

Возьмем в качестве функции Ляпунова функцию $V = \frac{1}{2}A(p^2 + q^2)$.

$$\dot{V} = A(p\dot{p} + q\dot{q}) = -p^{2k} - q^{2n} \leq 0.$$

Обозначим $x = (p, q, r_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_4)$. Видим, что $\dot{V} = 0$ на множестве $M_1 = \{x : p = q = 0\}$. Нетрудно проверить, что множество $M_2 = \{x : p = q = 0\}$ инвариантно, а множество $M_1 \setminus M_2$ – пустое, и следовательно оно не содержит целых полутраекторий нашей системы. Используя все вышесказанное и применяя доказанную теорему заключаем, что тривиальное решение нашей системы эквивасимптотически устойчиво по отношению к переменным p, q .

1. *Зубов В.И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах.– Л.: Судпромгиз, 1962. – 631 с.
2. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
3. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
4. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. – М.: Гостехтеориздат, 1953. – 386 с.
5. *Матросов В.М.* Об устойчивости движения // там же.–1962.–26, вып. 5.– С. 885–895.
6. *Озиранер А.С., Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Прикл. математика и механика.–1972.–36, вып. 2.–С. 364–384.
7. *Озиранер А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных// Прикл. математика и механика.–1973.–37, вып. 4.– С. 659 – 665.
8. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных// Вестн. МГУ. Сер. мат., механ., физ., астроном., хим.–1957.–N 4.– С. 9–16.
9. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 253 с.
10. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
11. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 204 с.
12. *Rumyantsev V.V.* On the stability with respect to a part of the variables// Symp. math. Meccanica non-lineare e stabilita, 23–26 febbraio, 1970, L. – N.Y.: Acad. Press, 1971. –6. –P. 243–265.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 15.10.99

УДК 531.38

©2000. В.И. Коваль

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ОДНОЙ СВЯЗКИ ДВУХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ С ЖИДКОСТЬЮ

Для одного случая последовательного расположения двух гироскопов Лагранжа с жидкостью в задаче об устойчивости равномерных вращений вокруг вертикали проанализирован весь набор достаточных условий устойчивости их движения. Показано влияние массы тела-носителя с жидкостью и положения точки его подвеса к первому гироскопу на значения угловой скорости последнего, соответствующие его устойчивым вращениям. Выделены все формы эллипсоидальной полости, в которой жидкость совершает устойчивое вихревое движение. Для второго гироскопа построены области значений его угловой скорости, обеспечивающие ему устойчивые равномерные вращения вокруг вертикали вместе с другими составными элементами рассматриваемой механической системы.

Исходные соотношения. Задача устойчивости равномерных вращений вокруг вертикали в однородном поле сил несвободной связки гироскопов Лагранжа, когда пер-

вое тело имеет неподвижную точку, а во втором теле находится эллипсоидальная полость вращения и ее полностью заполняет идеальная несжимаемая жидкость, совершающая однородное вихревое движение, ранее рассматривалась [3,4,8]. Уравнения движения этой консервативной механической системы допускают независимые от времени интегралы. Достаточные условия устойчивости изучаемого движения найдены по теореме Рауса как условия положительной определенности функции Ляпунова, составленной из связки интегралов, и представлены в следующем виде [3]

$$B_1'' = B_1' + ms_1^2 > 0, \quad \left(1 + \frac{B_1'}{ms_1^2}\right) \left(\frac{B_2 + m_2c_2^2 + m_3s_2^2 + Q_2}{mc^2}\right) = W^2 > 1, \quad (1)$$

$$B_1''\lambda^2 + \alpha_1 A_1 \omega_1 \lambda + \alpha_1 g(m_1 c_1 + ms_1) < 0, \quad (2)$$

$$\varepsilon - \alpha_2 \frac{\lambda}{\Omega} > 0, \quad (3)$$

$$\left\{ [B_1''\lambda^2 + \alpha_1 A_1 \omega_1 \lambda + \alpha_1 g(m_1 c_1 + ms_1)] [B_2''\lambda^2 + \alpha_2 \lambda (A_2 \omega_2 + Q_3 \Omega) + \alpha_2 mcg] - \lambda^4 (mcs_1)^2 \right\} \left(\varepsilon - \alpha_2 \frac{\lambda}{\Omega} \right) + \lambda^2 (1 + \varepsilon) Q_1 [B_1''\lambda^2 + \alpha_1 A_1 \omega_1 \lambda + \alpha_1 g(m_1 c_1 + ms_1)] > 0, \quad (4)$$

где $Q_1 = 0, 4m_3 n_3^2 (1 + \varepsilon)$, $Q_2 = 0, 4m_3 n_3^2 \varepsilon^2 / (1 - \varepsilon)$, $Q_3 = 0, 4m_3 n_3^2 (1 + \varepsilon) / (1 - \varepsilon)$, $a = mcs_1$, $a_1 = m_1 c_1 + ms_1$, $\varepsilon = (n_1^2 - n_3^2) / (n_1^2 + n_3^2)$, $B_1' = B_1 + m_1 c_1^2$, $B_2'' = B_2 + m_2 c_2^2 + m_3 s_2^2 + Q_2$ – обозначения принятые в работе [1].

Оси гироскопов лежат на одной прямой – вертикальной оси. Положения осесимметричных тел относительно их точек подвеса, которыми являются идеальные сферические шарниры, задаются параметрами $\alpha_1 = \pm 1$ и $\alpha_2 = \pm 1$ соответственно. При $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ центры масс гироскопов находятся над их точками подвеса. Именно для этой последовательной цепочки тел в данной работе проводится анализ условий (1) – (4). Заметим, что они не будут совместными, если положить $m_1 = 0$. При этом условии система неравенств (1) – (4) исследована в работах [3,4,8].

Систему неравенств (1) – (4) разделим на две группы. К первой – отнесем соотношения (1), не содержащие ни параметров $\lambda, \alpha_1, \alpha_2$, ни переменных $\omega_1, \omega_2, \Omega$, по которым изучается устойчивость движения механической системы. Условия (1) считаем выполненными. Первое из них определяет положительность измененного экваториального момента инерции нижнего гироскопа. Второе условие в (1) удовлетворяется в силу верности неравенства $m_2 c_2^2 + m_3 s_2^2 > mc^2$, где $m = m_2 + m_3$, $c = (m_2 c_2 + m_3 s_2) / m$. Далее анализируется вторая группа неравенств (2) – (4) в предположении $m_1 \neq 0$, $c \neq 0$, $s_1 \neq 0$.

Область устойчивости гироскопов Лагранжа. При $m = 0$ условие (2) получено Н.Г. Четаевым [7]

$$(B_1 + m_1 c_1^2) \lambda^2 + A_1 \omega_1 \lambda + gm_1 c_1 < 0. \quad (5)$$

Воспользуемся равенствами

$$B_1 = m_1 i_1^2, \quad A_1 = m_1 i_2^2, \quad (6)$$

где i_1, i_2 – радиусы инерции твердого тела, отнесенные к его главным осям, которые проходят через его центр масс на расстоянии c_1 от неподвижной точки. Соотношениями

$$k = \left(\frac{i_1}{i_2}\right)^2, \quad \tilde{\omega}_1 = \omega_1 \sqrt{\frac{i_1}{g}}, \quad \sigma = \frac{c_1}{i_1}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda_1 \sqrt{\frac{i_1}{g}} \quad (7)$$

введем безразмерные величины и запишем (5) в этих переменных

$$(1 + \sigma^2)k\tilde{\lambda}^2 + \tilde{\omega}_1\tilde{\lambda} + k\sigma < 0. \quad (8)$$

Критерием вещественности значений, принимаемых величиной $\tilde{\lambda}$, будет выполнение необходимого условия

$$\tilde{\omega}_1\tilde{\lambda} < 0 \quad (9)$$

и достаточного условия Маиевского - Четаева

$$\tilde{\omega}_1 > 2k\sqrt{\sigma(\sigma^2 + 1)}. \quad (10)$$

Последнее неравенство получено в предположении, что в (9) величина $\tilde{\omega}_1 > 0$. Однако, этот случай не исключает рассмотрения противоположных условий $\tilde{\omega}_1 < 0$ и $\tilde{\omega}_1 < -2k\sqrt{\sigma(\sigma^2 + 1)}$.

Параметр k характеризует отношение экваториального и осевого моментов инерции гироскопа. Поскольку они удовлетворяют неравенствам треугольника, то справедливо условие

$$k \geq 0, 5. \quad (11)$$

Рассмотрим выполнение неравенства (10) в пространства переменных $\tilde{\omega}_1, \sigma, k$. Учитывая (11), область D выполнения условия (10) ограничена плоскостями $k = 1/2, \sigma = 0$ и линейчатой поверхностью Π , определяемой уравнением

$$\tilde{\omega}_1^0 = 2k\sqrt{\sigma(\sigma^2 + 1)}. \quad (12)$$

При $k = \text{const}$ это уравнение описывает алгебраическую кривую l_k третьего порядка. Для различных значений k ее графики изображены на рис. 1. К точке начала координат они подходят имея вертикальную касательную $\sigma = 0$. Каждая кривая l_k получается в результате проектирования на плоскость $(\tilde{\omega}_1, \sigma)$ той пространственной кривой, которая является общей для плоскости $k = \text{const}$ и поверхности Π и которая является направляющей линией для образующих поверхности Π .

