УДК 531.38

©2000. **Н.Н. Лосева, В.Е. Пузырев**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ СИСТЕМЫ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, ОБРАЗУЮЩИХ ПОЛУЗАМКНУТУЮ ЦЕПЬ

Ранее были получены уравнения, описывающие движение системы двух гироскопов Лагранжа, связанных упругим универсальным шарниром и образующих полузамкнутую цепь. В настоящей работе получены условия существования у данной системы движений, при которых тела совершают регулярную прецессию, и их (движений) устойчивости.

В работе [1] получены уравнения движения системы двух гироскопов Лагранжа, связанных упругим универсальным шарниром и образующих полузамкнутую цепь. Эти уравнения имеют вид:

$$A(\ddot\psi\sin\theta+2\dot\psi\dot\theta\cos\theta)\sin\theta+C(\ddot\psi\cos\theta-2\dot\psi\dot\theta\sin\theta)\cos\theta+C_1(\ddot\varphi_1\cos\theta-\dot\theta\dot\varphi_1\sin\theta)+$$
$$+C_2(\ddot\varphi_2\cos\theta-\dot\theta\dot\varphi_2\sin\theta)=0, \tag{1}$$

$$A(\ddot\psi\sin\theta+2\dot\psi\dot\theta\cos\theta)\cos\varphi_1-C_1[\dot\theta\dot\varphi_1+\dot\theta\dot\psi\cos\theta-(\ddot\varphi_1+\ddot\psi\cos\theta-$$
$$-\dot\psi\dot\theta\sin\theta)tg\theta]\cos\varphi_1-C_2[\dot\theta\dot\varphi_2+\dot\theta\dot\psi\cos\theta+(\ddot\varphi_2+$$
$$+\ddot\psi\cos\theta-\dot\psi\dot\theta\sin\theta)tg\theta]\cos\varphi_1-A(\ddot\theta-\dot\psi^2\cos\theta\sin\theta)\sin\varphi_1-$$
$$-2hc_2m_2(2\ddot\theta\sin^2\theta+\dot\theta^2\sin2\theta)\sin\varphi_1-C_1(\dot\psi\dot\varphi_1\sin\theta+\dot\psi^2\cos\theta\sin\theta)\sin\varphi_1-$$
$$-C_2(\dot\psi\dot\varphi_2\sin\theta+\dot\psi^2\cos\theta\sin\theta)\sin\varphi_1+(\mu g\sin\theta-2\kappa^2\sin2\theta)\sin\varphi_1=0, \tag{2}$$

$$A(\ddot\psi\sin\theta+2\dot\psi\dot\theta\cos\theta)\cos2\theta\sin\varphi_2+C_1[-\cos2\theta(\dot\theta\dot\varphi_1+\dot\theta\dot\psi\cos\theta)+$$
$$+(tg\theta\cos2\theta-2\sin2\theta)(\ddot\varphi_1+\ddot\psi\cos\theta-\dot\psi\dot\theta\sin\theta)]\sin\varphi_2-C_2[tg\cos2\theta(\ddot\varphi_2+$$
$$+\ddot\psi\cos\theta-\dot\psi\dot\theta\sin\theta)+\cos2\theta(\dot\theta\dot\varphi_2+\dot\theta\dot\psi\cos\theta)]\sin\varphi_2+A(\ddot\theta-\dot\psi^2\cos\theta\sin\theta)\cos\varphi_2+$$
$$+2hc_2m_2(2\ddot\theta\sin^2\theta+\dot\theta^2\sin2\theta)\cos\varphi_2+C_1(\dot\psi\dot\varphi_1\sin\theta+\dot\psi^2\cos\theta\sin\theta)\cos\varphi_2+$$
$$+C_2(\dot\psi\dot\varphi_2\sin\theta+\dot\psi^2\cos\theta\sin\theta)\cos\varphi_2-(\mu g\sin\theta-2\kappa^2\sin2\theta)\cos\varphi_2=0, \tag{3}$$

