

$$\ddot{y}_2 + 4y_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_3 + 9x_3 = -\frac{4B_2}{3\pi} \left[\alpha - \beta \dot{B}_2 + 2\gamma B_1 (\dot{y}_1 + \frac{\dot{y}_3}{3} + \frac{\dot{y}_5}{5} + \dots) - 2\gamma B_2 (\dot{x}_1 + \frac{\dot{x}_3}{3} + \frac{\dot{x}_5}{5} + \dots) \right],$$

$$\ddot{y}_3 + 9y_3 = \frac{4B_1}{3\pi} \left[\alpha - \beta \dot{B}_2 + 2\gamma B_1 (\dot{y}_1 + \frac{\dot{y}_3}{3} + \frac{\dot{y}_5}{5} + \dots) - 2\gamma B_2 (\dot{x}_1 + \frac{\dot{x}_3}{3} + \frac{\dot{x}_5}{5} + \dots) \right],$$

$$\ddot{x}_4 + 16x_4 = 0,$$

$$\ddot{y}_4 + 16y_4 = 0,$$

.....
 которая описывает колебания струны с током в магнитном поле.

1. Журавлев В.Ф. О глобальных эволюциях состояния обобщенного маятника Фуко // Изв. Академии Наук. Механика твердого тела. – 1998. – N 6. – С. 5–11.
2. Quick W.H. Theory of vibrating string as an angular motion sensor // Trans. ASME. Seria E Appl. Mech. – 1964. – 31, N 3. – P. 523–534.

Ин-т проблем механики РАН, Москва

Получено 15.12.99

УДК 531.38

©2000. С.Н. Судаков

О СИЛАХ, СПОСОБСТВУЮЩИХ РАЗВИТИЮ ПЛАНЕТАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВОЛЧКА, ПОДВЕШЕННОГО К ВАЛУ ДВИГАТЕЛЯ ПОСРЕДСТВОМ КАРДАННОГО ВАЛА

Рассмотрена задача о развитии планетарных движений сильно сплюснутого симметричного волчка, подвешенного к ротору двигателя посредством карданного вала. Исследованы силы реакций, действующие на волчок со стороны подвеса (нижней крестовины карданного вала). Подробно изучена та их составляющая, которая вызывает развитие планетарных движений. Найдены аналитические выражения для этих сил.

Введение. Подробное изложение теоретических и экспериментальных исследований по движению подвешенного на струне волчка дано в [1]. В работе [2] отмечено, что в экспериментах с подвешенным на струне волчком могут возникать планетарные движения, при которых центр масс волчка движется по раскручивающейся спирали в направлении вращения двигателя. Аналогичный эффект может легко возникать в экспериментах с сильно сплюснутым волчком, подвешенным к оси двигателя посредством карданного вала. В последнем случае поведение системы описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, решая которую, можно получить полную картину движения. Однако уравнения получаются слишком сложными и для их решения приходится использовать численные методы. Поэтому желательно иметь какие-то простые критерии, позволяющие делать предварительные качественные заключения о движении системы в зависимости от ее параметров.

В настоящей работе исследуются силы, способствующие развитию планетарных движений волчка, подвешенного посредством карданного вала, и их зависимость от параметров системы (трения в шарнирах и подкручивающего момента двигателя).

Постановка задачи. Наблюдая за развитием планетарных движений сильно сплюснутого осесимметричного волчка, подвешенного к оси двигателя посредством карданного вала, легко обнаружить следующие закономерности:

1) движение центра масс волчка напоминает планетарные движения маятника, к грузику которого приложена ускоряющая сила, совпадающая с направлением его движения;

2) плоскость волчка не совершает заметных колебаний и все время остается горизонтальной;

3) при достаточно большой скорости вращения двигателя частота вращения волчка много больше частоты планетарных движений;

Учитывая перечисленные особенности движения, естественно предположить, что развитие планетарных движений происходит под действием некоторой силы, действующей на волчок со стороны подвеса. Для исследования зависимости этой силы от трения в шарнирах подвеса и от подкручивающего момента двигателя представляется целесообразным постановка и решение следующей задачи.

Даны два вертикально расположенных вала, оси которых в общем случае не лежат на одной прямой. Верхний вал имеет одну степень свободы – может свободно вращаться вокруг своей оси. Нижний вал имеет две степени свободы – может свободно вращаться вокруг своей оси и перемещаться вдоль нее. Оба вала связаны друг с другом посредством карданного вала. В шарнирах карданного вала действуют силы вязкого трения. К верхнему валу приложен постоянный крутящий момент M , направленный вертикально вверх. К нижнему валу приложен момент M_* , направленный вертикально вниз и уравновешивающий M так, чтобы верхний вал вращался с постоянной угловой скоростью. Кроме этого на нижний вал действует направленная вертикально вниз сила P , моделирующая вес волчка. Требуется найти горизонтальные составляющие силы, действующей со стороны подвеса на вилку карданового шарнира, соединенную с нижним валом.

