

направлена по ходу двигателя. При $\theta_* < \theta < 10^\circ$, эта сила может быть направлена как по ходу двигателя, так и против него, в зависимости от значений параметров $M, l, \dot{\psi}, \kappa_1, \dots, \kappa_4$.

Приближенные уравнения планетарных движений. Будем представлять планетарные движения волчка, как движения математического маятника, к которому приложены силы F_i^* , определяемые формулами (23) при $P = 0$. При этом F_1^* направлена ортогонально вертикальной плоскости, в которой лежит маятник, а F_2^* лежит в этой плоскости и направлена горизонтально.

Пусть $O\xi\eta\zeta$ — неподвижная система координат, ось $O\zeta$ которой направлена вертикально вверх. Точку O будем считать точкой подвеса маятника. Уравнения колебаний маятника с учетом действия сил F_1^* и F_2^* будут

$$\ddot{\psi} \sin \theta = -2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{F_1^*(\theta)}{ml}, \quad \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{F_2^*(\theta)}{ml} \cos \theta,$$

где θ — угол между отрицательной полуосью $O\zeta$ и маятником; ψ — угол между осью $O\eta$ и проекцией маятника на плоскость $O\xi\eta$; l — длина маятника; m — масса маятника; g — ускорение свободного падения.

Заключение. Формулы (23) позволяют легко оценивать величину сил F_1^* и F_2^* , действующих на волчок со стороны подвеса. Особое значение имеет оценка силы F_1^* , так как именно она влияет на изменение скорости прецессии вала $\dot{\psi}$, а F_2^* только несколько изменяет угол нутации θ . Из формул (23) следует, что при $\theta < \theta_*$ выполняется неравенство $F_1^* < 0$, что будет приводить к росту $\dot{\psi}$. При $\theta > \theta_*$ $F_1^*(\theta)$ может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от параметров системы. Причем, при достаточно больших κ_i и достаточно малом M $F_1^*(\theta) < 0$, что будет приводить к возрастанию $\dot{\psi}$, то есть развитию планетарных движений в направлении вращения двигателя. При достаточно малых κ_i и M достаточно большом $F_1^*(\theta) > 0$. В этом случае возможно развитие планетарных движений, для которых $\dot{\psi} < 0$, то есть в направлении обратном вращению двигателя.

1. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. — М.: Наука, 1991г. — 332с.
2. Малашенко С.В. Некоторые экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тел // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1960. — N 3. — С.205–211.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 20.12.99

УДК 531.38

©2000. П.Е. Рябов

ФАЗОВАЯ ТОПОЛОГИЯ ЗАДАЧИ ЧАПЛЫГИНА О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

В настоящей работе изучены бифуркации первых интегралов в задаче Чаплыгина о движении твердого тела в жидкости под действием силы тяжести.

1. Введение. Рассматривается классическая задача Чаплыгина [10], которая описывает частный случай движения твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости.

При этом жидкость простирается беспредельно по всем направлениям и покоится на бесконечности, граница тела представляет собой односвязную поверхность. Предполагается, что тело и жидкость подвержены действию силы тяжести, причем вес тела и вес вытесненной им жидкости равны. Это движение в безразмерных переменных описывается следующей системой уравнений Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= -s_3s_2 - cr_2r_3 + \delta r_3, & \dot{r}_1 &= s_2r_3 - 2s_3r_2, \\ \dot{s}_2 &= s_3s_1 - cr_1r_3 - \gamma r_3, & \dot{r}_2 &= 2s_3r_1 - s_1r_3, \\ \dot{s}_3 &= 2cr_1r_2 + \gamma r_2 - \delta r_1, & \dot{r}_3 &= s_1r_2 - s_2r_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где c, δ, γ — некоторые произвольные постоянные. Здесь векторы \mathbf{s}, \mathbf{r} называются соответственно импульсивным моментом и импульсивной силой.

Первые интегралы этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} f_1 &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = f && \text{(геометрический интеграл),} \\ f_2 &= s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 = g && \text{(интеграл площадей),} \\ H &= \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2) + \frac{1}{2}(c(r_1^2 - r_2^2) + 2\gamma r_1 + 2\delta r_2) = h && \text{(гамильтониан).} \end{aligned}$$

В случае нулевой постоянной площадей С.А. Чаплыгиным [10] был указан дополнительный интеграл системы (1)

$$F = (s_1^2 - s_2^2 + cr_3^2 - 2\gamma r_1 + 2\delta r_2)^2 + 4(s_1s_2 - \gamma r_2 - \delta r_1)^2 = k.$$

Если $c = 0$, то условие равенства нулю постоянной площадей можно отбросить, и мы приходим к задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае С.В. Ковалевской. Бифуркации первых интегралов этой задачи изучены М.П. Харламовым [8]. Интегрируемым случаям движения тела в жидкости, когда граница тела представляет многосвязную поверхность, посвящены работы П.В. Харламова [5, 6, 7], В.Н. Рубановского [3], Х.М. Яхьи [13]. Из последней работы можно извлечь обобщение интеграла Чаплыгина.