$$\cos2\theta\cos\varphi_1\sin\varphi_2=\sin\varphi_1\cos\varphi_2. \tag{4}$$

Здесь $A=A_1+A_2+m_2h^2-2m_2hc_2$, $C=C_1+C_2$, $\mu=m_1c_1+m_2c_2+m_2h$, A_i, C_i – соответственно экваториальный и осевой моменты инерции, m_i – масса, c_i – расстояние от точки O_i до центра масс тела $S_i (i=1,2)$. Точка O_1 тела S_1 неподвижна, O_2 – точка соединения тел S_1 и S_2, точка O_3 тела S_2 может перемещаться по вертикальной оси, проходящей через O_1, при этом $O_1O_2=O_2O_3=h$, k – коэффициент жесткости шарнира. Переменные φ_i, ψ_i, θ_i суть углы Эйлера, характеризующие положение системы координат, связанной с телом S_i, относительно неподвижной системы ($\psi_1=\psi_2=\psi$, $\theta_1=-\theta_2=\theta$). Определим условия, при которых у изучаемой системы существует прецессионное движение вида

$$\dot\psi=\Omega,\ \dot\varphi_i=\omega_i\ (i=1;2),\ \theta=\theta_0\neq0 \tag{5}$$

(случай $\theta_0 = 0$ рассматривался в работе [1]).
Подставляя (5) в уравнения (1) - (3), получаем

$$\sigma \sin\theta_0 \sin\varphi_1 = 0, \quad \sigma \sin\theta_0 \cos\varphi_2 = 0, \tag{6}$$

где

$$\sigma = [(A-C)\Omega^2 - 4k]\cos\theta_0 - \omega\ (C_1\omega_1 + C_2\ \omega_2) + \mu\ g$$

(левая часть уравнения (1) обращается в нуль).

Продифференцируем уравнение связи (4) два раза по времени с учетом условий (5). Получим равенство

$$({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2)[\cos 2\theta_0 \cos\varphi_1(t)\sin\varphi_2(t) - \sin\varphi_1(t)\cos\varphi_2(t)]+$$

$$+2\omega_1\omega_2[\cos 2\theta_0 \sin\varphi_1(t)\cos\varphi_2(t) - \cos\varphi_1(t)\sin\varphi_2(t)] = 0,$$

которое, ввиду (4), принимает вид

$$2\omega_1\omega_2(\cos^2 2\theta_0 - 1)\cos\varphi_1(t)\sin\varphi_2(t) = 0$$

и является необходимым условием существования у системы уравнений (1) - (4) решения, определяемого равенствами (5). Учитывая, что $\sin 2\theta_0 \neq 0$, получаем следующие возможные случаи:

1) $\omega_1 = 0,\ \omega_2 \neq 0$. Тогда второе из равенств (6) выполняется только при условии $\sigma = 0$. Левая и правая части равенства (4) содержат при этом соответственно $\sin\varphi_2(t)$ и $\cos\varphi_2(t)$ с постоянными множителями. Поэтому (4) будет выполняться только тогда, когда эти множители равны нулю, то есть $\cos 2\theta_0\ \ \cos\varphi_1 = 0,\ \sin\varphi_1 = 0$, откуда получаем $\varphi_1 = 0,\ \theta_0 = \pi/4$. Таким образом, получаем следующее решение

$$\psi = \omega t, \theta = \frac{\pi}{4}, \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_2^0, \dot{\psi} = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{\varphi_1} = 0,\ \dot{\varphi_2} = \omega_2, \tag{7}$$

которое описывает движение, в котором первое тело совершает регулярную прецессию, а второе - равномерное вращение вокруг вертикали.

2) Проводя аналогичные рассуждения в случае $\omega_1 \neq 0,\ \omega_2 = 0$, приходим к наличию у исследуемой системы решения

$$\psi = \omega t, \theta = \frac{\pi}{4}, \varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_1^0,\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \dot{\psi} = \omega, \dot{\theta} = 0, \dot{\varphi_1} = \omega_1,\ \dot{\varphi_2} = 0. \tag{8}$$

В соответствующем движении первое тело совершает равномерные вращения, а второе - регулярную прецессию вокруг вертикали.

Напомним, что решения (7) и (8) существуют только при выполнении равенства $\sigma = 0$, которое можно рассматривать как условие для определения величины скорости прецессии по заданным характеристикам системы и угловой скорости вращения тел вокруг вертикали.