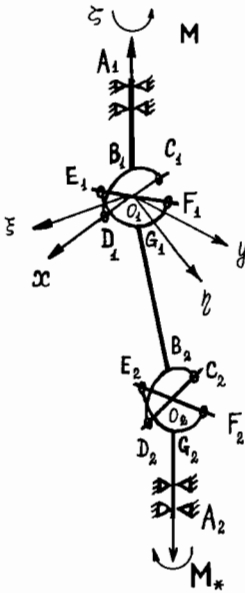


Рис. 1

Эта составляющая может быть разложена на две, одна из которых лежит в плоскости, проходящей через оси обоих валов, а другая направлена ортогонально этой плоскости. Последняя будет именно той силой, которая способствует развитию планетарных движений. Эти силы будут периодическими функциями угла поворота верхнего вала. Поэтому нужно будет найти их среднее значение за один оборот верхнего вала. Массу каждой детали системы будем считать равной нулю.

Системы координат и матрицы косинусов углов между ними. Схема системы изображена на рис. 1. Обозначим через $O_1\xi\eta\zeta$ неподвижную систему координат, начало O_1 которой находится в центре крестовины верхнего карданового шарнира, а ось $O_1\zeta$ направлена вертикально вверх и совпадает с осью верхнего вала B_1A_1 . Система координат O_1xyz жестко связана с верхним валом, причем ось O_1z совпадает с осью A_1B_1 , а ось O_1x с осью крестовины C_1D_1 . Система $O_1x_1y_1z_1$ жестко связана с

карданным валом, причем ось O_1y_1 направлена по оси крестовины E_1F_1 , а ось O_1z_1 является продолжением отрезка B_2G_1 . Кроме этого введем оси $O_1xy_1z_0$, жестко связанные с крестовиной, при этом ось O_1z_0 будет направлена вверх ортогонально плоскости крестовины. Аналогично вводятся системы координат, связанные с нижним карданным шарниром. Оси системы координат $O_2x_2y_2z_2$ жестко связаны с карданным валом, направлены параллельно соответствующим осям $O_1x_1y_1z_1$ и их начало O_2 лежит в центре крестовины нижнего шарнира. При этом ось O_2x_2 будет направлена по оси крестовины C_2D_2 , а ось O_2z_2 по отрезку B_2G_1 . Оси системы координат $O_2x_3y_3z_3$ жестко связаны с нижним валом. При этом ось O_2y_3 направлена по оси крестовины E_2F_2 , а O_2z_3 совпадает с продолжением отрезка A_2G_2 . Оси системы координат $O_2x_2y_3z_*$ жестко связаны с крестовиной, причем O_2z_* будет направлена вверх ортогонально плоскости крестовины.

Положение осей O_1xyz относительно $O_1\xi\eta\zeta$ определяем углом поворота φ вокруг вертикальной оси $O_1\zeta$. Положение осей $O_1x_1y_1z_1$ относительно O_1xyz определяется углами α_1 и β_1 , где α_1 — угол поворота вокруг оси O_1x , а β_1 — угол поворота вокруг оси O_1y_1 . Таблица косинусов углов между осями $O_1\xi\eta\zeta$ и $O_1x_1y_1z_1$ имеет вид

	x_1	y_1	z_1
ξ	$\cos \beta_1 \cos \varphi - \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \varphi$	$-\cos \alpha_1 \sin \varphi$	$\sin \beta_1 \cos \varphi + \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \sin \varphi$
η	$\cos \beta_1 \sin \varphi + \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \varphi$	$\cos \alpha_1 \cos \varphi$	$\sin \beta_1 \sin \varphi - \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \varphi$ (1)
ζ	$-\cos \alpha_1 \sin \beta_1$	$\sin \alpha_1$	$\cos \alpha_1 \cos \beta_1$

Полагая в (1) $\varphi = \beta_1 = 0$ и заменяя ξ, η, ζ соответственно на x, y, z , а z_1 на z_0 , получаем выражения для косинусов углов между осями O_1xyz и $O_1xy_1z_0$. Аналогично, полагая в (1) $\varphi = \alpha_1 = 0$ и заменяя ξ, η, ζ соответственно на x, y_1, z_0 , получаем выражения для косинусов углов между осями $O_1xy_1z_0$ и $O_1x_1y_1z_1$.