Объединим в одно множество Γ_k все гироскопы Лагранжа, для которых отношение квадратов их радиусов инерций будет величиной постоянной и равной k . Тогда в плоскости $k = \text{const}$ прямая, параллельная оси $O\tilde{\omega}_1$, и кривая l_k ограничивают область $D_k = \cup D_{k\sigma}$ выполнения условия (10) для этих гироскопов. Через $D_{k\sigma}$ обозначен интервал $(\tilde{\omega}_1^0, \infty)$ устойчивости равномерных вращений одного гироскопа Лагранжа, принадлежащего прямой $\sigma = \sigma_0$, при этом точка $(\sigma_0, \tilde{\omega}_1^0) \in l_k$. Тогда область $D = \cup D_k$, когда $k \in [0, 5; \infty)$, является областью устойчивости равномерных вращений вокруг вертикали всех гироскопов Лагранжа.

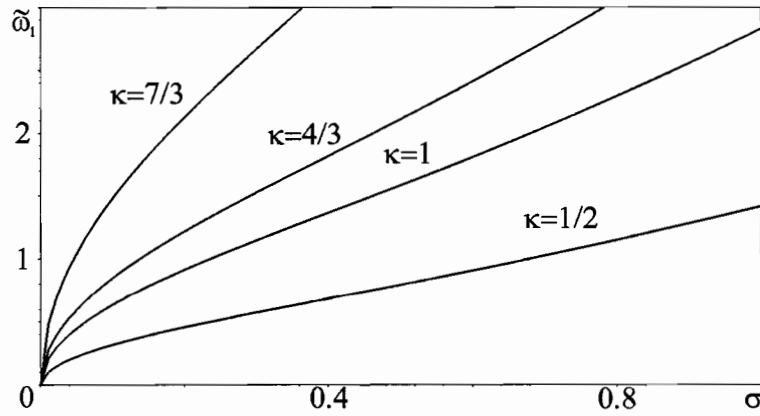


Рис. 1

Область значений параметра $\tilde{\lambda}$. В своей работе Н.Г. Четаев отмечает, что для любого гироскопа с заданными параметрами k, σ и известной его угловой скоростью вращения $\tilde{\omega}_1 \in (\tilde{\omega}_1^0; \infty)$ можно указать вещественные значения $\tilde{\lambda}$, для которых будет верно (8). Интервал изменения величины $\tilde{\lambda}$ не приводится, так как в нем нет надобности. Применяемый в [3-5,6,8] способ исследования достаточных условий устойчивости изучаемого стационарного движения к более простым механическим системам, чем система данной работы, учитывает интервал изменения величины $\tilde{\lambda}$ и использует его в построении областей определения параметров задачи, при которых эти условия выполняются.

Учитывая условие (9) и $\tilde{\omega}_1 > 0$, из (8) находим отрицательные значения

$$\tilde{\lambda}_j = -\frac{\tilde{\omega}_1}{2k(1+\sigma^2)} + (-1)^j \sqrt{\left(\frac{\tilde{\omega}_1}{2k(1+\sigma^2)}\right)^2 - \frac{\sigma}{1+\sigma^2}} \quad (j = 1, 2). \quad (13)$$

Эти зависимости рассмотрим в пространстве переменных $\tilde{\omega}_1, \sigma, \tilde{\lambda}$ при фиксированном значении $k = \text{const}$. Из множества гироскопов Γ_k выберем один с параметром $\sigma = \sigma_0$. Графики функций (13) на плоскости величин $\tilde{\omega}_1, \tilde{\lambda}$ образуют ветвь гиперболы, расположенную между асимптотами $\tilde{\lambda} = 0$ и

$$\tilde{\lambda} = -\frac{\tilde{\omega}_1}{k(1+\sigma^2)}. \quad (14)$$

На рис. 2 эта ветвь построена при $\sigma = 2 \pm \sqrt{3}$. Угловой коэффициент прямой (14) наименьшее значение принимает при $\sigma = 0$, а при $\sigma \rightarrow \infty$ — стремится к нулю. Для выбранного гироскопа равенство $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$ имеет место в точке $(\tilde{\omega}_1^0; \sigma_0)$ кривой l_k . Расстояние между значениями (13) возрастает при увеличении угловой скорости $\tilde{\omega}_1$. Если $\tilde{\omega}_1 \rightarrow \infty$, то получаем $\tilde{\lambda}_2 \rightarrow 0$, а величина $\tilde{\lambda}_1 \rightarrow -\infty$ вместе со значением (14), к которому приближается асимптотически.

Зафиксируем $\tilde{\omega}_1$ в формулах (13) и будем считать величины $\tilde{\lambda}_j$ ($j = 1, 2$) функциями переменной σ . Между ее значениями и множеством гироскопов Лагранжа Γ_k существует взаимное однозначное соответствие. Если центр масс гироскопа и его неподвижная точка совпадают, то переменная $\sigma = 0$. Обозначим через σ_* наибольшее значение σ , при котором имеет место равенство $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$, а значит в рассматриваемом случае невозможно

выполнение достаточного условия (8) устойчивости вращения соответствующего гироскопа. Меняя σ в интервале $(0; \sigma_*)$, из множества Γ_k выделяем совокупность гироскопов Лагранжа, которые совершают устойчивые вращения вокруг вертикали с угловой скоростью $\tilde{\omega}_1$.

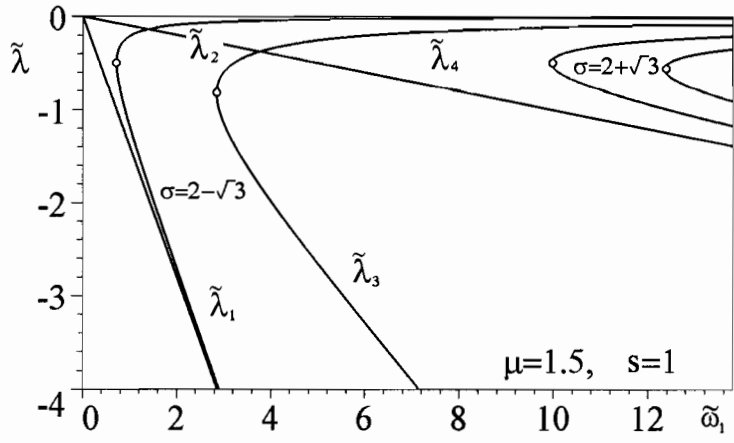


Рис. 2

В пространстве переменных $\tilde{\omega}_1, \sigma, \tilde{\lambda}$ уравнениями (13) описываются поверхности. Они изображены на рис. 3 при $k = 2/3$ и пересекаются по пространственной кривой L_k , проекция которой на плоскость $(\tilde{\omega}_1; \sigma)$ является кривой l_k . Результатом пересечения этих поверхностей и плоскости $\tilde{\omega}_1 = \text{const}$ будет кривая λ_{ω_1} . Она показана на рис. 3 и с помощью нее легко установить как изменяется величина интервала $(\tilde{\lambda}_1; \tilde{\lambda}_2)$ от переменной σ для некоторого семейства гироскопов. Заключенная между поверхностями (13) и ограниченная плоскостью $\sigma = 0$ область Λ_0 является областью значений параметра $\tilde{\lambda}$.

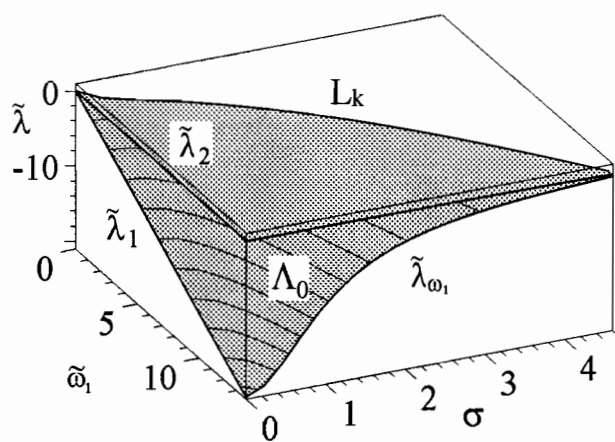


Рис. 3

Устойчивые вращения первого в связке гироскопа. Для гироскопа Лагранжа с параметрами k, σ его критическая угловая скорость $\tilde{\omega}_1^0$ определяется по формуле (12). Пусть этот гироскоп будет первым в связке гироскопов рассматриваемой механической системы, совершающей равномерные вращения вокруг вертикали. Как следует

из неравенства (2) угловые скорости устойчивых вращений такого гироскопа ограничены снизу новым критическим значением, которое соответствует другому гироскопу Лагранжа. Последний получим из исходного гироскопа разместив на его оси динамической симметрии точечную массу $m = m_2 + m_3$ на расстоянии s_1 от неподвижной точки. Определим как эти изменения повлияют на интервалы значений угловой скорости $\tilde{\omega}_1$ заданного гироскопа и параметра $\tilde{\lambda}$.

Учитывая (6), (7) и полагая

$$\mu = \frac{m}{m_1}, \quad s = \frac{s_1}{i_1}, \quad (15)$$

условие (2) запишем в виде

$$(1 + \sigma^2 + \mu s^2)k\tilde{\lambda}^2 + \tilde{\omega}_1\tilde{\lambda} + (\sigma + \mu s)k < 0. \quad (16)$$

Неравенство выполняется для $\tilde{\lambda} \in (\tilde{\lambda}_3; \tilde{\lambda}_4)$, при этом граничные значения интервала равны

$$\tilde{\lambda}_{2+j} = -\frac{\tilde{\omega}_1}{2k(1 + \sigma^2 + \mu s^2)} + (-1)^j \sqrt{\left(\frac{\tilde{\omega}_1}{2k(1 + \sigma^2 + \mu s^2)}\right)^2 - \frac{\sigma + \mu s}{1 + \sigma^2 + \mu s^2}} \quad (j = 1, 2) \quad (17)$$

и вещественны при

$$\tilde{\omega}_1 > 2k\sqrt{(\sigma + \mu s)(1 + \sigma^2 + \mu s^2)}. \quad (18)$$

Соответствующее равенству $\tilde{\lambda}_3 = \tilde{\lambda}_4$ новое критическое значение угловой скорости первого гироскопа обозначим

$$\tilde{\omega}_1^* = 2k\sqrt{(\sigma + \mu s)(1 + \sigma^2 + \mu s^2)}. \quad (19)$$

Тогда неравенства (10), (18) выполняются одновременно для значений $\tilde{\omega}_1 > \tilde{\omega}_1^* > \tilde{\omega}_1^0$. При постоянных k, σ зависимость (19) является функцией каждого множителя в произведении μs . Учитывая соотношения (13), получаем, что на самом деле независимыми переменными оказываются массы m_2 и m_3 соответственно второго гироскопа и жидкости, а также расстояние s_1 между неподвижной точкой и точкой подвеса. Критические значения $\tilde{\omega}_1^0$ и $\tilde{\omega}_1^*$ сближаются (удаляются), если хотя бы одна из указанных переменных уменьшается (увеличивается).