3) Если же $\omega_1 = \omega_2 = 0$, то система допускает равномерные вращения тел вокруг вертикали, при этом ось динамической симметрии первого тела может составлять с вертикалью произвольный угол θ_0 $(0 < \theta_0 < \pi/2)$, который определяется из равенства (4), величина же скорости вращения системы определяется из равенства $\sigma = 0$ и зависит от величины угла θ_0.

Отметим также, что в случае 3) возможно равномерное вращение с произвольной угловой скоростью ($\sigma \neq 0$), но только при условии $\theta_0 = \pi/4,\ \varphi_1^0 = 0,\ \varphi_2^0 = \pi/2$.

Рассмотрим вопрос об устойчивости по Ляпунову решения (8) (условия устойчивости решения (7) получены в работе [2]). Полагая с этой целью в нелинейных уравнениях (1) - (3)

$$\dot\psi = \omega + u, \quad \varphi_1 = \sqrt{2}\Omega t + \frac{\sqrt{2}}{2}v_1, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}v_2, \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{w}{2},$$

запишем уравнения в вариациях:

$$(A+C)\dot u + C_1\ddot v_1 + C_2\ddot v_2 + [(A-C)\omega - C_1\Omega]\dot w = 0,\ 2\dot u + 2\ddot v_1 - \omega\dot w = 0,$$

$$-\sin\sqrt{2}\omega t\ \{A_\star\ddot w + 2[\omega(-A+C) + C_1\Omega]u + \omega(C_1\dot v_1 + C_2\dot v_2) + \tag{9}$$

$$+(\Omega\omega C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mu g)w\} + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}\omega t\{((A+C_1-C_2)\dot u + C_1\ddot v_1 - C_2\ddot v_2 + [(A-C_1)\omega - C_1\Omega]\dot w) = 0.$$

Здесь $A_\star = A + 2m_2hc_2$.

Выражая из первых двух уравнений (9) переменные $\dot u$ и $\ddot v_1$:

$$\dot u = \frac{1}{A+C_2}\{-C_2\ddot v_2 + [\frac{\omega}{2}(-2A + C_2 + C) + \Omega C_1]\dot w\},$$

$$\ddot v_1 = \frac{1}{A+C_2}\{C_2\ddot v_2 + [\frac{\omega}{2}(3A - C) - \Omega C_1]\dot w\},$$

получим

$$u = \frac{1}{A+C_2}\{-C_2\dot v_2 + [\frac{\omega}{2}(-2A + C_2 + C) + \Omega C_1]w\} + c_1,$$

$$\dot v_1 = \frac{1}{A+C_2}\{C_2\dot v_2 + [\frac{\omega}{2}(3A - C) - \Omega C_1]w\} + c_2,$$

$c_1,\ c_2$ — постоянные интегрирования. Подставляя полученные выражения для $u,\ \dot v_1$, в третье уравнение системы (9), имеем

$$\sin\sqrt{2}\Omega t\{A_\star\ddot w + \frac{C_2}{A+C_2}[\omega(3A-C) - \Omega C_1]\dot v_2 + \frac{1}{A+C_1}[\frac{\omega^2}{2}(4A^2 - 3AC - 5AC_2 + C^2 +$$

$$+3C_2C) + \Omega\omega C_1(-3A + 2C + 3C_2) + 2\omega^2 C_1^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mu g(A+C_2)]w\} + \cos\sqrt{2}\Omega t\frac{\sqrt{2}C_2}{A+C_2}\{2A\ddot v_2 -$$

$$-[\omega(3A-C) - 2\Omega C_1]\dot w\} + \sin\sqrt{2}\omega t\ \{2c_1[\omega(-A+C) + C_1\Omega] + c_2\omega C_1\} = 0.$$

Уравнение связи (4) принимает вид

$$\sin w\ \cos(\sqrt{2}\Omega t + \frac{\sqrt{2}}{2}\ v_1)\ \cos\frac{\sqrt{2}}{2}v_2\ = -\ \sin\frac{(\sqrt{2}\Omega t + \sqrt{2})}{2}\ v_1\ \sin\frac{\sqrt{2}}{2}v_2,$$

а в первом приближении

$$w\cos\sqrt{2}\Omega t\ = -\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ v_2\ \sin\sqrt{2}\Omega t. \tag{10}$$

Как следует из последнего равенства, переменная v_2 обращается в нуль при значениях $t_n = \frac{\sqrt{2}\pi}{4\Omega}(1+2n)$ $(n \in Z)$ и имеет при этом в окрестности точки $t = t_n$ порядок малости не менее $\cos\sqrt{2}\Omega t$. Аналогично, переменная w обращается в нуль при значениях $t_k = \frac{\sqrt{2}\pi}{2\Omega}k$ $(k \in Z)$, имея при этом в окрестности точки $t = t_k$ порядок малости не менее $\sin\sqrt{2}\Omega t$.