Положение осей $O_2x_3y_3z_3$ относительно $O_2x_2y_2z_2$ определяется углами α_2, β_2 , где α_2 — угол поворота вокруг оси O_2x_2 , а β_2 — угол поворота вокруг оси O_2y_3 . Таблица косинусов углов между осями $O_2x_2y_2z_2$ и $O_2x_3y_3z_3$ будет такой

	x_3	y_3	z_3
x_2	$\cos \beta_2$	0	$\sin \beta_2$
y_2	$\sin \alpha_2 \sin \beta_2$	$\cos \alpha_2$	$-\sin \alpha_2 \cos \beta_2$
ζ_2	$-\cos \alpha_2 \sin \beta_2$	$\sin \alpha_2$	$\cos \alpha_2 \cos \beta_2$

Полагая в (2) $\beta_2 = 0$ и заменяя z_3 и ζ_2 соответственно на z_* и z_2 , получаем таблицу косинусов углов между осями $O_2x_2y_3z_*$ и $O_2x_2y_2z_2$. Аналогично, полагая $\alpha_2 = 0$ и заменяя y_2 и ζ_2 соответственно на y_3 и z_* , получаем таблицу косинусов между осями

$O_2x_3y_3z_3$ и $O_2x_2y_3z_*$.

Уравнения задачи. Силы реакций связей, действующие на верхнюю вилку верхнего подвеса в точках C_1 и D_1 ортогонально C_1D_1 обозначим соответственно через \mathbf{f}_{C_1} и \mathbf{f}_{D_1} . На нижнюю вилку в точках E_1 и F_1 ортогонально E_1F_1 действуют силы реакций связей \mathbf{f}_{E_1} и \mathbf{f}_{F_1} . На верхнюю вилку нижнего шарнира в точках C_2 и D_2 действуют силы реакций \mathbf{f}_{C_2} и \mathbf{f}_{D_2} . На нижнюю вилку нижнего подвеса в точках E_2 и F_2 действуют силы реакций \mathbf{f}_{E_2} и \mathbf{f}_{F_2} .

Составляющие сил реакций связей, действующие на вилку $B_1C_1D_1$ со стороны крестовины вдоль оси O_1x , обозначим через \mathbf{f}_x . На вилку $E_1G_1F_1$ со стороны крестовины вдоль оси O_1y_1 действует сила \mathbf{f}_{y_1} . На вилку $C_2B_2D_2$ вдоль оси O_2x_2 действует сила \mathbf{f}_{x_2} . На вилку $E_2G_2F_2$ со стороны крестовины вдоль оси O_2y_3 действует сила \mathbf{f}_{y_3} . Скалярные проекции этих сил на оси, вдоль которых они действуют, соответственно будем обозначать $f_x, f_{y_1}, f_{x_2}, f_{y_3}$.

Обозначим через $M_{C_1D_1}$ и $M_{E_1F_1}$ моменты сил трения, действующие соответственно на оси C_1D_1 и E_1F_1 крестовины верхнего шарнира. Их проекции на оси $O_1xy_1z_0$ соответственно будут $(M_{C_1D_1}, 0, 0)$ и $(0, M_{E_1F_1}, 0)$. Через $M_{C_2D_2}$ и $M_{E_2F_2}$ обозначим моменты сил трения, действующие соответственно на оси C_2D_2 и E_2F_2 крестовины нижнего шарнира. Их проекции на оси $O_2x_2y_3z_*$ соответственно будут $(M_{C_2D_2}, 0, 0)$ и $(0, M_{E_2F_2}, 0)$. Моменты сил трения, действующие на вилки вала G_1B_2 вдоль осей E_1F_1 и C_2D_2 соответственно будут $-M_{E_1F_1}$ и $-M_{C_2D_2}$. Их проекции на оси $O_1x_1y_1z_1$ (или $O_2x_2y_2z_2$) соответственно имеют вид $(0, -M_{E_1F_1}, 0)$ и $(-M_{C_2D_2}, 0, 0)$.

Поскольку масса каждой детали системы считается равной нулю, то для вывода уравнений баланса сил и моментов нужно приравнять нулю суммы всех сил и моментов, действующих на каждую деталь системы.

Проекции сил \mathbf{f}_{C_1} и \mathbf{f}_{D_1} на оси O_1xyz обозначим соответственно $(0, f_{C_1y}, f_{C_1z})$ и $(0, f_{D_1y}, f_{D_1z})$. Полагая $D_1O_1 = O_1C_1 = h$, запишем уравнение баланса моментов, действующих на верхний вал, в виде

$$h(-f_{C_1y} + f_{D_1y}) = -M, \quad (3)$$

где M — проекция момента M на ось O_1z .