Заметим, что постоянную f геометрического интеграла и константу c можно сделать равными единице, произведя соответствующие линейные замены координат, времени и параметров. Эти замены не влияют на топологический анализ задачи, и мы в дальнейшем для простоты принимаем $f = 1, c = 1$.

Система (1) является гамильтоновой на орбите M^4 , которая задается уравнениями $\{f_1 = 1, f_2 = 0\}$. Дополнительный интеграл F почти всюду независим с H , поэтому система является полностью интегрируемой по Лиувиллю. Согласно теореме Лиувилля–Арнольда [1] неособая компактная совместная поверхность уровня первых интегралов есть объединение торов, заполненных условно-периодическими траекториями. Однако эта теорема ничего не говорит о поведении системы на особых поверхностях уровня первых интегралов. Теорема также умалчивает о расположении и количестве торов, называемых *торами Лиувилля*, внутри трехмерных изоэнергетических поверхностей $Q_h^3 = \{H = 2h\}$ и не дает ответа на вопрос, что происходит с торами Лиувилля при переходе через критические значения первых интегралов.

В настоящей работе изучена топология изоэнергетических поверхностей и построено бифуркационное множество, а также описаны перестройки торов Лиувилля и вычислен инвариант Фоменко для некоторых значений параметров.

2. Топология Q_h^3 . Топологический тип поверхности постоянной энергии $Q_h^3 = \{H = 2h\}$ можно изучать при помощи проекции π на сферу Пуассона $S^2 = \{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1\}$ (см. [4, 9, 12]). В нашем случае при этой проекции поверхность Q_h^3 переходит в область на сфере Пуассона, выделяемую условием $\varphi(r) \leq h$, где $\varphi(r) = \frac{1}{2}\{r_1^2 - r_2^2 + 2\gamma r_1 + 2\delta r_2\}$.

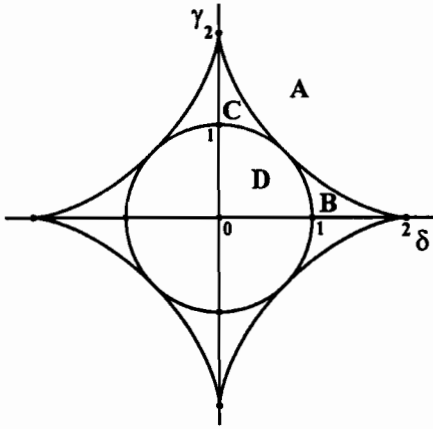
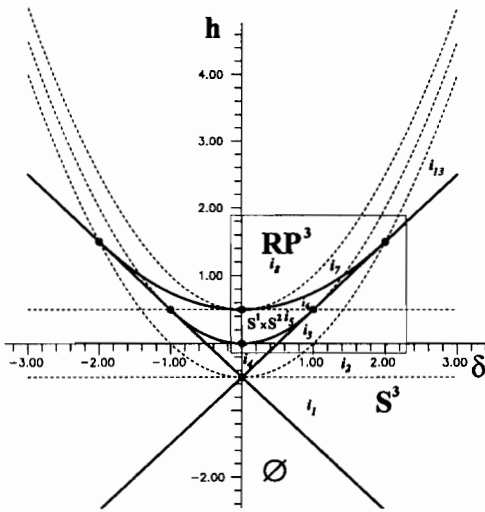
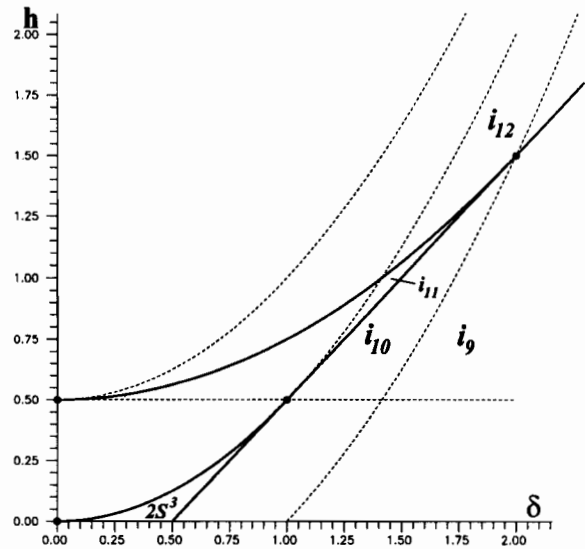


