вектора управления. Вопросы робастной стабилизации тривиального решения системы (8) под действием двумерного управляющего момента изучены в статье [6].

Применим сформулированные выше теоремы для стабилизации решения (10) системы (8),(9) по следующим переменным:

$$(\omega_1, \omega_2, \nu_1, \nu_2). \tag{11}$$

Такой выбор переменных соответствует задаче об одноосной стабилизации твердого тела, т.е. проекции ν_1, ν_2 и их производные $\dot{\nu}_1, \dot{\nu}_2$ должны быть "малыми" и стремящимися к нулю при $t \to +\infty$, при этом остальные компоненты решения предполагаются ограниченными. Функцию $V(\boldsymbol{x})$ определим следующим образом:

$$V = \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2) + \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2).$$

Проведя непосредственные вычисления, будем иметь:

$$a(\boldsymbol{x}) = (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + \nu_3(\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1);\ b_1(\boldsymbol{x}) = A_1\omega_1;\ b_2(\boldsymbol{x}) = A_2\omega_2. \tag{12}$$

Разыскивая частное решение уравнения $a(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}^0 \cdot \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = 0$, получим:

$$u_1^0(\boldsymbol{x}) = \omega_2\omega_3 - \frac{1}{A_1}\nu_2\nu_3;\ u_2^0(\boldsymbol{x}) = -\omega_1\omega_3 + \frac{1}{A_2}\nu_1\nu_3. \tag{13}$$

Нетрудно проверить, что для достаточно близких к (10) начальных условий все целые траектории системы (8),(9) с управлением (13) удовлетворяют свойству $\nu_1 = \nu_2 = 0$ на множестве $M_1 : A_1\omega_1 = A_2\omega_2 = 0$, т.е. выполнено второе условие теоремы 1. Все решения системы (8),(9) ограничены по переменным ν_i благодаря наличию геометрического интеграла. Остается проверить ограниченность решений по ω_3, для чего воспользуемся теоремой 2 со следующей функцией:

$$W = \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2).$$

Производная от $W(\boldsymbol{x})$ в силу системы (8),(9) с обратной связью вида (7) равна

$$\dot{W}(\boldsymbol{x}) = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2\omega_3 - h(\boldsymbol{x})\,(A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2).$$

Согласно теореме 2, достаточно, чтобы функция $h(\boldsymbol{x}) > 0$ удовлетворяла следующему условию:

$$h(\boldsymbol{x})\,(A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2) \geq (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2\omega_3. \tag{14}$$

Используя неравенство $2A_1A_2\omega_1\omega_2 \leq A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2$ убеждаемся в том, что для выполнения (14) достаточно положить

$$h(\boldsymbol{x}) = \left|\frac{A_1 - A_2}{2A_1A_2}\omega_3\right| + \varepsilon, \tag{15}$$

где ε – произвольное положительное число. Запишем выражение для обратной связи (7), принимая во внимание (12), (13), (15):

$$u_1 = \omega_2\omega_3 - \frac{1}{A_1}\nu_2\nu_3 - \left\{\frac{|A_1 - A_2|}{2A_2}|\omega_3| + \varepsilon A_1\right\}\omega_1;$$

$$u_2 = -\omega_1\omega_3 + \frac{1}{A_2}\nu_1\nu_3 - \Big\{\frac{|A_1 - A_2|}{2A_1}|\omega_3| + \varepsilon A_2\Big\}\omega_2, \ (\varepsilon > 0). \tag{16}$$

Таким образом, с помощью теорем 1,2 получена обратная связь (16), решающая задачу стабилизации решения (10) системы (8),(9) по отношению к переменным (11). Заметим, что поскольку $\dot{W} \leq 0$, то решение (10) системы с обратной связью (16) устойчиво по Ляпунову. Кроме того, асимптотическая устойчивость по переменным (11) сохраняется и при больших начальных возмущениях ω_3.

1. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. – М.:Наука, 1975. – 496с.
2. *Ковалев А.М., Исса Салем Абдалла* Стабилизация равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси // Прикладная механика. – 1992. – **28(38)**, N 9. – С.73-79.
3. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256с.
4. *Aeyels D., Szafranski M.* Comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body // Systems and Control Letters. – 1988. – **10**. – P. 35-39.
5. *Artstein Z.* Stabilization with relaxed controls // Nonlinear Analysis, TMA. – 1983. – **7**, N 11. – P. 1163-1173.
6. *Astolfi A., Rapaport A.* Robust stabilization of the angular velocity of a rigid body // Systems and Control Letters. – 1998. – **34**. – P. 257-264.
7. *Bacciotti A., Ceragioli F.* Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth Lyapunov functions // ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations. – 1999. – **4**. – P. 361-376.
8. *Jurdjevic V., Quinn J.P.* Controllability and stability // Journal of Differential Equations. – 1978. – **28**. – P. 381-389.
9. *Lin Y., Sontag E.D.* A universal formula for stabilization with bounded controls // Systems and Control Letters. – 1991. – **16**. – P. 393-397.
10. *Sontag E.D., Sussmann H.J.* Further comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body // Systems and Control Letters. – 1989. – **12**. – P. 213-217.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Получено 27.10.99

УДК 531.38

©2000. **В.Ф. Щербак**

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ВРАЩЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБРАТНЫХ СИСТЕМ

Задача управления нелинейной системой вход-выход рассматривается с позиций метода обратных задач в теории управления. В [2] предложена общая схема получения обратного представления любой системы управления. В статье используются два получающихся при этом вида обратного описания для задачи управления угловой скоростью твердого тела.

1. Обратные задачи управления. Рассмотрим систему вход-выход, описываемую системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0 \in D \subseteq R^n, \tag{1}$$

на любом решении которой известны значения функции времени

$$y = h(x). \tag{2}$$