Уравнения (17) описывают ветвь гиперболы с вершиной в точке (19) и эта ветвь построена на рис. 2 в двух случаях $\sigma = 2 \pm \sqrt{3}$ при значениях $\mu = 1.5, s = 1$. Графики функций $\tilde{\lambda}_3(\tilde{\omega}_1), \tilde{\lambda}_4(\tilde{\omega}_1)$ не пересекаются, поскольку угловой коэффициент асимптоты $\tilde{\lambda} = -\tilde{\omega}_1/k(1 + \sigma^2 + \mu s^2)$ первой кривой больше аналогичной величины асимптоты (14) второй кривой. Сравнивая значения $\tilde{\lambda}_2(\tilde{\omega}_1)$ и $\tilde{\lambda}_4(\tilde{\omega}_1)$, получаем условие

$$\tilde{\omega}_1^2 s + k^2(1 + \sigma^2 - \sigma s)^2 > 0, \quad (20)$$

того, что $\tilde{\lambda}_2(\tilde{\omega}_1) > \tilde{\lambda}_4(\tilde{\omega}_1)$ при $\tilde{\omega}_1 > \tilde{\omega}_1^*$. В частности, при $m_2 = 0$ или $m_3 = 0$ соответствующие ветви гипербол (17) будут находиться на рис. 2 между кривыми $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_4$.

Таким образом, в рассматриваемой механической системе первый гироскоп Лагранжа находясь в связке с другим гироскопом совершает устойчивые вращения вокруг

стационарном движении, а соответствующие этим интервалам области значений параметра $\tilde{\lambda}$ удовлетворяют включению $\Lambda_* \subset \Lambda_0$.

Совместное выполнение условий (2), (3). Разный набор переменных задачи содержат неравенства (2) и (3), кроме произвольного вещественного параметра λ . Выполняемые в отдельности эти соотношения должны быть совместными при одних и тех же значениях λ . Используем результаты предыдущего пункта, где для фиксированной угловой скорости $\tilde{\omega}_1$ найден интервал $(\tilde{\lambda}_3; \tilde{\lambda}_4)$ изменения безразмерного параметра $\tilde{\lambda}$, и укажем в плоскости переменных $\tilde{\Omega}, \varepsilon$ соответствующие приведенному интервалу множества точек $(\tilde{\Omega}; \varepsilon)$ выполнения условия (3).

Безразмерный параметр $\varepsilon \in (-1; 1)$ характеризует степень сжатия эллипсоидальной полости вращения, которую полностью заполняет идеальная несжимаемая жидкость и совершает вокруг вертикали однородное вихревое движение величины 2Ω . Неравенство (3) не изменится, если в нем отношение λ/Ω заменить на аналогичное $\tilde{\lambda}/\tilde{\Omega}$, которое образуют безразмерные величины, при этом

$$\tilde{\Omega} = \Omega \sqrt{i_1/g}. \quad (21)$$

Пусть $\varepsilon \in [0; 1)$. В этом случае полость может быть шаровой ($\varepsilon = 0$) или сплюснутой по оси вращения. Так как устойчивым вращениям первого гироскопа с угловой скоростью $\tilde{\omega}_1 > \tilde{\omega}_1^*$ соответствуют отрицательные значения $\tilde{\lambda}$, то неравенства (3) верно при любом $\tilde{\Omega} > 0$. Изображенная на рис. 4 область $E_{\omega_1} = \{(\tilde{\Omega}; \varepsilon) : \tilde{\Omega} > 0, 0 \leq \varepsilon < 1\}$ служит областью выполнения условия (3) и не зависит от величины угловой скорости $\tilde{\omega}_1$ первого тела.

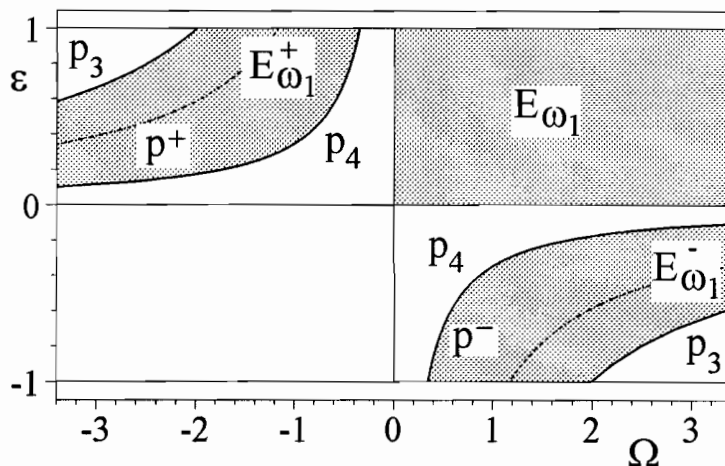


Рис. 4

Если $\tilde{\Omega} < 0$, то для сплюснутой полости условие (3) справедливо в точках $(\tilde{\Omega}; \varepsilon)$ области E_λ . Ее границу образуют прямая $\varepsilon = 1$ и гипербола

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\lambda}/\varepsilon. \quad (22)$$

Однопараметрическое семейство гипербол (22) не имеет между собой точек пересечения. В связи с этим наибольшую область E_λ получим при $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_4$. Множество E_{λ_4} является областью выполнения условия (3) относительно параметра $\tilde{\lambda} \in (-\infty; \tilde{\lambda}_4)$. Для значений

$\tilde{\lambda} \leq \tilde{\lambda}_3$ условие (2) не удовлетворяется. Тогда точки $(\tilde{\Omega}, \varepsilon)$ из области E_{λ_4} с координатами $\tilde{\Omega} \leq \tilde{\Omega}_3 = \tilde{\lambda}_3/\varepsilon$ не принадлежат множеству $E_{\omega_1}^+$, которое содержит только точки $(\tilde{\Omega}; \varepsilon)$ совместного выполнения условий (2), (3). На рис. 4 множество $E_{\omega_1}^+ = E_{\lambda_4} \setminus E_{\lambda_3}$ ограничено гиперболами p_3 и p_4 , уравнения которых получим из (22) при $\tilde{\lambda}_3$ и $\tilde{\lambda}_4$. Между этими кривыми расположена гипербола p^+ , к которой они приближаются, когда $\tilde{\omega}_1 \rightarrow \tilde{\omega}_1^*$, и совпадают с ней при $\tilde{\lambda}^+ = \tilde{\lambda}_3 = \tilde{\lambda}_4$. Для точек $(\tilde{\Omega}^+; \varepsilon)$ кривой p^+ условия (2), (3) не выполняются, а значит $E_{\omega_1}^+$ является пустым множеством.

Для вытянутой полости, которая задается значением $\varepsilon \in (-1; 0)$, условие (3) не выполняется при $\tilde{\Omega} < 0$ и система неравенств (2), (3) не будет совместной. Она удовлетворяется при любом $\tilde{\lambda} \in (\tilde{\lambda}_3; \tilde{\lambda}_4)$ на множестве $E_{\omega_1}^- = \{(\tilde{\Omega}; \varepsilon) : \tilde{\Omega}_4 = \tilde{\lambda}_4/\varepsilon < \tilde{\Omega} < \tilde{\Omega}_3, -1 < \varepsilon < 0\}$, которое на рис. 4 ограничено линиями p_4, p_3 и симметрично области $E_{\omega_1}^+$ относительно начала координат.

Области $E_{\omega_1}^-, E_{\omega_1}, E_{\omega_1}^+$ получены при фиксированном значении переменной $\tilde{\omega}_1$. Изменяя эту величину в интервале $(\tilde{\omega}_1^*; \infty)$, найдем три совокупности всех форм этих областей. В пространстве переменных $\tilde{\omega}_1, \tilde{\Omega}, \varepsilon$ из них формируются односвязные области $E^- = \cup E_{\omega_1}^-, E = \cup E_{\omega_1}, E^+ = \cup E_{\omega_1}^+$. Они состоят из точек $(\tilde{\omega}_1; \tilde{\Omega}; \varepsilon)$, для координат которых неравенства (2), (3) являются совместными относительно параметра $\tilde{\lambda}$. Область E ограничена плоскостями $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1^*, \tilde{\Omega} = 0, \varepsilon = 0, \varepsilon = 1$, а симметричные области E^+, E^- - поверхностями P^+ и P^- . Их уравнения получим подставив значения (17) в (22):

$$\varepsilon \tilde{\Omega} = -\frac{\tilde{\omega}_1}{2k(1 + \sigma^2 + \mu s^2)} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{\omega}_1}{2k(1 + \sigma^2 + \mu s^2)}\right)^2 - \frac{\sigma + \mu s}{1 + \sigma^2 + \mu s^2}}. \quad (23)$$

Эти уравнения определяют при фиксированном ε зависимость критических значений $\tilde{\Omega}_3, \tilde{\Omega}_4$ вихря от угловой скорости первого гироскопа. Для $\varepsilon = \pm 1$ уравнения (17) и (23) совпадают. Поверхности P^+, P^- (см. рис.5) пересекаются в плоскости $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1^*$ по кривым p^+ и p^- . Они являются ветвями одной гиперболы (22) при $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^+$.