Замечание. Кроме сил \mathbf{f}_{C_1} и \mathbf{f}_{D_1} , на верхний вал действуют силы реакций связей в подшипниках. Для их определения необходимо составить, кроме (3), еще дополнительные уравнения, которые решаются после решения уравнений (3)–(10) и на решение последних влияния не оказывают. Поэтому мы их выписывать не будем.

Запишем уравнения движения для крестовины верхнего шарнира. Спроектируем силы \mathbf{f}_{C_1} и \mathbf{f}_{D_1} на оси $O_1xy_1z_0$, связанные с крестовиной

$$\mathbf{f}_{C_1} = (0, f_{C_1y} \cos \alpha_1 + f_{C_1z} \sin \alpha_1, -f_{C_1y} \sin \alpha_1 + f_{C_1z} \cos \alpha_1),$$

$$\mathbf{f}_{D_1} = (0, f_{D_1y} \cos \alpha_1 + f_{D_1z} \sin \alpha_1, -f_{D_1y} \sin \alpha_1 + f_{D_1z} \cos \alpha_1).$$

Проекции сил \mathbf{f}_{E_1} и \mathbf{f}_{F_1} на оси $O_1x_1y_1z_1$ обозначим соответственно $(f_{E_1x_1}, 0, f_{E_1z_1})$, $(f_{F_1x_1}, 0, f_{F_1z_1})$. Перепроектируем эти силы на оси $O_1xy_1z_0$

$$\mathbf{f}_{E_1} = (f_{E_1x_1} \cos \beta_1 + f_{E_1z_1} \sin \beta_1, 0, -f_{E_1x_1} \sin \beta_1 + f_{E_1z_1} \cos \beta_1),$$

$$\mathbf{f}_{F_1} = (f_{F_1x_1} \cos \beta_1 + f_{F_1z_1} \sin \beta_1, 0, -f_{F_1x_1} \sin \beta_1 + f_{F_1z_1} \cos \beta_1).$$

Сумма всех сил, действующих на крестовину, будет $\mathbf{f}_{C_1} + \mathbf{f}_{D_1} + \mathbf{f}_{E_1} + \mathbf{f}_{F_1} + \mathbf{f}_{y_1} = 0$. Проекции этого уравнения на оси $O_1x_1y_1z_0$ имеют вид

$$\begin{aligned} f_{E_1x_1} \cos \beta_1 + f_{E_1z_1} \sin \beta_1 + f_{F_1x_1} \cos \beta_1 + f_{F_1z_1} \sin \beta_1 - f_x &= 0, \\ f_{C_1y} \cos \alpha_1 + f_{C_1z} \sin \alpha_1 + f_{D_1y} \cos \alpha_1 + f_{D_1z} \sin \alpha_1 - f_{y_1} &= 0, \\ f_{C_1y} \sin \alpha_1 - f_{C_1z} \cos \alpha_1 + f_{D_1y} \sin \alpha_1 - f_{D_1z} \cos \alpha_1 + & \\ + f_{E_1x_1} \sin \beta_1 - f_{E_1z_1} \cos \beta_1 + f_{F_1x_1} \sin \beta_1 - f_{F_1z_1} \cos \beta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Равенство нулю суммы всех моментов сил, действующих на крестовину верхнего шарнира, записывается в виде

$$\mathbf{O}_1\mathbf{C}_1 \times \mathbf{f}_{C_1} + \mathbf{O}_1\mathbf{D}_1 \times \mathbf{f}_{D_1} + \mathbf{O}_1\mathbf{E}_1 \times \mathbf{f}_{E_1} + \mathbf{O}_1\mathbf{F}_1 \times \mathbf{f}_{F_1} = \mathbf{M}_{D_1C_1} + \mathbf{M}_{E_1F_1}.$$