Рис. 1

Функция $\varphi(r)$ является функцией Морса на сфере. Топологию Q_h^3 удобно описывать в зависимости от значений параметров (δ, γ) . На рис. 1 указаны области значений параметров (δ, γ) , в каждой из которой топологический тип Q_h^3 будет одним и тем же: а) для $\delta = \gamma = 0$ имеем \emptyset при $h < -1/2$, $2S^3$ при $-1/2 < h < 0$, $S^1 \times S^2$ при $0 < h < 1/2$, $\mathbb{R}P^3$ при $1/2 < h$; б) для $\delta = 0$ или $\gamma = 0$ имеем S^3 , $2S^3$, $S^1 \times S^2$, $\mathbb{R}P^3$ (на рис. 2 в случае $\gamma = 0$ разделяющие кривые отмечены жирными линиями); в) для $(\delta, \gamma) \in A$ имеем S^3 , $\mathbb{R}P^3$; д) для $(\delta, \gamma) \in B \cup C$ имеем S^3 , $2S^3$, $\mathbb{R}P^3$; е) для $(\delta, \gamma) \in D$ имеем S^3 , $2S^3$, $S^1 \times S^2$, $\mathbb{R}P^3$.



а



б

Рис. 2

Отметим отсутствие в качестве Q_h^3 связной суммы $(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$, которая типична для случая Ковалевской. По-видимому, интегрируемость лишь при нулевой постоянной площади и является препятствием для возникновения такого трехмерного многообразия.

3. Бифуркационное множество и перестройки торов Лиувилля. Бифуркационное множество Σ играет основную роль в классификации топологического типа поверхности уровня первых интегралов. Поскольку эта поверхность компактна, то бифуркационное множество можно найти, изучая особенности системы первых интегралов

f_1, f_2, H и F . Критические точки удобно определять из условия

$$\text{rank } J < 4, \quad (2)$$

где J — матрица Якоби отображения $H \times F \times f_1 \times f_2$.

Условие (2) выполняется тогда и только тогда, когда все Δ_{ijkl} равны нулю, где Δ_{ijkl} — определители, составленные из столбцов матрицы Якоби J с номерами $1 \leq i < j < k < l \leq 6$. Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Бифуркационное множество Σ представляет собой*
а) в случае $\delta = \gamma = 0$ объединение кривых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, где

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \quad k &= 0, \quad h \geq -\frac{1}{2}, \\ \gamma_2 : \quad k &= (2h + 1)^2, \quad h \geq -\frac{1}{2}, \\ \gamma_3 : \quad k &= (2h - 1)^2, \quad h \geq 0. \end{aligned}$$

Топологический анализ этого случая выполнен в [11].

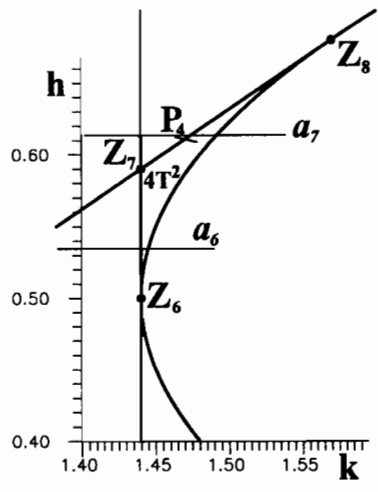
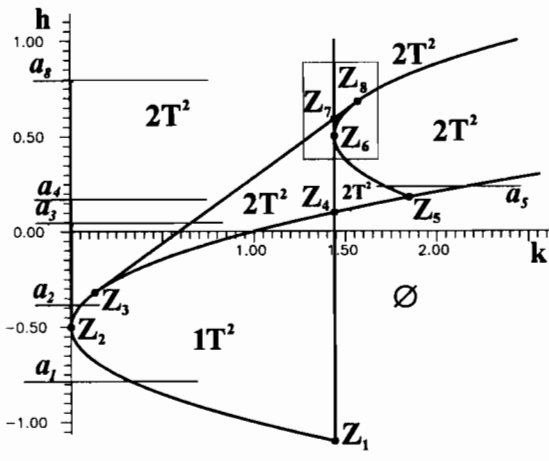
б) в случае $\delta = 0$ объединение кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$, где

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \quad k &= 0, \quad h \geq -\frac{1}{2}, \\ \Gamma_2 : \quad k &= 4\gamma^2, \\ \Gamma_3 : \quad k &= (2h + 1)^2 + 4\gamma^2, \quad h \geq -\frac{1}{2}, \\ \Gamma_4 : \quad k &= (2h - 1)^2, \\ \Gamma_5 : \quad k &= \gamma^2(-\gamma^2 + 2 - 4h). \end{aligned}$$

с) в случае $\gamma = 0$ объединение кривых $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$, где

$$\begin{aligned} \Delta_1 : \quad k &= 0, \quad h \geq -\frac{1}{2}, \\ \Delta_2 : \quad k &= 4\delta^2, \\ \Delta_3 : \quad k &= (2h - 1)^2 + 4\delta^2, \\ \Delta_4 : \quad k &= (2h + 1)^2, \\ \Delta_5 : \quad k &= \delta^2(-\delta^2 + 2 + 4h). \end{aligned}$$