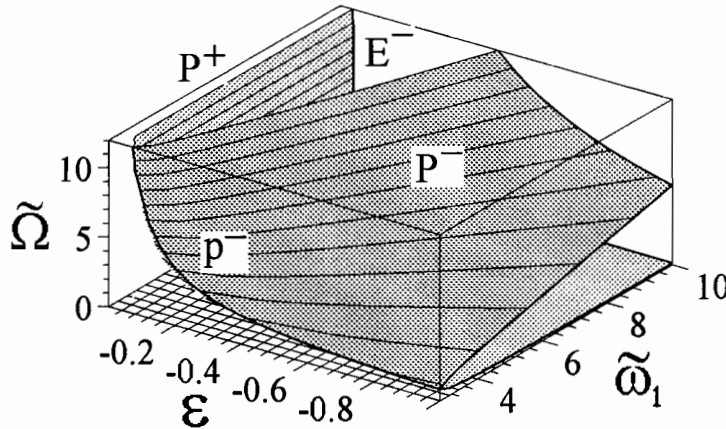


Рис. 5

По результатам исследований совместности условий (2), (3) сделаем следующие заключения. Устойчивость изучаемого движения идеальной жидкости в эллипсоидальной полости, которая заполнена полностью и размещена во втором гироскопе рассматриваемой механической системы, когда первый гироскоп совершает устойчивые вращения,

зависит не только от формы полости, на что обратил внимание еще Кельвин [2], но так же связана с направленностью вращений вокруг вертикали первого гироскопа и жидкости. Одинаково направленное с вращением первого гироскопа вихревое движение жидкости будет устойчивым в полостях сплюснутых при любом, отличном от нуля, значении вихря, а для вытянутых полостей значение вихря принадлежит конечному интервалу, который зависит от вытянутости полости и угловой скорости первого тела. Если вихрь жидкости и угловая скорость первого тела противоположно направлены, то вихревое движение жидкости будет неустойчивым в вытянутых полостях при любом значении вихря, но устойчивыми они станут в сжатых полостях при значениях вихря из конечного интервала, который определяют для каждой полости и угловой скорости первого тела. Увеличение угловой скорости первого гироскопа приводит к расширению конечных интервалов значений вихря, соответствующих устойчивым движениям жидкости. При этом для любого устойчивого вращения первого гироскопа найдется значение вихря такое, что движение жидкости в сплюснутой эллипсоидальной полости устойчивое во вращении одинаково направленном с вращением первого гироскопа станет неустойчивым во вращении противоположном с ним или во вращении в вытянутой полости.

Области устойчивости второго гироскопа и механической системы. В рассматриваемой задаче угловая скорость второго тела задана величиной $\tilde{\omega}_2$. Ограничения на эту переменную, при которых вращения второго гироскопа будут устойчивыми, определяются из условия (4). Учитывая (7), (15), (21) и вводя еще безразмерные переменные

$$\tilde{c} = \frac{i_1}{c}, \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2 \sqrt{\frac{i_1}{g}}, \quad \tilde{A}_2 = \frac{A_2 B_1'}{mc^2 ms_1^2}, \quad \tilde{Q}_1 = \frac{(1 + \varepsilon)Q_1 B_1'}{mc^2 ms_1^2}, \quad \tilde{Q}_3 = \frac{Q_3 B_1'}{mc^2 ms_1^2},$$

запишем неравенство (4) в новых обозначениях

$$\tilde{A}_2 \tilde{\omega}_2 > \frac{\tilde{Q}_3 \varepsilon \tilde{\Omega} (\tilde{\lambda} \varepsilon - \tilde{\Omega})}{\varepsilon \tilde{\Omega} - \tilde{\lambda}} + \Phi(\tilde{\lambda}). \quad (24)$$

Здесь

$$\Phi(\tilde{\lambda}) = -\frac{\tilde{c}}{\tilde{\lambda}} - \tilde{\lambda} \left(W^2 + \frac{\tilde{\lambda}^2}{(\tilde{\lambda}_4 - \tilde{\lambda})(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_3)} \right) \quad (25)$$

- положительная функция переменной $\tilde{\lambda}$ на интервале $(\tilde{\lambda}_3; \tilde{\lambda}_4)$ и ее значения $\Phi(\tilde{\lambda}) \rightarrow \infty$ при $\tilde{\lambda} \rightarrow \tilde{\lambda}_3$ и $\tilde{\lambda} \rightarrow \tilde{\lambda}_4$. Производная этой функции

$$\Phi'(\tilde{\lambda}) = \frac{\tilde{c}}{\tilde{\lambda}^2} - \left[W^2 + \frac{\tilde{\lambda}^2(-\tilde{\lambda}^2 + 2\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_4) - 3\tilde{\lambda}_3\tilde{\lambda}_4)}{(\tilde{\lambda}_4 - \tilde{\lambda})^2(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_3)^2} \right]$$

имеет вещественный корень $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_M$ на указанном интервале. Значение функции $\Phi(\tilde{\lambda}_M)$ будет наименьшим. Анализ условия (24) проведем в тех случаях, которые выделены в предыдущем пункте при исследовании условия (3).

Случай $\tilde{\Omega} > 0, \varepsilon < 0$. Система неравенств(2), (3) совместна в любой точке $(\tilde{\omega}_1; \tilde{\Omega}; \varepsilon)$ области E^- . При фиксированных координатах $\tilde{\omega}_1, \varepsilon$ эта система верна в E^- на промежутке $(\tilde{\Omega}_4; \tilde{\Omega}_3)$. Последний принадлежит интервалу $(0; \tilde{\Omega}_3)$, в котором выполняется условие (3). Учитывая это, на плоскости переменных $\tilde{\Omega}, \tilde{\omega}_2$ построим множество G_{ω_1} ,

содержащее точки $(\tilde{\Omega}; \tilde{\omega}_2)$, координаты которых удовлетворяют условию (24). Для этого используем график зависимости

$$\tilde{A}_2 \tilde{\omega}_2 = \frac{\tilde{Q}_3 \varepsilon \tilde{\Omega} (\tilde{\lambda} \varepsilon - \tilde{\Omega})}{\varepsilon \tilde{\Omega} - \tilde{\lambda}} \quad (26)$$

полагая $\tilde{\lambda}$ параметром, а величины \tilde{A}_2, \tilde{Q}_3 постоянными. Проходящую через полосу

$$0 \leq \tilde{\Omega} < \tilde{\lambda} / \varepsilon \quad (27)$$

плоскости $O\tilde{\Omega}\tilde{\omega}_2$ верхнюю ветвь гиперболы (26) обозначим l_λ . Она пересекает ось $O\tilde{\Omega}$ в точках $\tilde{\Omega} = 0, \tilde{\Omega} = \tilde{\lambda} \varepsilon$ и обладает следующими асимптотами: $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\lambda} / \varepsilon$ и

$$\tilde{A}_2 \tilde{\omega}_2 = -\tilde{Q}_3 (\tilde{\Omega} + \tilde{\lambda} (1 - \varepsilon^2) / \varepsilon). \quad (28)$$

При $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_M$ кривую l_λ переместим вверх параллельно себе на наименьшее расстояние $\Phi(\tilde{\lambda}_M)$ и обозначаем ее $l_{\lambda_M}^+$. Эта кривая и положительная полуось $O\tilde{\Omega}$ ограничивают на интервале $(0; \tilde{\lambda}_M / \varepsilon)$ область G_{λ_M} , для точек которой выполняется условие (24). Для любого значения $\tilde{\lambda}_* \in (\tilde{\lambda}_M; \tilde{\lambda}_4)$ полоса (27) станет уже, чем при $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_M$, а перемещение $\Phi(\tilde{\lambda}_*)$ будет большим величины $\Phi(\tilde{\lambda}_M)$. В связи с этим соответствующая значению $\tilde{\lambda}_*$ область G_{λ_*} удовлетворяет включению $G_{\lambda_*} \subset G_{\lambda_M}$. Если взять $\tilde{\lambda}_*$ из интервала $(\tilde{\lambda}_3; \tilde{\lambda}_M)$, то в силу условия $\tilde{\lambda}_* / \varepsilon > \tilde{\lambda}_M / \varepsilon$ полоса (27) будет шире, чем при $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_M$. Так как перемещение $\Phi(\tilde{\lambda}_*) > \Phi(\tilde{\lambda}_M)$, то кривые $l_{\lambda_*}^+$ и $l_{\lambda_M}^+$ пересекаются и области $G_{\lambda_*}, G_{\lambda_M}$ имеют как общие точки выполнения условия (24), так и точки, которые не принадлежат другой области. Если $\tilde{\lambda}$ изменять в интервале $(\tilde{\lambda}_3; \tilde{\lambda}_M]$, то в полосе $0 \leq \tilde{\Omega} < \tilde{\lambda}_3 / \varepsilon$ из областей G_λ формируется область $G_{\omega_1} = \cup G_\lambda$. Она содержит точки $(\tilde{\Omega}; \tilde{\omega}_2)$ выполнения условий (3) и (24) при заданных значениях $\tilde{\omega}_1$ и ε .