Раскрывая векторные произведения и используя выражения для $f_{C_1y_1}$, $f_{C_1z_0}$, $f_{D_1y_1}$, $f_{D_1z_0}$, получаем

$$\begin{aligned} h(f_{E_1x_1} - f_{F_1x_1}) \sin \beta_1 - h(f_{E_1z_1} - f_{F_1z_1}) \cos \beta_1 &= M_{D_1C_1}, \\ -h(f_{C_1y} - f_{D_1y}) \sin \alpha_1 + h(f_{C_1z} - f_{D_1z}) \cos \alpha_1 &= M_{E_1F_1}, \\ -h(f_{C_1y} - f_{D_1y}) \cos \alpha_1 - h(f_{C_1z} - f_{D_1z}) \sin \alpha_1 + & \\ + h(f_{E_1x_1} - f_{F_1x_1}) \cos \beta_1 + h(f_{E_1z_1} - f_{F_1z_1}) \sin \beta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем уравнения баланса сил и моментов, действующих на вал G_1B_2 и прикрепленные к нему вилки. Для суммы всех сил должно выполняться условие $\mathbf{f}_{E_1} + \mathbf{f}_{F_1} + \mathbf{f}_{C_2} + \mathbf{f}_{D_2} + \mathbf{f}_{y_1} + \mathbf{f}_{x_2} = 0$. Проекции этого уравнения на оси системы координат $O_1x_1y_1z_1$ (или $O_2x_2y_2z_2$) будут

$$f_{E_1x_1} + f_{F_1x_1} + f_{x_2} = 0, \quad f_{C_2y_2} + f_{D_2y_2} + f_{y_1} = 0, \quad f_{E_1z_1} + f_{F_1z_1} + f_{C_2z_2} + f_{D_2z_2} = 0. \quad (6)$$

Равенство нулю суммы моментов всех сил, действующих на вал G_1B_2 и прикрепленные к нему вилки, записывается так

$$\mathbf{O}_1\mathbf{E}_1 \times \mathbf{f}_{E_1} + \mathbf{O}_1\mathbf{F}_1 \times \mathbf{f}_{F_1} + \mathbf{O}_1\mathbf{C}_2 \times \mathbf{f}_{C_2} + \mathbf{O}_1\mathbf{D}_2 \times \mathbf{f}_{D_2} + \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 \times \mathbf{f}_{x_2} = \mathbf{M}_{E_1F_1} + \mathbf{M}_{C_2D_2}.$$

Обозначим длину вектора $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ через l . Раскрывая векторные произведения, получаем

$$\begin{aligned} -h(f_{E_1z_1} - f_{F_1z_1}) + l(f_{C_2y_2} + f_{D_2y_2}) &= M_{C_2D_2}, \\ h(f_{C_2z_2} - f_{D_2z_2}) - lf_{x_2} = M_{E_1F_1}, \quad h(f_{E_1x_1} - f_{F_1x_1} - f_{C_2y_2} + f_{D_2y_2}) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем уравнения баланса сил и моментов, действующих на крестовину нижнего шарнира. Для этого спроектируем силы $\mathbf{f}_{C_2} = (0, f_{C_2y_2}, f_{C_2z_2})$ и $\mathbf{f}_{D_2} = (0, f_{D_2y_2}, f_{D_2z_2})$ на оси $O_2x_2y_2z_*$, связанные с нижней крестовиной

$$\mathbf{f}_{C_2} = (0, f_{C_2y_2} \cos \alpha_2 + f_{C_2z_2} \sin \alpha_2, -f_{C_2y_2} \sin \alpha_2 + f_{C_2z_2} \cos \alpha_2),$$

$$\mathbf{f}_{D_2} = (0, f_{D_2y_2} \cos \alpha_2 + f_{D_2z_2} \sin \alpha_2, -f_{D_2y_2} \sin \alpha_2 + f_{D_2z_2} \cos \alpha_2).$$

Силы $\mathbf{f}_{E_2} = (f_{E_2x_3}, 0, f_{E_2z_3})$, $\mathbf{f}_{F_2} = (f_{F_2x_3}, 0, f_{F_2z_3})$ тоже спроектируем на оси $O_2x_2y_3z_*$:

$$\mathbf{f}_{E_2} = (f_{E_2x_3} \cos \beta_2 + f_{E_2z_3} \sin \beta_2, 0, -f_{E_2x_3} \sin \beta_2 + f_{E_2z_3} \cos \beta_2),$$

$$\mathbf{f}_{F_2} = (f_{F_2x_3} \cos \beta_2 + f_{F_2z_3} \sin \beta_2, 0, -f_{F_2x_3} \sin \beta_2 + f_{F_2z_3} \cos \beta_2).$$