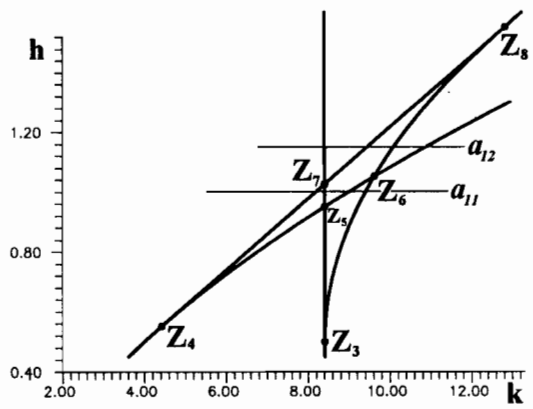
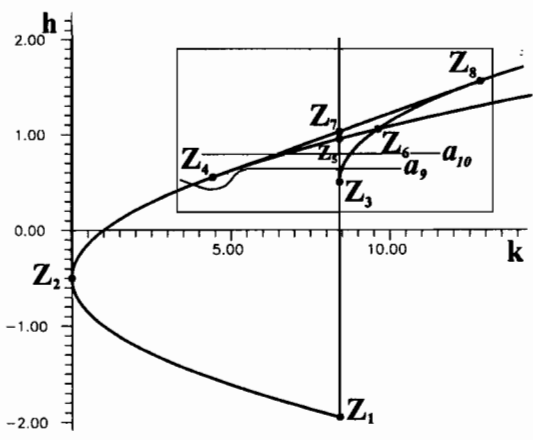
Качественно различные бифуркационные диаграммы изображены на рис. 3, 4, 5.



a

б

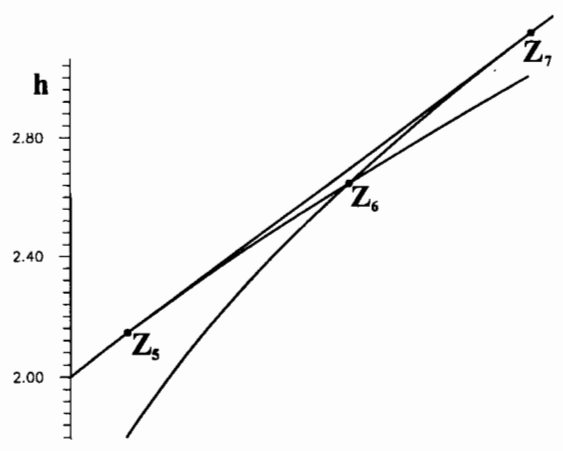
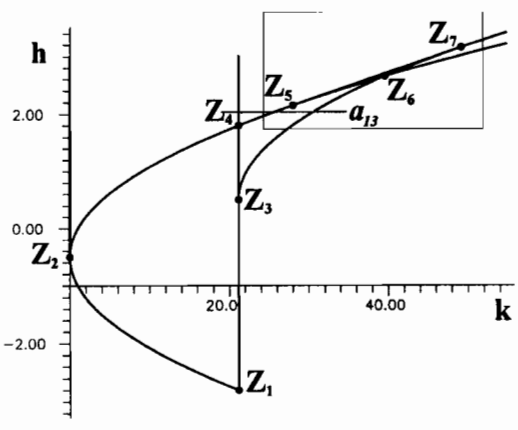
Рис. 3



a

б

Рис. 4



a

б

Рис. 5

d) в случае $\delta^2 + \gamma^2 \neq 0$ объединение кривых $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, где

$$\sigma_1: k = 0, \quad h \geq \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 - \delta^2}{\gamma^2 + \delta^2},$$

$$\sigma_2: k = 4(\delta^2 + \gamma^2), \quad h \geq \min\left\{\frac{1}{2} \cos 2t + \gamma \cos t + \delta \sin t\right\},$$

$$\sigma_3: \begin{cases} h(t) = \gamma \delta \frac{\cos 2t}{\sin 2t} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2}(\delta^2 - \gamma^2), & \text{где} \\ k(t) = \eta_1^2 + 4\eta_2^2, \end{cases}$$

$$\eta_1 = -2\gamma\delta \frac{\cos^2 2t}{\sin 2t} + (\gamma^2 - \delta^2) \cos 2t + 2 \cos 2t(\gamma \cos t + \delta \sin t) - 2\gamma \cos t + 2\delta \sin t,$$

$$\eta_2 = -\gamma\delta \cos 2t + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \delta^2) \sin 2t + \sin 2t(\gamma \cos t + \delta \sin t) - \gamma \sin t - \delta \cos t.$$

Примеры бифуркационных диаграмм приведены на рис. 6, 7.