Дополнительные данные о G_{ω_1} получим, если изучим ее границу. Она состоит из двух участков - положительной полуоси $O\tilde{\omega}_2$ и кривой L_{ω_1} , которая для семейства кривых l_λ^+ является огибающей. Последняя определена следующей системой параметрических уравнений

$$\begin{cases} \tilde{\Omega} = \frac{\tilde{\lambda}}{\varepsilon} \frac{Z(\tilde{\lambda})}{1 + Z(\tilde{\lambda})}, \\ \tilde{A}_2 \tilde{\omega}_2 = \tilde{\Omega} \tilde{Q}_3 [(1 - \varepsilon^2) Z(\tilde{\lambda}) - \varepsilon^2] + Phi(\tilde{\lambda}), \end{cases} \quad (29)$$

где $Z(\tilde{\lambda}) > 0$ и $Z^2(\tilde{\lambda}) = \varepsilon \Phi'(\tilde{\lambda}) / \tilde{Q}_3 (1 - \varepsilon^2)$. Огибающая L_{ω_1} и ось $O\tilde{\omega}_2$ имеют общую точку M . Одна ее координата $\tilde{\Omega} = 0$, а значение второй $\tilde{\omega}_2^0$ определяется из равенства $\tilde{A}_2 \tilde{\omega}_2 = \Phi(\tilde{\lambda}_M)$. В результате на оси $O\tilde{\omega}_2$ выделяется интервал $(\tilde{\omega}_2^0; \infty)$, соответствующий устойчивым вращениям тела-носителя с жидкостью, которая совершает потенциальное (безвихревое) движение. Если через точку M параллельно оси $O\tilde{\Omega}$ провести прямую, то она пересечет огибающую L_{ω_1} в точке N с координатой $\tilde{\Omega} = \varepsilon \tilde{\lambda}_N$, а значение $\tilde{\lambda}_N$ находим из уравнения $\Phi'(\tilde{\lambda}) = \varepsilon \tilde{Q}_3$. Из производной

$$\frac{d(\tilde{A}_2 \tilde{\omega}_2)}{d\tilde{\Omega}} = \tilde{Q}_3 [(1 - \varepsilon^2)(Z(\tilde{\lambda}) + 1)^2 - 1] \quad (30)$$

следует, что кривая L_{ω_1} достигает наименьшего положения в точке K с координатой $\tilde{\Omega} = (1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}) \tilde{\lambda} / \varepsilon$, при этом $\tilde{\lambda}$ является корнем уравнения $(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})^2 \Phi'(\tilde{\lambda}) = \varepsilon^3 \tilde{Q}_3$.

Принимающая отрицательные и положительные значения соответственно при $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_M$ и $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_N$ производная (30) остается положительной для значений $\tilde{\lambda} < \tilde{\lambda}_N < \tilde{\lambda}_K < \tilde{\lambda}_M$. Тогда полагая $\tilde{\lambda} \rightarrow \tilde{\lambda}_3$, из (29) имеем $\tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}_3$, $\tilde{\omega}_2 \rightarrow \infty$. Это означает, что прямая $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_3$ будет вертикальной асимптотой для огибающей L_{ω_1} . Итак, для кривой L_{ω_1} выделен характеризующий ее следующий набор точек

$$\tilde{\Omega}(\tilde{\lambda}_M) = 0, \quad \tilde{\Omega}(\tilde{\lambda}_K) = (1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2})\tilde{\lambda}_K/\varepsilon, \quad \tilde{\Omega}(\tilde{\lambda}_N) = \varepsilon\tilde{\lambda}_N, \quad \tilde{\Omega}(\tilde{\lambda}_3) = \tilde{\lambda}_3/\varepsilon \quad (31)$$

и записаны они в порядке возрастания величины $\tilde{\Omega}$. Сравнивая последовательность точек (31) с точками $\tilde{\Omega} = 0$, $\tilde{\Omega} = (1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2})\tilde{\lambda}/\varepsilon$, $\tilde{\Omega} = \tilde{\lambda}\varepsilon$, $\tilde{\Omega} = \tilde{\lambda}/\varepsilon$ любой гиперболы l_λ^+ , отмечаем, что огибающая L_{ω_1} при изменении $\tilde{\Omega}$ в интервале $[0; \tilde{\Omega}_3)$ ведет себя так же, как гипербола l_λ^+ на интервале $[0; \tilde{\lambda}/\varepsilon)$. Каждое из соотношений (31) является функцией указанной индексированной величины $\tilde{\lambda}$, а значит зависят от угловой скорости $\tilde{\omega}_1$, которую в устойчивом вращении имеет первый гироскоп. Координаты точек кривой L_{ω_1} не удовлетворяют условию (24), а это значит, что вращение второго гироскопа с такими угловыми скоростями являются неустойчивыми. В связи с этим определяемую из (29) величину $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_{2\Omega}^0$ назовем критической угловой скоростью тела-носителя. Соответствующие потенциальному и вихревому движению жидкости критические значения $\tilde{\omega}_2^0$ и $\tilde{\omega}_{2\Omega}^0$ удовлетворяют условиям: $\tilde{\omega}_{2\Omega}^0 < \tilde{\omega}_2^0$ при $\tilde{\Omega} \in (0; \tilde{\Omega}(\tilde{\lambda}_N))$ и $\tilde{\omega}_{2\Omega}^0 \geq \tilde{\omega}_2^0$ при $\tilde{\Omega}(\tilde{\lambda}_N) \leq \tilde{\Omega} < \tilde{\Omega}(\tilde{\lambda}_3)$. Они аналогичны тем соотношениям, которые описаны в [5]. Итак, область G_{ω_1} является неограниченным односвязным выпуклым множеством.

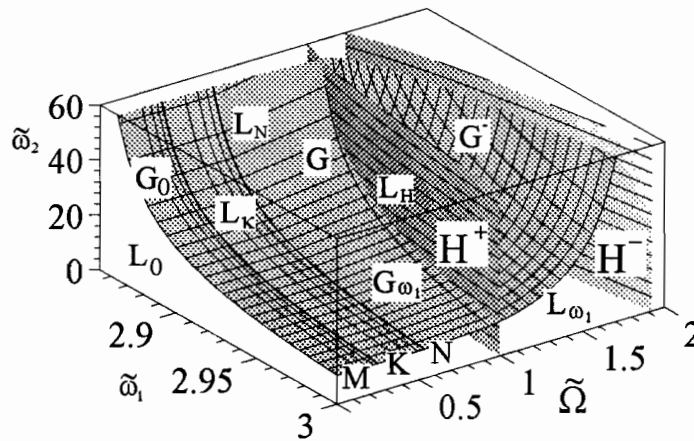


Рис. 6

Область G_{ω_1} и огибающая L_{ω_1} с характеризующими ее точками показаны на рис. 6 для значений $\tilde{\Omega} \in [0; \tilde{\Omega}_3)$. Этому промежутку принадлежит интервал $(\tilde{\Omega}_4; \tilde{\Omega}_3)$, на котором система неравенств (2), (3) верна. Тогда расположенная между вертикальной асимптотой $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_4$ кривой $l_{\lambda_4}^+$ и огибающей L_{ω_1} часть области G_{ω_1} является областью $G_{\omega_1}^-$ совместного выполнения условий (2) - (4) относительно параметра $\tilde{\lambda}$ при фиксированных значениях $\tilde{\omega}_1, \varepsilon$ и других величин задачи. Выделим три вида области $G_{\omega_1}^-$. Область первого вида представлена на рис. 6. Она соответствует условию $\tilde{\Omega}_4 \geq \tilde{\Omega}(\tilde{\lambda}_K)$ и определяется тем, что огибающая L_{ω_1} возрастает на промежутке $(\tilde{\Omega}_4; \tilde{\Omega}_3)$. При увеличении угловой скорости первого гироскопа область $G_{\omega_1}^-$ расширяется, так как уменьшается значение $\tilde{\Omega}_4$ и увеличивается $\tilde{\Omega}_3$. Если $\tilde{\Omega}_4 \in (0; \tilde{\Omega}(\tilde{\lambda}_K))$, то появляется промежуток

$(\tilde{\Omega}_4; \tilde{\Omega}(\tilde{\lambda}_K))$, на котором график огибающей снижается. Этим второй вид области $G_{\omega_1}^-$ отличается от предыдущего вида. При $\tilde{\Omega}_4 \rightarrow 0$ и $\tilde{\Omega}_3 \rightarrow \infty$ получим область третьего вида, которая найдена в [1].

Таким образом, если гироскоп с неподвижной точкой и с вихревой жидкостью в вытянутой эллипсоидальной полости совершают устойчивые равномерные вращения вокруг вертикальной оси с величиной вихря, принадлежащего бесконечному интервалу, то эта же система тело-жидкость, помещенная на другой гироскоп, который вращается в том же направлении, совершает устойчивые движения при значениях вихря из конечного интервала, величина которого зависит от угловой скорости первого гироскопа и степени вытянутости полости.

В пространстве переменных $\tilde{\omega}_1, \tilde{\Omega}, \tilde{\omega}_2$ построенные для каждого значения $\tilde{\omega}_1 > \tilde{\omega}_1^*$ плоские области G_{ω_1} образуют в совокупности область $G = \cup G_{\omega_1}$ совместного выполнения условий (3), (4), а множество огибающих L_{ω_1} формируют ее границу - поверхность L . Область G ограничена еще плоскостью $\tilde{\Omega} = 0$, которая содержит точки $M(\tilde{\omega}_1; \tilde{\omega}_2^0)$. Их первые координаты принимают значения в интервале $(\tilde{\omega}_1^*; \infty)$, а вторые - определяются из равенства $\tilde{A}_2 \tilde{\omega}_2 = \Phi(\tilde{\lambda}_M)$. Эти точки образуют границу L_0 области G_0 , которая является объединением всех интервалов $(\tilde{\omega}_2^0; \infty)$. Как известно [2], при потенциальном движении жидкости в эллипсоидальной полости вращение тела-носителя с жидкостью эквивалентно вращению твердого тела. В связи с этим область G_0 примечательна тем, что является областью устойчивых вращений вокруг вертикали несвободной системы двух гироскопов Лагранжа. Область G_0 , когда центр масс системы тело-жидкость совмещен с ее точкой подвеса в первом гироскопе, показана на рис. 3.5 работы [6, стр. 80]. Эта область расположена в первой четверти плоскости $O\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2$ и ограничена вертикальной прямой $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1^*$ и гиперболой

$$\tilde{A}_2 \tilde{\omega}_2 = \frac{\tilde{\omega}_1}{2k(1 + \sigma^2 + \mu s^2)} - \sqrt{\left(\frac{\tilde{\omega}_1}{2k(1 + \sigma^2 + \mu s^2)}\right)^2 - \frac{\sigma + \mu s}{1 + \sigma^2 + \mu s^2}} = 0,$$

которая асимптотически приближается к оси $O\tilde{\omega}_1$ при $\tilde{\omega}_1 \rightarrow \infty$. Границы областей G_0 на рис. 6 и 3.5 различаются. Поэтому проверим предположение о том, что прямые $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1^*$ и $\tilde{\omega}_2 = 0$ являются асимптотами кривой L_0 . Для этого надо показать, что выражение $\Phi(\tilde{\lambda}_M)$ как функция переменной $\tilde{\lambda}_M$ будет убывающей при $\tilde{\omega}_1 \rightarrow \tilde{\omega}_1^*$ или в случае $\tilde{\omega}_1 \rightarrow \infty$.