Сумма всех сил, действующих на крестовину, должна удовлетворять условию $\mathbf{f}_{C_2} + \mathbf{f}_{D_2} + \mathbf{f}_{E_2} + \mathbf{f}_{F_2} + \mathbf{f}_{x_2} + \mathbf{f}_{y_3} = 0$. В проекциях на оси $O_2x_2y_3z_*$ оно имеет вид

$$(f_{E_2x_3} + f_{F_2x_3}) \cos \beta_2 + (f_{E_2z_3} + f_{F_2z_3}) \sin \beta_2 + f_{x_2} = 0,$$

$$(f_{C_2y_2} + f_{D_2y_2}) \cos \alpha_2 + (f_{C_2z_2} + f_{D_2z_2}) \sin \alpha_2 + f_{y_3} = 0, \quad (8)$$

$$(f_{C_2y_2} + f_{D_2y_2}) \sin \alpha_2 - (f_{C_2z_2} + f_{D_2z_2}) \cos \alpha_2 + (f_{E_2x_3} + f_{F_2x_3}) \sin \beta_2 - (f_{E_2z_3} + f_{F_2z_3}) \cos \beta_2 = 0.$$

Равенство нулю всех моментов сил, действующих на крестовину нижнего шарнира, записывается в виде

$$\mathbf{O}_2\mathbf{C}_2 \times \mathbf{f}_{C_2} + \mathbf{O}_2\mathbf{D}_2 \times \mathbf{f}_{D_2} + \mathbf{O}_2\mathbf{E}_2 \times \mathbf{f}_{E_2} + \mathbf{O}_2\mathbf{F}_2 \times \mathbf{f}_{F_2} = -\mathbf{M}_{C_2D_2} - \mathbf{f}_{E_2F_2}.$$

Раскрывая векторные произведения и используя выражения для $f_{C_2y_3}, f_{C_2z_*}, f_{D_2y_3}$, получаем

$$\begin{aligned} h(f_{E_2x_3} - f_{F_2x_3}) \sin \beta_2 - h(f_{E_2z_3} - f_{F_2z_3}) \cos \beta_2 &= M_{C_2D_2}, \\ -h(f_{C_2y_2} - f_{D_2y_2}) \sin \alpha_2 + h(f_{C_2z_2} - f_{D_2z_2}) \cos \alpha_2 &= M_{E_2F_2}, \\ -h(f_{C_2y_2} - f_{D_2y_2}) \cos \alpha_2 - h(f_{C_2z_2} - f_{D_2z_2}) \sin \alpha_2 + \\ + h(f_{E_2x_3} - f_{F_2x_3}) \cos \beta_2 + h(f_{E_2z_3} - f_{F_2z_3}) \sin \beta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение баланса сил для нижнего вала G_2A_2 будет

$$f_{E_2z_3} + f_{F_2z_3} = P. \quad (10)$$

Из уравнений (3)—(10) необходимо найти компоненты сил $\mathbf{f}_{E_2}, \mathbf{f}_{F_2}, \mathbf{f}_{y_3}$. Вводя новые переменные

$$\begin{aligned} f_{C_1y} - f_{D_1y} &= u_1, & f_{C_1y} + f_{D_1y} &= v_1, & f_{C_1z} - f_{D_1z} &= u_2, & f_{C_1z} + f_{D_1z} &= v_2, \\ f_{E_1x_1} - f_{F_1x_1} &= u_3, & f_{E_1x_1} + f_{F_1x_1} &= v_3, & f_{E_1z_1} - f_{F_1z_1} &= u_4, & f_{E_1z_1} + f_{F_1z_1} &= v_4, \\ f_{C_2y_2} - f_{D_2z_2} &= u_5, & f_{C_2z_2} + f_{D_2z_2} &= v_5, & f_{C_2z_2} - f_{D_2z_2} &= u_6, & f_{C_2z_2} + f_{D_2z_2} &= v_6, \\ f_{E_2x_3} - f_{F_2x_3} &= u_7, & f_{E_2x_3} + f_{F_2x_3} &= v_7, & f_{E_2z_3} - f_{F_2z_3} &= u_8, & f_{E_2z_3} + f_{F_2z_3} &= v_8, \end{aligned} \quad (11)$$

запишем систему (3)—(10) в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \mu_0, & u_3 \sin \beta_1 - u_4 \cos \beta_1 &= \mu_1, & -u_1 \sin \alpha_1 + u_2 \cos \alpha_1 &= \mu_2, \\ -u_1 \cos \alpha_1 + u_2 \sin \alpha_1 + u_3 \cos \beta_1 + u_4 \sin \beta_1 &= 0, \\ -u_4h + lv_5 &= \mu_3h, & u_6h - f_{x_2}l &= \mu_2h, & u_3 - u_5 &= 0, \\ u_7 \sin \beta_2 - u_8 \cos \beta_2 &= \mu_3, & -u_5 \sin \alpha_2 + u_6 \cos \alpha_2 &= \mu_4, \\ -u_5 \cos \alpha_2 - u_6 \sin \alpha_2 + u_7 \cos \beta_2 + u_8 \sin \beta_2 &= 0, \\ v_3 \cos \beta_1 + v_4 \sin \beta_1 + f_x &= 0, & v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_1 + f_{y_1} &= 0, \\ v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_1 + v_3 \sin \beta_1 &= 0, \\ v_3 + f_{x_2} &= 0, & v_5 + f_{y_1} &= 0, & v_4 + v_6 &= 0, \end{aligned}$$