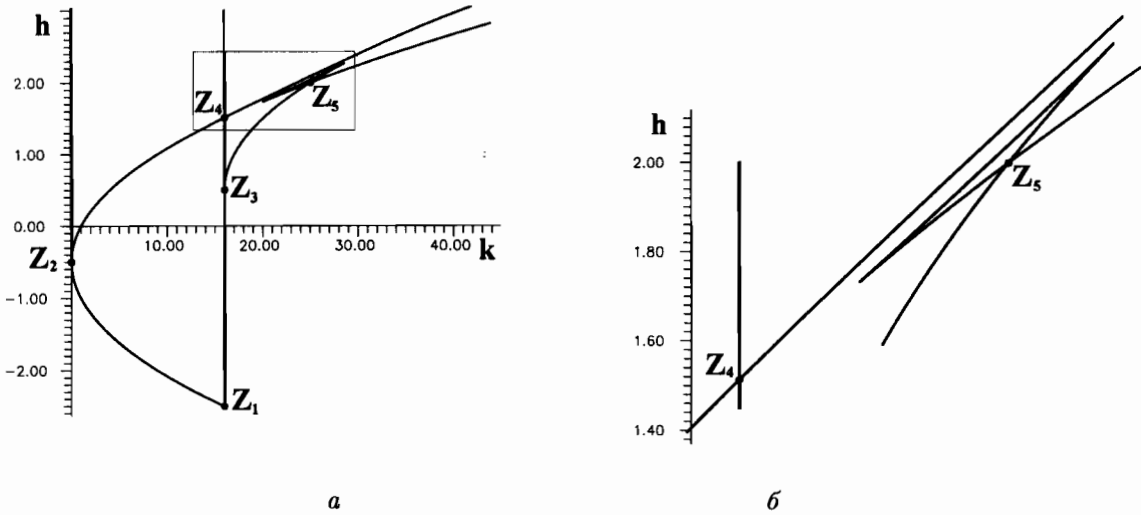


Рис. 6

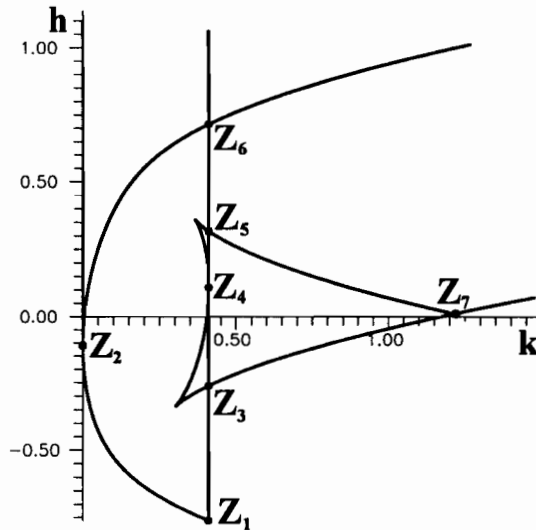


Рис. 7

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Ограничимся лишь основными выкладками для случая $\gamma = 0$. Остальные случаи разбираются аналогично для подходящего сечения.

Пусть

$$s_1 = 0. \quad (3)$$

Тогда система уравнений $\Delta_{ijkl} = 0$ сводится к следующим двум возможностям:

$$s_2 s_3 + r_2 r_3 - \delta r_3 = 0, \quad (4)$$

или

$$r_1 = 0, \quad (5)$$

$$(r_2 s_3 - s_2 r_3) \cdot (s_2^2 - r_3^2 - 2\delta r_2) = 0. \quad (6)$$

В случае (4) соответствующие критические значения суть Δ_2, Δ_3 .

Пусть выполняются равенства (3), (5), (6). Положим

$$\begin{aligned} p &= r_2 s_3 - s_2 r_3, \\ q &= s_2^2 - r_3^2 - 2\delta r_2. \end{aligned}$$

Значения первых интегралов H, F и соотношение (6) в переменных (p, q) принимают следующий вид:

$$2p^2 - q = 2h + 1, \quad (7)$$

$$q^2 = k, \quad (8)$$

$$p \cdot q = 0. \quad (9)$$

В случае $p = 0$ получается парабола Δ_4 , а в случае $q = 0$ — луч Δ_1 .

Что касается отрезка Δ_5 , то достаточно положить $s_3 = r_3 = 0$ в системе уравнений $\Delta_{ijkl} = 0$. В этом случае критическое множество и значения первых интегралов имеют следующий вид:

$$v^2 - 2r_2^2 + 2\delta r_2 = 2h - 1,$$

$$v^4 + 4\delta^2 + 4\delta r_2 v^2 = k,$$

$$v \cdot (v^2 + 2\delta r_2 - \delta^2) = 0,$$

где

$$v = s_1 r_2 - s_2 r_1.$$

В случае $v = 0$ получается луч Δ_2 , а в случае $v^2 + 2\delta r_2 - \delta^2 = 0$ — отрезок Δ_5 .