Возьмем произвольные значения $\tilde{\omega}_1^i$ ($i = 1, 2$) и пусть они удовлетворяют условиям $\tilde{\omega}_1^1 > \tilde{\omega}_1^2 > \tilde{\omega}_1^*$. При каждом $i = 1, 2$ для угловой скорости $\tilde{\omega}_1^i$ находим из (17) интервал $(\tilde{\lambda}_3^i; \tilde{\lambda}_4^i)$ изменения параметра $\tilde{\lambda}$, а принадлежащее интервалу значение $\tilde{\lambda}_M^i$ вычисляем из уравнения $\Phi_i'(\tilde{\lambda}) = 0$. Так как найденные интервалы удовлетворяют включению $(\tilde{\lambda}_3^2; \tilde{\lambda}_4^2) \subset (\tilde{\lambda}_3^1; \tilde{\lambda}_4^1)$ (см. рис. 2), то сравнение значений функций $\Phi_i(\tilde{\lambda})$ ($i = 1, 2$) при одних и тех же $\tilde{\lambda}$ достаточно провести на интервале $(\tilde{\lambda}_3^2; \tilde{\lambda}_4^2)$. На концах отрезка $[\tilde{\lambda}_3^2; \tilde{\lambda}_4^2]$ и во внутренней его точке $\tilde{\lambda}_M^2$ функция $\Phi_1(\tilde{\lambda})$ принимает значения меньше, чем $\Phi_2(\tilde{\lambda})$, при этом верность неравенства $\Phi_1(\tilde{\lambda}_M^2) < \Phi_2(\tilde{\lambda}_M^2)$ следует из выполнения условия $(\tilde{\lambda}_M^2 - \tilde{\lambda}_3^2)/(\tilde{\lambda}_4^1 - \tilde{\lambda}_M^2) < (\tilde{\lambda}_M^2 - \tilde{\lambda}_3^1)/(\tilde{\lambda}_4^2 - \tilde{\lambda}_M^2)$. Учитывая это и тот факт, что точка $\tilde{\lambda}_M^2$ разделяет интервал $(\tilde{\lambda}_3^2; \tilde{\lambda}_4^2)$ на два участка монотонности функции $\Phi_2(\tilde{\lambda})$ и на каждом из них справедливо неравенство $\Phi_1(\tilde{\lambda}) < \Phi_2(\tilde{\lambda})$, получаем искомое условие $\Phi_1(\tilde{\lambda}_M^1) < \Phi_2(\tilde{\lambda}_M^2)$ убывания функции $\Phi(\tilde{\lambda}_M)$. Выполнение последнего условия не зависит от того принадлежит точка $\tilde{\lambda}_M^1$ интервалу $(\tilde{\lambda}_3^2; \tilde{\lambda}_4^2)$ или нет.

Итак, кривая L_0 обладает асимптотами $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1^*$ и $\tilde{\omega}_2 = 0$. Для рассматриваемой механической системы, когда центры масс гироскопов находятся выше их шарниров, это

означает, что ее равномерные вращения вокруг вертикальной оси при потенциальном движении жидкости в вытянутой эллипсоидальной полости будут устойчивыми тогда и только тогда, когда совершается совместное вращение в одном направлении всех элементов системы с угловыми скоростями из области G_0 . Число вращающихся гироскопов Лагранжа в системе не изменится, если центр масс тела-носителя и жидкости совмещен с точкой подвеса второго гироскопа в первом теле. Этот случай $c = 0$ ранее изучен в [6].

В G выделим область $G^- = \cup G_{\omega_1}^-$, для точек которой при постоянном значении $\varepsilon \in (-1; 0)$ окажутся совместными относительно параметра $\tilde{\lambda}$ достаточные условия (2) - (4) устойчивости движения механической системы в данном случае. Границу области E^- плоскость $\varepsilon = \text{const}$ пересекает по кривым h_3^- и h_4^+ , которые образуют границу области E_ε^- и описываются уравнениями (23). Они в системе координат $0\tilde{\omega}_1\tilde{\Omega}\tilde{\omega}_2$ определяют цилиндрическую поверхность $H = H^- \cup H^+$. Первая ее часть H^+ , с направляющей линией h_4^+ и образующими параллельными оси $0\tilde{\omega}_2$, пересекает поверхность L по кривой L_H , а проходящие через направляющую h_3^- образующие второй части H^- являются вертикальными асимптотами огибающих L_{ω_1} и не имеют общих точек с L . Искомая область G^- ограничена поверхностями L и H^+ . Фрагмент областей G, G^- , расположенных вблизи плоскости $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1^*$, представлен на рис. 6. Таким образом, для любой точки $(\tilde{\omega}_1; \tilde{\Omega}; \tilde{\omega}_2)$ из области G^- равномерные вращения вокруг вертикальной оси рассматриваемой механической системы будут устойчивыми на основании теоремы [2] об устойчивости по части переменных.

Покажем теперь, что при любом значении $\tilde{\Omega} \neq 0$ плоскость $\tilde{\Omega} = \text{const}$ пересекает поверхность L по кривой L_Ω , обладающей вертикальной и горизонтальной асимптотами. Пусть $\tilde{\omega}_1^i$ ($i = 1, 2$) произвольные значения угловой скорости первого гироскопа, удовлетворяющие условиям $\tilde{\omega}_1^1 > \tilde{\omega}_1^2 > \tilde{\omega}_1^*$. При каждом $\tilde{\omega}_1^i$ ($i = 1, 2$) условие (24) выполняется для координат точек $(\tilde{\Omega}, \tilde{\omega}_2)$ области $G_{\omega_1}^i$, которая расположена в плоскости $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1^i$ и ограничена огибающей $L_{\omega_1}^i$ в интервале $[0; \tilde{\Omega}_3^i)$ изменения переменной $\tilde{\Omega}$. Так как выполнено включение $[0; \tilde{\Omega}_3^2) \subset [0; \tilde{\Omega}_3^1)$, то справедливость сформулированного утверждения связано с достоверностью условия

$$\tilde{\omega}_2^1(\tilde{\Omega}) < \tilde{\omega}_2^2(\tilde{\Omega}). \quad (32)$$

Значения $\tilde{\omega}_2^i(\tilde{\Omega})$ ($i = 1, 2$) являются координатами точек пересечения огибающих $L_{\omega_1}^i$ ($i = 1, 2$) и плоскости $\tilde{\Omega} = \text{const}$, проведенной в интервале $[0; \tilde{\Omega}_3^2)$. При $\tilde{\Omega} = 0$ неравенство (32) выполнено, так как ранее доказана справедливость условия $\Phi_1(\tilde{\lambda}) < \Phi_2(\tilde{\lambda})$. Учитывая это и используя второе уравнение в (29), нетрудно показать выполнение (32) при условии $\Phi_1'(\tilde{\lambda}) > \Phi_2'(\tilde{\lambda})$. Так как функция $\Phi(\tilde{\lambda}_M)$ монотонно убывающая, то последнее неравенство удовлетворяется при $\tilde{\lambda}_M^1 < \tilde{\lambda}_M^2$.

Доказанное утверждение имеет место для значений $\tilde{\Omega} > \tilde{\Omega}^+$, так как цилиндрическая поверхность H^- является асимптотой поверхности L . Плоскость $\tilde{\Omega} = \text{const}$ пересекает H^- по вертикальной прямой

$$\tilde{\omega}_{1\Omega} = -2(1 + \sigma^2 + \mu s^2)k\varepsilon\Omega. \quad (33)$$

Последняя является асимптотой кривой L_Ω , которую получаем в результате пересечения той же плоскости с поверхностью L . Так как производная (30) остается положительной

при $\tilde{\omega}_1 \rightarrow \infty$, то при выполнении условия (32) значение $\tilde{\omega}_2$ стремится к координате точки, находящейся на границе области G_{ω_1} третьего вида [1]. Если $\tilde{\Omega} \in (0; \tilde{\Omega}^+)$, то кривая L_Ω имеет асимптотой прямую в плоскости $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1^*$, а наличие у нее горизонтальной асимптоты $\tilde{\omega}_2 = \text{const}$ объяснено выше. Из этого следует, что кривые L_K и L_N лежат в соответствующих параллельных плоскостях, так как в противном случае кривая L_Ω может их пересекать и тогда не будет верным условие (32).