$$v_7 \cos \beta_2 + v_8 \sin \beta_2 + f_{x_2} = 0, \quad v_5 \cos \alpha_2 + v_6 \sin \alpha_2 + f_{y_3} = 0,$$

$$-v_5 \sin \alpha_2 + v_6 \cos \alpha_2 - v_7 \sin \beta_2 + v_8 \cos \beta_2 = 0, \quad v_8 = P,$$

где $\mu_0 = M/h$, $\mu_1 = M_{C_1D_1}/h$, $\mu_2 = M_{E_1F_1}/h$, $\mu_3 = M_{C_2D_2}/h$, $\mu_4 = M_{E_2F_2}/h$.

Полученную систему уравнений представим в виде

$$u_1 = \mu_0, \quad u_2 = u_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + \mu_2 / \cos \alpha_1, \quad u_3 = (u_1 \cos \alpha_1 + u_2 \sin \alpha_1) \cos \beta_1 + \mu_1 \sin \beta_1,$$

$$u_4 = (u_1 \cos \alpha_1 + u_2 \sin \alpha_1) \sin \beta_1 - \mu_1 \cos \beta_1, \quad u_5 = x_3, \quad u_6 = u_5 \operatorname{tg} \alpha_2 + \mu_4 / \cos \alpha_2, \quad (12)$$

$$u_7 = (u_5 \cos \alpha_2 + u_6 \sin \alpha_2) \cos \beta_2 + \mu_3 \sin \beta_2, \quad u_8 = (u_5 \cos \alpha_2 + u_6 \sin \alpha_2) \sin \beta_2 - \mu_3 \cos \beta_2,$$

$$v_5 = (\mu_3 + u_4)h/l, \quad f_{x_2} = (u_6 - \mu_2)h/l, \quad v_8 = P, \quad v_7 = -u_8 \operatorname{tg} \beta_2 - f_{x_2} / \cos \beta_2,$$

$$v_6 = (v_5 \sin \alpha_2 + v_7 \sin \beta_2 - v_8 \cos \beta_2) / \cos \alpha_2, \quad f_{y_3} = -v_5 \cos \alpha_2 - v_6 \sin \alpha_2.$$

Проекция на оси $O_2x_3y_3z_3$ силы \mathbf{F} , действующей со стороны крестовины на вилку нижнего вала, таковы

$$F_{x_3} = v_7, \quad F_{y_3} = f_{y_3}, \quad F_{z_3} = P. \quad (13)$$

Считая, что ось O_2z_3 направлена вертикально вверх и пересекает ось $O_1\eta$, выразим углы $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ через φ . Для этого обозначим через θ значение угла α_1 при $\varphi = \beta_1 = 0$. Поскольку проекции вектора $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ на оси системы координат $O_1\xi\eta\zeta$ не должны зависеть от φ , используя таблицу (1), находим

$$\sin \beta_1 \cos \varphi + \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \sin \varphi = 0,$$

$$\sin \beta_1 \sin \varphi - \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \varphi = -\sin \theta, \quad \cos \alpha_1 \cos \beta_1 = \cos \theta. \quad (14)$$

Отсюда следует

$$\sin \beta_1 = -\sin \theta \sin \varphi, \quad \sin \alpha_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \beta_1} \cos \varphi. \quad (15)$$

Чтобы найти выражения для α_2, β_2 , сначала, используя таблицу (1), спроектируем единичный вектор, направленный по оси $O_1\zeta$, на оси $O_1x_1y_1z_1$, а потом, используя таблицу (2), на оси $O_2x_3y_3z_3$. В результате получим

$$e_x \cos \beta_2 + e_y \sin \alpha_2 \sin \beta_2 - e_z \cos \alpha_2 \sin \beta_2 = 0, \quad e_y \cos \alpha_2 + e_z \sin \alpha_2 = 0,$$

$$e_x \sin \beta_2 - e_y \sin \alpha_2 \cos \beta_2 + e_z \cos \alpha_2 \cos \beta_2 = 1, \quad (16)$$