Поэтому с целью удовлетворить равенство (10) сделаем замену

$$v_2 = -x\cos\sqrt{2}\Omega t, \quad w = \sqrt{2}x\sin\sqrt{2}\Omega t.$$

Вводя, кроме того, безразмерное время $\tau = \sqrt{2}\Omega t$, получаем одно уравнение второго порядка с периодическими по τ коэффициентами

$$(\tilde{\alpha}_1\sin^2\tau + \tilde{\beta}_1\cos^2\tau)x'' + 2(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1)\sin\tau\cos\tau x' +$$

$$+[\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\beta}_2\cos^2\tau - (\tilde{\alpha}_1\sin^2\tau + \tilde{\beta}_1\cos^2\tau)]x = 0,$$

где

$$\tilde{\alpha}_1 = 4AC_2,\ \tilde{\beta}_1 = A_\star(A + C_2),\ \tilde{\alpha}_2 = -C_2(3A - C)\gamma + C_1C_2,\ \tilde{\beta}_2 = [A^2 - A(3C + 5C_2) +$$

$$+C^2 + 3C_2C]\gamma^2 + C_1(-3A + 2C + 3C_2)\gamma + \frac{1}{2}C_1^2 - \frac{\sqrt{2}g}{2\Omega^2}\mu(A + C_2),\ \gamma = \frac{\omega}{2\Omega}, \tag{11}$$

штрихом обозначено дифференцирование по τ. Делая замену

$$y = \sqrt{\tilde{\alpha}_1\sin^2\tau + \tilde{\beta}_1\cos^2\tau}\ x,$$

окончательно приходим к уравнению Хилла

$$y'' + p(\tau)y = 0, \tag{12}$$

где

$$p(\tau) = -1 + \frac{\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\beta}_2\cos^2\tau}{\tilde{\alpha}_1\sin^2\tau + \tilde{\beta}_1\cos^2\tau} - \frac{(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1)^2\sin^2\tau\cos^2\tau}{(\tilde{\alpha}_1\sin^2\tau + \tilde{\beta}_1\cos^2\tau)^2} +$$

$$+\frac{(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1)(\tilde{\beta}_1\ \cos^2\tau - \tilde{\alpha}_1\ \sin^2\tau)}{(\tilde{\alpha}_1\ \sin^2\tau + \tilde{\beta}_1\ \cos^2\tau)^2}. \tag{13}$$

Введем безразмерные параметры по формулам

$$\frac{A}{C} = a,\quad \frac{A_\star}{C} = a_0,\quad \frac{C_2}{C} = b,\quad \frac{k}{C\omega^2} = \kappa, \tag{14}$$

тогда $C_1/C = 1 - b$, а из равенства $\sigma = 0$ можно выразить

$$\frac{\sqrt{2}\mu g}{4C\omega^2} = (1-a)\gamma^2 + (1-b)\gamma + \kappa.$$

Положим также

$$\alpha_1 = 4ab,\ \beta_1 = a_1(a + b),\ \alpha_2 = 2b[-(3a - 1)\gamma + 1 - b],$$

$$\beta_2 = [5a^2 - 4a(b+1) + 1 + 2b]\gamma^2 - 2(1-b)(2a-b-1)\gamma + (1-b)^2 - (a+b)\kappa.$$

Тогда, как нетрудно видеть, функцию $p(\tau)$ можно записать, формально опуская знак " $\sim$ " в равенстве (13), что и предполагаем в дальнейшем выполненным.

Как следует из проведенных выше преобразований (линейных невырожденных), величины u, v_1, v_2, w есть линейные функции от y, y' с периодическими по τ коэффициентами, поэтому устойчивость или неустойчивость тривиального решения уравнения (12) влечет за собой, соответственно, устойчивость или неустойчивость нулевого решения системы (9).