Выше изложенные результаты позволяют определить в плоскости $\tilde{\Omega} = \text{const}$, проходящей через область G^- , вид подобласти G_Ω^- , в которой выполнены условия (2) - (4) при вихревом движении жидкости, и сравнить его с областью G_0 , когда она совершает безвихревое движение. Если $\tilde{\Omega} \geq \tilde{\Omega}^+$, то область G_Ω^- ограничена единственной кривой L_Ω и для нее справедливо включение $G_\Omega^- \subset G_0$. Для значений $\tilde{\Omega} \in [\tilde{\Omega}(\tilde{\lambda}_N); \tilde{\Omega}^+)$ граница области G_Ω^- состоит из прямой (33) и кривой L_Ω , которые имеют общую точку B . Ее проекция на плоскость $\tilde{\Omega} = 0$ располагается выше кривой L_0 и принадлежит ей, когда плоскость $\tilde{\Omega} = \text{const}$ содержит кривую L_N . Между областями выполняется предыдущее включение. В случае $\tilde{\Omega} \in (0; \tilde{\Omega}(\tilde{\lambda}_N))$ форма границы области не изменяется. Однако проекция точки B находится ниже кривой L_0 и область G_Ω^- содержит точки, которые не принадлежат G_0 . В этом случае критическое значение угловой скорости второго гироскопа меньше, чем аналогичное ее значение при его вращении с потенциальной жидкостью.

Случай $\tilde{\Omega} > 0, \varepsilon > 0$. В сравнении с предыдущим случаем вихревое движение жидкости не изменилось по отношению к вращению первого гироскопа, но теперь оно происходит в сплюснутой эллипсоидальной полости. Для произвольной угловой скорости $\tilde{\omega}_1 > \tilde{\omega}_1^*$ и любой точки $(\tilde{\Omega}; \varepsilon)$ из области E (см. рис.4) условия (2), (3) выполнены. Изучим влияние вращения второго гироскопа на уже найденные устойчивые вращения первого гироскопа и жидкости. Из анализа условия (24) определим дополнительные ограничения на значения угловой скорости первого тела и вихря жидкости, позволяющие телу-носителю и рассматриваемой механической системе совершать устойчивые вращения вокруг вертикальной оси.

Из двух ветвей гиперболы (26) условию $\tilde{\Omega} > 0$ удовлетворяют точки ее нижней ветви. Если в (26) считать параметром $\tilde{\lambda} \in (\tilde{\lambda}_3; \tilde{\lambda}_4)$, то это уравнение описывает однопараметрическое семейство кривых l_λ , имеющих общую касательную в точке начала координат. После перемещения каждой из них на соответствующее расстояние $\Phi(\tilde{\lambda})$ все множество кривых l_λ^+ разделяется на два подмножества. Если $\tilde{\lambda} \in (\tilde{\lambda}_3; \tilde{\lambda}_M)$, то любые две кривые первого подмножества не имеют общих точек пересечения, а при $\tilde{\lambda} \in [\tilde{\lambda}_M; \tilde{\lambda}_4)$ кривые второго подмножества пересекаются. Чтобы убедиться в этом, вычислим значение функции $\Phi(\tilde{\lambda})$ при $\tilde{\lambda}_* = \tilde{\lambda}_M + \Delta\tilde{\lambda}$. Для этого в окрестности точки $\tilde{\lambda}_M$ разложим функцию в ряд Тейлора

$$\Phi(\tilde{\lambda}_*) = \Phi(\tilde{\lambda}_M) + \Phi'(\tilde{\lambda}_M)\Delta\tilde{\lambda} + 0,5\Phi''(\tilde{\lambda}_M)\Delta\tilde{\lambda}^2 + \dots \quad (34)$$

Так как $\Phi'(\tilde{\lambda}_M) = 0$, то перемещение (34) кривой l_λ складывается из двух составляющих. Достаточно кривую l_λ переместить на величину $0,5\Phi''(\tilde{\lambda}_M)\Delta\tilde{\lambda}^2 > 0$, чтобы найти условие пересечения ее с кривой l_{λ_M}

$$\tilde{Q}_3\varepsilon\tilde{\Omega}^2\Delta\tilde{\lambda}(1 - \varepsilon^2) = 0,5\Phi''(\tilde{\lambda}_M)(\varepsilon\tilde{\Omega} - \tilde{\lambda}_M)(\varepsilon\tilde{\Omega} - \tilde{\lambda} - \Delta\tilde{\lambda}).$$

Это равенство верно при $\Delta\tilde{\lambda} > 0$ и служит уравнением для нахождения координаты $\tilde{\Omega}$ общей точки указанных кривых. Области G_λ , где каждая ограничена соответствующей

кривой $l_{\tilde{\lambda}}^+$ из первого подмножества и положительной полуосью $O\tilde{\omega}_2$, удовлетворяют включениям $G_{\tilde{\lambda}_*} \subset G_{\tilde{\lambda}^*} \subset G_{\tilde{\lambda}_M}$ при $\tilde{\lambda}_* < \tilde{\lambda}^* < \tilde{\lambda}_M$. Поэтому область $G_{\tilde{\lambda}_M}$ является наибольшей из них и содержит все точки $(\tilde{\Omega}; \tilde{\omega}_2)$ выполнения условия (24), когда параметр $\tilde{\lambda}$ изменяется в интервале $(\tilde{\lambda}_3; \tilde{\lambda}_M)$. Кривые $l_{\tilde{\lambda}}^+$ из второго подмножества обладают огибающей L_{ω_1} . Ее параметрические уравнения

$$\begin{cases} \tilde{\Omega} = \frac{\tilde{\lambda}}{\varepsilon} \frac{Z(\tilde{\lambda})}{Z(\tilde{\lambda}) - 1}, \\ \tilde{A}_2 \tilde{\omega}_2 = \Phi(\tilde{\lambda}) - \tilde{\Omega} \tilde{Q}_3 [(1 - \varepsilon^2)Z(\tilde{\lambda}) + \varepsilon^2] \end{cases} \quad (35)$$

отличаются от соотношений (29) тем, что в последних следует заменить функцию $Z(\tilde{\lambda})$ на $-Z(\tilde{\lambda})$. При $\tilde{\lambda} < 0$ и $Z(\tilde{\lambda}) > 0$ значения $\tilde{\Omega}$ останутся положительными для значений $\tilde{\lambda} \in [\tilde{\lambda}_M; \tilde{\lambda}_A]$, где $\tilde{\lambda}_A$ определяется из уравнения

$$\varepsilon \Phi'(\tilde{\lambda}) = \tilde{Q}_3 (1 - \varepsilon^2), \quad (36)$$

которое является следствием равенства $Z(\tilde{\lambda}) = 1$. Рассматривая уравнения (35) как функцию $\tilde{\omega}_2(\tilde{\Omega})$ переменной $\tilde{\Omega}$, отмечаем, что она является монотонно убывающей для значений $\tilde{\Omega} \geq 0$, а ее график L_{ω_1} , имея начало в точке $M(0; \tilde{\omega}_2^0)$, пересекает ось $O\tilde{\Omega}$ в точке $N(\tilde{\Omega}_0^0; 0)$ и при $\tilde{\Omega} \rightarrow \infty$, $\tilde{\omega}_2 \rightarrow -\infty$, когда $\tilde{\lambda} \rightarrow \tilde{\lambda}_A$, асимптотически приближается к прямой

$$\tilde{A}_2 \tilde{\omega}_2 = \Phi(\tilde{\lambda}_A) - \tilde{Q}_3 [\tilde{\Omega} + (1 - \varepsilon^2)\tilde{\lambda}_A/\varepsilon]. \quad (37)$$

Координаты точки $(\tilde{\Omega}; \tilde{\omega}_2) \in L_{\omega_1}$ не удовлетворяют условию (24). Поэтому найденные из (35) при $\tilde{\Omega} \geq 0$ значения $\tilde{\omega}_{2\Omega}^0 = \tilde{\omega}_2(\tilde{\Omega})$ угловой скорости второго гироскопа назовем критическими. Наибольшее из них $\tilde{\omega}_2^0$ находится на положительной полуоси $0\tilde{\omega}_2$. Так как при $\tilde{\Omega} = 0$ жидкость совершает потенциальное движение, то устойчивые вращения тела-носителя с жидкостью с угловой скоростью $\tilde{\omega}_2 > \tilde{\omega}_2^0$ эквивалентны движению некоторого гироскопа Лагранжа. Для значений $\tilde{\omega}_2 < \tilde{\omega}_2^0$ устойчивые вращения вокруг вертикали второго тела невозможны, а тогда аналогичные движения несвободной системы двух гироскопов станут неустойчивыми.

Огибающая L_{ω_1} вместе с осью $0\tilde{\omega}_2$ ограничивают в правой полуплоскости область $G_{\omega_1} = \cup G_{\tilde{\lambda}}$. Для любого параметра $\tilde{\lambda} \in (\tilde{\lambda}_3; \tilde{\lambda}_A)$ в этой области найдется множество точек $(\tilde{\Omega}; \tilde{\omega}_2)$, координаты которых удовлетворяют условию (24). Наоборот, для произвольной точки $(\tilde{\Omega}; \tilde{\omega}_2) \in G_{\omega_1}$ можно указать некоторый набор значений параметра $\tilde{\lambda}$, при которых будет верным неравенство (24). Это означает, что G_{ω_1} является областью, в которой система неравенств (2)-(4) совместна относительно величины $\tilde{\lambda}$. В связи с этим сформулируем следующее утверждение: если первый гироскоп Лагранжа, имеющий неподвижную точку, и идеальная жидкость, наполняющая сплюснутую эллипсоидальную полость во втором гироскопе, совершают в одну сторону устойчивые вращения соответственно с угловой скоростью $\tilde{\omega}_1 > \tilde{\omega}_1^*$ и с произвольным значением вихря, определяемого величиной $\tilde{\Omega}$ из области E , то равномерные вращения второго гироскопа вокруг вертикальной оси будут устойчивыми для любой угловой скорости $\tilde{\omega}_2 > \tilde{\omega}_{2\Omega}^0$, при этом критическая угловая скорость $\tilde{\omega}_{2\Omega}^0$ зависит определенным образом от вихря.