Как показывает анализ системы уравнений $\Delta_{ijkl} = 0$, никаких других бифуркационных кривых, кроме Δ_i , нет.

Можно показать, что бифуркационные множества Σ во всех случаях представляют собой части поверхностей кратных корней некоторых многочленов четвертой степени, коэффициенты которых зависят от постоянных первых интегралов и параметров задачи. Например, в случае $\gamma = 0$ такими многочленами являются $P_1(p), P_2(t)$, где

$$P_1(p) = (2p^2 - 2h - 1)^2 - k, \quad P_2(t) = \sum_{k=0}^4 a_k t^k,$$

$$a_4 = 1, a_3 = -4\delta^2, a_2 = -2k + 16\delta^2h, a_1 = -4\delta^2k + 16\delta^4, a_0 = (k - 4\delta^2)^2.$$

Действительно, если исключить из системы уравнений (7), (8) переменную q , то получится многочлен $P_1(p)$. В силу соотношения (9) многочлен $P_1(p)$ имеет кратные корни. Далее, условие совместности $P_2(t) = P_2'(t) = 0$ сводится к уравнению

$$(k - 4\delta^2)(4h^2 - 4h + 4\delta^2 - k + 1)(2\delta^2 + 4h\delta^2 - \delta^4 - k) = 0.$$

Поэтому, в частности, кривые $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_5$ представляют собой части поверхности кратных корней многочлена $P_2(t)$.

Многочлен $P_3(t)$ для случая $\delta^2 + \gamma^2 \neq 0$ имеет вид $P_3(t) = \sum_{k=0}^4 a_k t^k$, где
 $a_4 = 16, a_3 = -32 - 64h - 32\gamma^2 + 32\delta^2, a_2 = 64\gamma^2 + 64h\gamma^2 - 8k + 16\delta^4 + 16\gamma^4 + 96h^2 - 32\delta^2 + 24 + 96h + 32\delta^2\gamma^2 - 64\delta^2h, a_1 = -96h^2 - 8 + 8\delta^2 - 32h^2\gamma^2 - 8\delta^2k - 40\gamma^2 + 8k - 64h^3 + 32\delta^2h^2 - 48h - 32\delta^2\gamma^2 + 16hk - 32\gamma^4 - 96\gamma^2h + 32\delta^2h + 8\gamma^2k, a_0 = 32\gamma^2h^2 + 1 - 2k + 32\gamma^2h + 8h + 24h^2 - 8\gamma^2k + k^2 + 16\gamma^4 + 32h^3 + 8\gamma^2 + 16h^4 - 8hk - 8h^2k.$

Для установления количества торов Лиувилля в каждой связной компоненте области $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ можно воспользоваться методами компьютерного моделирования. Ограничимся случаем $\gamma = 0$. Качественно различные виды множеств $\Sigma(\delta)$ (бифуркационные диаграммы) в зависимости от значений параметра δ приведены на рис. 3, 4, 5: $0 < \delta < 1$; $1 < \delta < 2$; $\delta > 2$. На бифуркационной диаграмме проводим всевозможные “регулярные” прямые $h = a_i$ (тем самым фиксируем изоэнергетическую поверхность Q_h). Меняя непрерывно постоянную дополнительного интеграла F вдоль этих прямых, вычисляем графы А.Т.Фоменко. При этом мы используем численные методы решения системы дифференциальных уравнений (1) для построения фазовых траекторий с начальными данными, которые определяются из следующей системы по заданной тройке (δ, k, h) :

$$\begin{cases} s_1 = r_1 = 0, \\ P_1(p) = 0, \\ q = 2p^2 - 2h - 1, \\ (1 - p^2)r_2^2 - 2\delta r_2 + p^2 - q - 1 = 0, \\ r_3^2 = 1 - r_2^2, \\ s_2 = -r_3p, s_3 = r_2p, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} p &= r_2s_3 - s_2r_3, \\ q &= s_2^2 - r_3^2 - 2\delta r_2. \end{aligned}$$

или, если многочлен $P_1(p)$ не имеет действительных корней, из системы:

$$\begin{cases} s_3 = r_3 = 0, \\ P_2(t) = 0, \\ r_2 = \frac{k-t^2-4\delta^2}{4\delta t} \quad \text{или} \quad 2r_2^2 - 2\delta r_2 + 2h - t - 1 = 0, \\ r_1^2 = 1 - r_2^2, \\ v^2 = t, s_2 = -r_1v, s_2 = -r_1v, \end{cases} \quad (11)$$

Фактически мы используем то, что для многочленов $P_1(p), P_2(t)$ бифуркационные кривые являются дискриминантными. Количество корней указанных многочленов (т.е.