Для нахождения условий устойчивости воспользуемся теоремами, приведенными в [3]:

Теорема 1. Пусть для некоторого натурального n выполнено

$$T\int_0^T [p(t) - \frac{n^2\pi^2}{T^2}]dt > n\pi^2, \quad p(t) \leq\neq \frac{n^2\pi^2}{T^2}.$$

Тогда тривиальное решение уравнения (12) устойчиво.

Теорема 2. Пусть для некоторого натурального n выполнено

$$T\int_0^T [p(t) - \frac{n^2\pi^2}{T^2}]dt < 2\pi n(n+1)tg\,\frac{\pi}{2(n+1)}, \quad p(t) \geq\neq \frac{n^2\pi^2}{T^2}.$$

Тогда тривиальное решение уравнения (12) устойчиво.

Среднее значение функции $p(\tau)$ за период $T = \pi$ имеет вид

$$\widehat{p} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(\tau)d\tau = \frac{\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1}(1 - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}) + \frac{2\alpha_2 - \alpha_1 - \beta_1}{2\sqrt{\alpha_1\beta_1}}.$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $p(\tau)$ на интервале $[0;\pi]$. Сделав замену $z = (\alpha_1 \sin\tau^2 + \beta_1 \cos\tau^2)^{-1}$, получим

$$p(\tau) = f(z) = -\alpha_1\beta_1 z^2 + \frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2(\alpha_1 - \beta_1)}{\alpha_1 - \beta_1}z - \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}, \ z \in [z_1, z_2],$$

где $z_1 = \min(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\beta_1})$, $z_2 = \max(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\beta_1})$. Функция $f(z)$ является квадратичной и имеет точку максимума z_0, так как $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0$, и не имеет точек минимума. Предположим вначале, что $z_0 \overline{\in} [z_1, z_2]$. Это возможно лишь при условии, что $f'(z)$ принимает на концах интервала значения одного знака. Учитывая, что

$$f'(\frac{1}{\alpha_1}) = \alpha_2 - 2\beta_1 + \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}, \quad f'(\frac{1}{\beta_1}) = \alpha_2 - 2\alpha_1 + \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1},$$

получаем

$$\frac{(\alpha_1 - \beta_1)(2\beta_1 - \alpha_2) - \alpha_1\beta_2}{(\alpha_1 - \beta_1)(2\alpha_1 - \alpha_2) - \alpha_1\beta_2} > 0. \tag{15}$$

Переписывая последнюю дробь в виде

$$\frac{2\ \beta_1\ (\alpha_1 - \beta_1) - \alpha_2\ (\alpha_1 - \beta_1) - \alpha_1\beta_2}{\alpha_1\ (\alpha_1 - \beta_1) - \alpha_2\ (\alpha_1 - \beta_1) - \alpha_1\beta_2},$$

легко видеть, что ее числитель не превосходит знаменателя, поскольку $2\alpha_1(\alpha_1-\beta_1) > 2\beta_1(\alpha_1-\beta_1)$ для любых значений α_1 и β_1. Следовательно, положительность числителя записанной выше дроби влечет за собой положительность знаменателя, то есть выполнение неравенства (15). Аналогично, отрицательность знаменателя влечет за собой отрицательность числителя и выполнение неравенства (15). Таким образом, функция $f(z)$ не имеет точек экстремума на $[z_1, z_2]$ при условии

$$(\alpha_1-\beta_1)(2\beta_1-\alpha_2)-\alpha_1\beta_2 > 0 \tag{16}$$

или

$$(\alpha_1-\beta_1)(2\alpha_1-\alpha_2)-\alpha_1\beta_2 < 0. \tag{17}$$

В этом случае наибольшее и наименьшее значения функция f принимает на концах интервала изменения z. Покажем, что если выполняется условие (16), то $f(1/\alpha_1) > f(1/\beta_1)$. В самом деле, поскольку

$$f(1/\alpha_1)=\frac{\alpha_2-\beta_1}{\alpha_1}, \qquad f(1/\beta_1)=\frac{\alpha_2+\beta_2-\alpha_1}{\beta_1},$$

то неравенство (17) можно переписать в виде: $\alpha_2\beta_1 > \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2-\alpha_1^2$, или $\alpha_1\beta_2 < (\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1+\beta_1-\alpha_2)$. Тогда из неравенства (16) получаем

$$\alpha_1\beta_2 > (\alpha_1-\beta_1)(2\beta_1-\alpha_2) > (\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1+\beta_1-\alpha_2).$$

Последнее неравенство справедливо как в случае $\alpha_1 > \beta_1$ (тогда выражение в первой скобке положительно, а выражение во второй скобке заменяется на меньшее), так и в случае $\alpha_1 < \beta_1$ (тогда выражение в первой скобке отрицательно, а выражение во второй скобке заменяется на большее).