Взятому из области E значению $\tilde{\Omega}$ соответствует в G_{ω_1} интервал $(\tilde{\omega}_{2\Omega}^0; \infty)$ изменения угловой скорости $\tilde{\omega}_2$. От знака этой величины зависит направление устойчивого

вращения второго гироскопа. Если критическая скорость $\tilde{\omega}_{2\Omega}^0 \geq 0$, то бесконечный интервал состоит из положительных значений $\tilde{\omega}_2$. Тогда направления вращений второго гироскопа и двух других элементов механической системы совпадают. Для отрицательной нижней грани $\tilde{\omega}_{2\Omega}^0$ множество угловых скоростей тела-носителя содержит, кроме точек положительной полуоси $O\tilde{\omega}_2$, так же неположительные значения полуинтервала $(\tilde{\omega}_{2\Omega}^0; 0]$. При $\tilde{\omega}_2 = 0$ второй гироскоп находится в относительном покое и его равновесие осуществляется за счет движения двух элементов системы - первого гироскопа и вихревого наполнения в полости второго гироскопа. Для отрицательных значений $\tilde{\omega}_2$ устойчивое вращение тела-носителя имеет направление противоположное к движению первого гироскопа и жидкости. Заметим, что последние два состояния второго гироскопа в процессе движения механической системы отсутствуют при наличии в его полости потенциальной жидкости, так как в этом случае рассматриваемая система состоит из двух элементов - гироскопов Лагранжа.

Проведенный выше анализ выполнения условия (24) показал, что угловая скорость $\tilde{\omega}_2$, как независимая переменная величина, принимает значения всей числовой оси $0\tilde{\omega}_2$. Учитывая это и то, что неравенства (2), (3) совместны при любых $\tilde{\omega}_1 > 0$, $\varepsilon > 0$ и значениях $\tilde{\Omega} > 0$, отмечаем, что последнее условие не изменяется для угловых скоростей $\tilde{\omega}_2 \leq \tilde{\omega}_2^0$, а если $\tilde{\omega}_2 < \tilde{\omega}_2^0$, то из соотношений (35) находим новую большую нижнюю грань $\tilde{\Omega}_{\omega_2}^0$ бесконечного множества определения величины $\tilde{\Omega}$. Происшедшее изменение подтверждает факт влияния движения второго гироскопа на величину вихря жидкости.

Объединение всех областей G_{ω_1} , соответствующих значениям $\tilde{\omega}_1 > \tilde{\omega}_1^*$, образуют в пространстве переменных $\tilde{\omega}_1, \tilde{\Omega}, \tilde{\omega}_2$ область $G = \cup G_{\omega_1}$ совместного выполнения условий (2)-(4). Она ограничена плоскостью $\tilde{\Omega} = 0$ и поверхностью L , которую образуют огибающие L_{ω_1} , и не содержит точек этих поверхностей. Область G_0 в плоскости $\tilde{\Omega} = 0$ аналогична той, которая изучена в предыдущем случае. Итак, равномерные вращения вокруг вертикальной оси рассматриваемой механической системы будут устойчивыми тогда и только тогда, когда угловые скорости элементов системы принадлежат области G , при этом жидкость совершает вихревое движение в сплюснутой полости.

Случай $\tilde{\Omega} < 0, \varepsilon > 0$. Он отличается от двух предыдущих тем, что первый гироскоп и вихревое наполнение в сплюснутой полости вращаются в разные стороны относительно вертикальной оси. При $\alpha_2 = 1$ и $\tilde{\Omega} < 0$ условию (3) удовлетворяют координаты точек верхней ветви гиперболы (26). Она является кривой l_λ , которая единственная ограничивает область выполнения условия (24) при $\Phi(\tilde{\lambda}) = 0$ и фиксированном параметре $\tilde{\lambda} \in (\tilde{\lambda}_3; \tilde{\lambda}_4)$. Так как однопараметрическое семейство кривых l_λ не имеет между собой общих точек пересечения, то в результате перемещения каждой из них вверх на соответствующее расстояние $\Phi(\tilde{\lambda}) > 0$ кривая $l_{\lambda_m}^+$ не будет самой нижней. Одновременно с кривой l_λ на величину $\Phi(\tilde{\lambda})$ перемещается ее наклонная асимптота (28) и новое положение последней определяется зависимостью

$$\tilde{A}_2\tilde{\omega}_2 = \Phi(\tilde{\lambda}) - \tilde{Q}_3[\tilde{\Omega} + \tilde{\lambda}(1 - \varepsilon^2)/\varepsilon]. \quad (38)$$

Дифференцируя (38) по $\tilde{\lambda}$ и приравнивая нулю результат, получим уравнение (36). Единственное его решение $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_A$ определяет кривую $l_{\lambda_A}^+$, которая находится ниже всех кривых l_λ^+ . Ограниченная этой кривой область G_{λ_A} будет наибольшей из областей G_λ , полученных при $\tilde{\lambda} \in (\tilde{\lambda}_3; \tilde{\lambda}_4]$. Это связано с тем, что кривые l_λ^+ не пересекаются и $G_\lambda \subset G_{\lambda_A}$. Границы l_λ^+ областей G_λ пересекаются для параметра $\tilde{\lambda}$ из интервала $[\tilde{\lambda}_A; \tilde{\lambda}_4]$. В этом случае из областей G_λ формируется область $G_{\omega_1} = \cup G_\lambda$, в любой точке которой

выполнено условие (24). Область G_{ω_1} ограничена единственной кривой L_{ω_1} - огибающая семейства пересекающихся кривых l_{λ}^+ . При условии $Z(\tilde{\lambda}) < 0$ уравнение (35) описывает эту огибающую. В плоскости переменных $\tilde{\Omega}, \tilde{\omega}_2$ ее график расположен во второй четверти в интервале $(-\infty; \tilde{\Omega}_4)$ изменения величины $\tilde{\Omega}$ и имеет асимптоты: наклонную (37) и вертикальную $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_4$. Точки $(\tilde{\Omega}; \tilde{\omega}_2) \in L_{\omega_1}$ условию (24) не удовлетворяют и не принадлежат области G_{ω_1} .

Произвольному значению $\varepsilon \in (0; 1)$ соответствует в $E_{\omega_1}^+$ конечный интервал $(\tilde{\Omega}_3; \tilde{\Omega}_4)$, для точек которого выполнены совместно условия (2), (3). Так как $(\tilde{\Omega}_3; \tilde{\Omega}_4) \subset (-\infty; \tilde{\Omega}_4)$, то в области G_{ω_1} между прямой $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_3$ и огибающей L_{ω_1} расположено множество $G_{\omega_1}^+$. Любому устойчивому вращению жидкости $\tilde{\Omega} \in E_{\omega_1}^+$ соответствует в $G_{\omega_1}^+$ промежуток $(\tilde{\omega}_{2\Omega}^0; \infty)$ угловых скоростей второго гироскопа, вращения которого устойчивы из-за выполнения условия (24). Нижняя грань промежутка, являющаяся критической угловой скоростью этого тела, принимает наименьшее значение $\tilde{\omega}_{2\Omega}^0 = \tilde{\omega}_2(\tilde{\lambda}_K)$ в точке K с координатой $\tilde{\Omega} = (1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})\tilde{\lambda}_K/\varepsilon$, где $\tilde{\lambda}_K$ определяется из решения уравнения $(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})^2 \tilde{Q}_3 = \varepsilon \Phi'(\tilde{\lambda})$. Область $G^+ = \cup G_{\omega_1}^+$ содержит все точки $(\tilde{\omega}_1; \tilde{\Omega}; \tilde{\omega}_2)$ значений угловых скоростей гироскопов и вихря жидкости, при которых система достаточных условий (2) - (4) совместна относительно параметров $\tilde{\lambda}$ и $\varepsilon \in (0; 1)$.

Итак, в результате анализа достаточных условий устойчивости (2) - (4) равномерных вращений вокруг вертикальной оси рассматриваемой механической системы, у которой центры масс гироскопов находятся выше их точек подвеса, выделены области G^-, G, G^+ выполнения этой системы неравенств и для любой точки в этих областях движение механической системы является устойчивым на основании теоремы [2] об устойчивости по части переменных.

1. *Игнатъев А.О.* К достаточным условиям устойчивости осесимметричного волчка с жидким заполнением // Механика твердого тела. - 1977. - Вып. 9 - С. 82 - 86.
2. *Коваль В.И.* О влиянии жидкого заполнения на устойчивость равномерных вращений двух гироскопов Лагранжа // Механика твердого тела. - 1995. - Вып. 27. - С. 67 - 75.
3. *Коваль В.И., Ручкин К.А.* Области выполнения достаточных условий устойчивости равномерных вращений подвешенного на струне тела с жидкостью // Там же. - 1997. - Вып. 29. - С. 85 - 91.
4. *Коваль В.И., Мосияш Т.А., Ручкин К.А.* Анализ областей устойчивости равномерных вращений некоторых механических систем // Там же. - С. 91 - 99.
5. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость - М.: Наука, 1967. - 439 с.
6. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыгин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твердых тел - Киев: Наук. думка, 1991, - 168 с.
7. *Четаев Н.Г.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа // Прикл. математика и механика. - 1954. - 18, вып. 1. - С. 123 - 124.
8. *Koval V.I.* Investigation of stability of stationary motion of two Lagrange's gyroscopes with vortex filling // Proceedings of the XXII Yugoslav Congress of theoretical and applied mechanics. - 1997. - Vol. A. - P. 99 - 102.

Донбас. гос. акад. строит. и архит., Макеевка

Получено 07.12.99