количество связных компонент) может измениться лишь при переходе через дискриминантную кривую. Поэтому выбирая точку (δ, k, h) в каждой связной компоненте области $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma(\delta)$ и выпуская интегральную траекторию с начальными данными (10), (11), мы можем определить количество торов в каждой связной компоненте области $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma(\lambda)$. Для этого достаточно посмотреть, сколько областей "заметают" всюду плотно фазовые кривые. В результате получается описание лиувиллева слоения изоэнергетической поверхности Q_h^3 . При этом ребра графа соответствуют однопараметрическим семействам неособых торов Лиувилля, а его вершины (=атомы) описывают перестройки этих торов на особых уровнях интеграла F . Простейшие перестройки (атомы) обозначаются буквами A, B, A^* : буква A характеризует вырождение тора в окружность, буква B — распад одного тора на два (или, наоборот, слияние двух торов в один), буква A^* — сложную перестройку тора в тор. Кроме того, в нашем случае встречаются атомы C_2 и P_4 . Первый из них описывает симметричную перестройку двух торов в два тора, второй — симметричную перестройку двух торов сразу в четыре тора. Атомы C_2 и P_4 изображены на рис. 8.

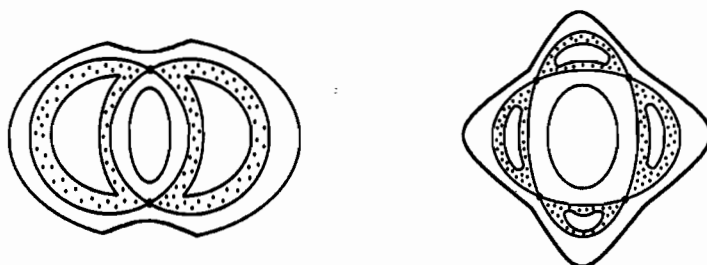


Рис. 8

Можно показать, что на участке бифуркационного множества $k = 4\delta^2, h > \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\delta^2$ реализуются атомы A^* . Во-первых, на этом участке происходят две отдельные перестройки тора в тор. Во-вторых, прообразом луча $k = 4\delta^2, h > \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\delta^2$ является критическое множество $s_1 = s_2 = r_3 = 0$, которое в пространстве (r_1, r_2, s_3) можно представить как пересечение двух поверхностей:

$$\Gamma_{1,2} : \begin{cases} r_1^2 + r_2^2 = 1, \\ s_3^2 - \left(r_2 - \frac{\delta}{2}\right)^2 = a^2, \end{cases}$$

где $a = \sqrt{h - \frac{1}{2} - \frac{\delta^2}{4}}$. Наконец, если провести к одной из этих траекторий трансверсальную гиперплоскость $r_1 = 0$, то ее пересечение с поверхностью $J_{h,4\delta^2} = \{x \in T^*\mathbb{S}^2 : H = 2h, F = 4\delta^2\}$ в окрестности траектории представляет собой "крест". Поскольку перестройка имеет вид $\mathbb{T}^2 \rightarrow V \rightarrow \mathbb{T}^2$, то это возможно лишь при условии $V = A^*$.

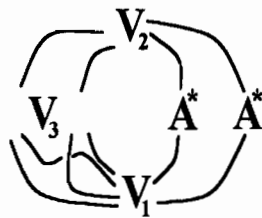


Рис. 9

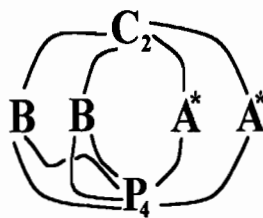


Рис. 10

Можно показать, что при $0 < \delta < 2$ точка Z_7 с координатами $(k, h) = (4\delta^2, \frac{1}{2} + \frac{\delta^2}{4})$ является точкой типа “седло-седло” ноль-ранговой кратности 2 (в прообразе ей соответствуют две невырожденные точки ранга ноль). Бифуркационная диаграмма в окрестности этой точки топологически устроена как два трансверсально пересекающихся интервала. Круговая молекула имеет вид, указанный на рис. 9. Все круговые молекулы, соответствующие точкам типа “седло-седло” сложности 2, описаны в [2]. Полный список содержит 39 молекул. В списке есть ровно 2 молекулы указанного вида, когда пара (V_1, V_2) — это (P_4, C_2) или (L_1, D_2) . В любом случае в качестве V_3 выступает перестройка типа $2B$.

Для того чтобы отличить атомы C_2 и D_2 , воспользуемся таким важным свойством атомов, как симметрия. Известно, что атом D_2 не обладает симметриями, переставляющими особые одномерные орбиты, в то время как группа симметрий атома C_2 есть $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [2]¹.