Аналогично можно показать, что выполнение условия (17) влечет за собой выполнение неравенства $f(1/\alpha_1) < f(1/\beta_1)$.

С учетом формул (11) и (14) неравенства (16), (17) принимают вид:

$$\begin{gathered}2ab(a+b)\kappa-2ab(5a^2-4ab-4a+2b+1)\gamma^2-[a_0(a+b)(3a-1)-4ab(a+b)-\\ -4a(2a-b-1)]b\gamma-a_0^2(a+b)^2+a_0b(a+b)(4a+b+1)-2ab(1-b^2)>0,\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}2a(a+b)\kappa-ab(5a^2-4ab-4a+2b+1)\gamma^2-[a_0(a+b)(3a-1)-4ab(a+b)-\\ -4a(2a-b-1)]b\gamma-b[a_0(a+b)(4a+b-1)-2a(8ab+b^2-1)]<0.\end{gathered} \tag{19}$$

На множестве значений параметров, удовлетворяющих неравенству (18), достаточные условия устойчивости тривиального решения уравнения (12), получаемые согласно теореме 1, принимают вид

$$-\frac{2b(3a-1)\gamma+a_0(a+b)-2b(1-b)}{4ab} \le n^2, \quad \widehat{p} \ge n^2-n, \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered}\widehat{p}=\frac{1}{4R_1R_2[a_0(a+b)-4ab]}\{4R_2(R_1-2R_2)(5a^2-4ab-4a+2b+1)\gamma^2+\\ +4\{2R_2(R_1-2R_2)(2ab-b^2-2a+1)-b(3a-1)[a_0(a+b)-4ab]\}\gamma-\end{gathered}$$

$$-4R_2(R_1-2R_2)\kappa+4R_2(R_1-2R_2)(1-b)^2-a_0^2(a+b)^2-$$
$$+4a_0b(a+b)(1-b)+16ab^2(a+b-1)\}. \tag{21}$$

Здесь

$$R_1=\sqrt{a_0(a+b)},\ R_2=\sqrt{ab}.$$

Если для параметров a, b, γ, k выполняется неравенство (19), то условия устойчивости имеют вид

$$\frac{1}{a_0(a+b)}[-(a+b)\kappa+(5a^2-4ab-4a+2b+1)\gamma^2-$$
$$2(ab+b^2+2a-b-1)\gamma-4ab-b^2+1]\le n^2,\quad \widehat{p}\ge n^2-n \tag{22}$$

($n-$ произвольное целое неотрицательное число).

Пусть теперь $z_0\in[z_1,z_2]$. Тогда

$$2ab(a+b)\kappa-2ab(5a^2-4ab-4a+2b+1)\gamma^2-$$
$$-[a_0(a+b)(3a-1)-4ab(a+b)-4a(2a-b-1)]b\gamma-a_0^2(a+b)^2+$$
$$+a_0b(a+b)(4a-3b+1)-2ab(1-b^2)\le 0,$$
$$2a(a+b)\kappa-4ab(5a^2-4ab-4a+2b+1)\gamma^2-$$
$$-[a_0(a+b)(3a-1)-4ab(a+b)-4a(2a-b-1)]\gamma-$$
$$-2b[a_0(a+b)(4a+b-1)-2a(8ab+b^2-1)]\ge 0, \tag{23}$$