Таблица

h	Q_h^3	$W(Q_h^3)$
a_1	\mathbb{S}^3	$A \text{ — } A$
a_2	\mathbb{S}^3	$A \begin{matrix} > \\ > \end{matrix} B \text{ — } A$
a_3	\mathbb{S}^3	$A \begin{matrix} > \\ > \end{matrix} C_2 \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} A$
a_4	$2\mathbb{S}^3$	$A \begin{matrix} > \\ > \end{matrix} C_2 \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} A \text{ — } A$
a_5	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$	$A \begin{matrix} > \\ > \end{matrix} C_2 \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} A \text{ — } C_2 \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} A$
a_6	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$	$A \begin{matrix} > \\ > \end{matrix} C_2 \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} B \begin{matrix} \equiv \\ \equiv \end{matrix} A \text{ — } A$
a_7	$\mathbb{R}P^3$	$A \text{ — } A^* \begin{matrix} > \\ > \end{matrix} P_4 \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} A$
a_8	$\mathbb{R}P^3$	$A \text{ — } A^* \begin{matrix} > \\ > \end{matrix} C_2 \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} A$
a_9	\mathbb{S}^3	$A \begin{matrix} > \\ > \end{matrix} B \text{ — } B \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} A$
a_{10}	\mathbb{S}^3	$A \begin{matrix} > \\ > \end{matrix} C_2 \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} A \text{ — } B \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} A$
a_{11}	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$	$A \begin{matrix} > \\ > \end{matrix} C_2 \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} B \begin{matrix} \equiv \\ \equiv \end{matrix} A \text{ — } A$
a_{12}	$\mathbb{R}P^3$	$A \text{ — } A^* \begin{matrix} > \\ > \end{matrix} P_4 \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} A$
a_{13}	$\mathbb{R}P^3$	$A \text{ — } A^* \begin{matrix} > \\ > \end{matrix} C_2 \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} A$

¹Вообще, наличие в интегрируемых задачах динамики твердого тела атомов, отличных от A и B , есть следствие симметрий, которыми богаты эти задачи. Поэтому естественно было бы воспользоваться этими внутренними симметриями для определения типа перестроек.

Очевидно, что система первых интегралов обладает следующими симметриями:

- $\tau_1 : (s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3) \rightarrow (s_1, s_2, -s_3, r_1, r_2, -r_3)$,
- $\tau_2 : (s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3) \rightarrow (-s_1, s_2, s_3, -r_1, r_2, r_3)$,
- $\tau_4 : (s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3) \rightarrow (-s_1, -s_2, s_3, r_1, r_2, -r_3)$.

Поскольку все эти симметрии сохраняют первые интегралы и поверхности уровня, то они порождают симметрии атомов (друг на друга или на себя). Можно показать, что среди этих симметрий есть симметрии, переставляющие особые окружности. Следовательно, по теореме классификации точек типа “седло-седло” ноль ранговой кратности 2 [2] круговая молекула, изображенная на рис. 10, восстанавливается однозначно. Таким образом, $V_1 = P_4$, $V_2 = C_2$.

Зная перестройки торов Лиувилля в окрестности особых точек, можно составить полный список графов Фоменко. Для каждой области на плоскости $\mathbb{R}^2(\delta, h)$ указывается пара (Q_h^3, W) , состоящая из поверхности постоянной энергии Q_h^3 и молекулы W . На рис. 2 пары обозначены (Q_h^3, i_k) , $k = \overline{1, 13}$. Имеется естественное соответствие между зонами на рис. 2 и интервалами энергии на бифуркационных диаграммах. Каждой зоне с номером i_k отвечает уровень энергии $h = a_k$. Полный список (Q_h^3, W) представлен в таблице 1.

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука. 1989. – 472 с.
2. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация: В 2-х т. – Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1999. – Т.1. – 444 с., Т.2. – 448 с.
3. Рубановский В.Н. Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела в жидкости // Докл. АН СССР. – 1968. – 180, вып. 3. – С. 556–559.
4. Смейл С. Топология и механика // Успехи мат. наук. – 1972. – 27, вып. 2. – С. 77–133.
5. Харламов П.В. Один случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // Прикл. математика и механика. – 1955. – 19, вып. 2. – С. 231–233.
6. Харламов П.В. Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела в жидкости // Докл. АН СССР. – 1956. – 107, вып. 3. – С. 381–383.
7. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Прикл. механика и техн. физика. – 1963. – Вып. 4. – С. 17–29.
8. Харламов М.П. Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // Прикл. математика и механика. – 1983. – 47, вып. 6. – С. 922–930.
9. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. — Л.: Изд-во ЛГУ. – 1988. – 200 с.
10. Чаплыгин С.А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости. – В кн. Собр. соч. Т. 1. Теоретическая механика. Математика. – М.; Л.: ОГИЗ, 1948. – С. 337–346.
11. Orel O.E., Ryabov P.E. Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem // Reg. & Ch. Dynamics. – 1998. – 3, N 2. – P. 82–93.
12. Oshemkov A.A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // Adv. in Soviet. Math. – 1991. – 6. – P. 67–146.
13. Yehia H.M. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration. I – The case of axisymmetric forces // Mech. Res. Com. – 1996. – 23, N 5. – P. 423–427.