при этом свое наибольшее значение функция f принимает в точке z_0, а наименьшее - на одном из концов интервала. Условия устойчивости принимают вид

$$f(z_0)\le n^2,\quad \widehat{p}\ge n^2-n, \tag{24}$$

где

$$f(z_0)=\{4a^2b[5a^2-4ab-4a+2b+1]^2\gamma^4+$$
$$+4ab(3a-1)(a+b)[a(5a-4b)-2(2a+b)+1]\gamma^3+$$
$$+\{a_0^2(a+b)^2[a^2(20a-7b)-2a(8a-b)+4a+b]-$$
$$-4a_0ab(a+b)[5a(4a^2-3ab+2b^2)+a^2-4b^2-10a+3b+3]+$$
$$+8a^2b[b^2(-3a^2+8ab+2b^2)+2b(4a^2+4ab-3b^2)+13a^2-16ab-3b^2-$$
$$-12a+6b+3]-8a^2b(a+b)[a(5a-4b)-4a+2b+1]\kappa\}\gamma^2+$$
$$+2\{a_0^2(a+b)^2[ab(8a-b)-8a^2-3ab-b^2+4a+b]-$$
$$-2ab(a+b)[(a+b)(3a-1)\kappa+b(16a^2-3ab+2b^2)]+$$
$$+8a^2b(a+b)[b(a+b)+2a-b-1]\kappa+$$
$$+8a^2b[b^3(a+b)+b^2(2a-b)-b(a+2b)-2a+b+1]\}\gamma+$$
$$+a_0^2(a+b)^2[-4a(a+b)\kappa+(1-b)^2(4a+b)]+$$
$$+4a_0ab(a+b)[(a+b)(4a-b+1)\kappa-b^2(4a+b)+b(8a+b)4a+b-1]+$$
$$+4a^2b[(a+b)\kappa+b^2-1]^2\}/\{4a_0a(a+b)[a_0(a+b)-4ab]^2\}.$$

Что касается теоремы 2, то она дает следующие условия устойчивости:

$$-\frac{2b(3a-1)\gamma + a_0(a+b) - 2b(1-b)}{4ab} \le n^2, \quad \widehat{p} \ge [n^2 + 2\pi n(n+1)tg\frac{\pi}{2(n+1)}],$$

$$\frac{1}{a_0(a+b)}[-(a+b)\kappa + (5a^2 - 4ab - 4a + 2b + 1)\gamma^2 -$$

$$-2(ab + b^2 + 2a - b - 1)\gamma - 4ab - b^2 + 1] \le n^2. \qquad (25)$$

Таким образом, достаточные условия устойчивости тривиального решения уравнения (12) представляют собой объединение четырех групп условий, определяемых, соответственно, неравенствами: а) (18), (20); б) (19), (22); в) (23), (24); г) (25).

Замечание. Поскольку система (9) была сведена к линейному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка, то найденные условия обеспечивают устойчивость нулевого решения этой системы при дополнительном условии – отсутствии $\pi-$ периодического решения у уравнения (12) (нерезонансный случай). В противном (резонансном) случае найденные условия гарантируют лишь отсутствие характеристических показателей с положительными вещественными частями у системы уравнений в вариациях (для исходной нелинейной системы имеет место критический по Ляпунову случай).

1. *Болграбская И.А., Веласко Г.Э.* Регулярная прецессия системы гироскопов Лагранжа, образующих полузамкнутую цепь // Тр. ин-та прикл. матемики и механики. - 1998. - Т.2. - С. 3 - 9.
2. *Веласко Г.Э., Пузырев В.Е.* Об устойчивости движения системы двух гироскопов Лагранжа, образующих полузамкнутую цепь // Там же. - С. 17 - 21.
3. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. - Москва: Наука, 1972. - 720 с.

Донец. гос. ун-т,

Ин-т прикл. математики и механики НАНУ, Донецк

Получено 08.12.99

УДК 531.38

©2000. **Н.А. Николаева**

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ ТЯЖЕЛЫХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, ОБРАЗУЮЩИХ ПОЛУЗАМКНУТУЮ ЦЕПЬ

В настоящей работе рассматривается система трех гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами и образующих полузамкнутую цепь. Исследуются необходимые условия устойчивости равномерных вращений этой системы вокруг вертикали для случая одинаковых тел.

В работе [1] были введены в рассмотрение системы связанных твердых тел, образующих полузамкнутую цепь. Частным случаем таких систем служит система, в которой точка O_1 тела S_1 является неподвижной, а точка O_{n+1} тела S_n во все время движения принадлежит вертикальной прямой O_1Z. Эти системы представляют интерес в связи с возможностью их использования при моделировании упругих стержневых объектов с двумя опорами на концах.