где $e_x = -\cos \alpha_1 \sin \beta_1$, $e_y = \sin \alpha_1$, $e_z = \cos \alpha_1 \cos \beta_1$. Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\cos \beta_1}, \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\cos \alpha_1 \sin \beta_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \alpha_2}. \quad (17)$$

Моменты сил трения в шарнирах. Считая, что в подшипниках шарниров действуют силы вязкого трения, зададим μ_1, \dots, μ_4 формулами

$$\mu_1 = -k_1 \dot{\alpha}_1, \quad \mu_2 = k_2 \dot{\beta}_1, \quad \mu_3 = -k_3 \dot{\alpha}_2, \quad \mu_4 = k_4 \dot{\beta}_2, \quad (18)$$

где hk_1, \dots, hk_4 — коэффициенты вязкого трения. Для вычисления значений $\dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i$, $i = 1, 2$ продифференцируем (15) по времени t

$$\dot{\beta}_1 = -\frac{\cos \varphi}{\cos \beta_1} \dot{\varphi} \sin \theta, \quad \dot{\alpha}_1 = \frac{-\sin \varphi \cos \beta_1 - \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \beta_1}{\cos \alpha_1 \cos^2 \beta_1} \dot{\varphi} \sin \theta. \quad (19)$$

Второе выражение (19) можно упростить, используя третье соотношение (14):

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{-\sin \varphi \cos \beta_1 - \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \beta_1}{\cos \beta_1} \dot{\varphi} \operatorname{tg} \theta. \quad (20)$$

Упростим и (17), используя третье соотношение (14)

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\sin \alpha_1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\cos \alpha_1 \sin \beta_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \theta \cos \alpha_2}. \quad (21)$$

Дифференцируя эти равенства по t , находим

$$\dot{\alpha}_2 = -\frac{\dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 \cos^2 \alpha_2}{\cos \theta}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_2 = & [(-\dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1)(\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \theta \cos \alpha_2) - \\ & - \cos \alpha_1 \sin \beta_1 (\dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \\ & + \dot{\alpha}_2 \cos \theta \sin \alpha_2)] (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \theta \cos \alpha_2)^{-2} \cos^2 \beta_2. \end{aligned}$$

Проекция искомой силы на неподвижные оси. Спроектируем силу \mathbf{F} на неподвижные оси $O_1\xi\eta\zeta$. Для этого сначала, используя таблицу (2), проектируем силу \mathbf{F} (13) на оси $O_2x_2y_2z_2$ (или, что то же самое, на $O_1x_1y_1z_1$)

$$F_{x_1} = F_{x_2} = v_7 \cos \beta_2 + P \sin \beta_2, \quad F_{y_1} = F_{y_2} = v_7 \sin \alpha_2 \sin \beta_2 + f_{y_3} \cos \alpha_2 - P \sin \alpha_2 \cos \beta_2,$$

$$F_{z_1} = F_{z_2} = -v_7 \cos \alpha_2 \sin \beta_2 + f_{y_3} \sin \alpha_2 + P \cos \alpha_2 \cos \beta_2.$$

Далее, используя таблицу (1), проектируем F на неподвижные оси $O_1\xi\eta\zeta$. С учетом формул (16) получаем $F_\xi = a_1 v_7 + b_1 f_{y_3}$, $F_\eta = a_2 v_7 + b_2 f_{y_3}$, $F_\zeta = P$, где

$$a_1 = q_1 \cos \varphi - q_2 \sin \varphi, \quad b_1 = r_1 \cos \varphi - r_2 \sin \varphi, \quad a_2 = q_1 \sin \varphi - q_2 \cos \varphi,$$

$$b_2 = r_1 \sin \varphi + r_2 \cos \varphi, \quad q_1 = \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \cos \alpha_2 \sin \beta_2,$$

$$q_2 = \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \beta_2 + \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \alpha_2 \sin \beta_2,$$

$$r_1 = \sin \beta_1 \sin \alpha_2, \quad r_2 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \sin \alpha_2.$$

Вводя обозначения $F_\xi = F_1$, $F_\eta = F_2$, выражения для F_ξ и F_η представим в виде

$$F_i = \frac{M}{l} a_{i0}(\theta, \varphi) + \frac{\dot{\varphi}}{l} \sum_{j=1}^4 \kappa_j a_{ij}(\theta, \varphi) + P a_{i5}(\theta, \varphi), \quad i = 1, 2,$$

где функции $a_{ij}(\theta, \varphi)$, $i = 1, 2$, $j = 0, \dots, 5$ определяются выражениями

$$a_{i0} = \frac{1}{\cos \alpha_1} \left[-a_i \frac{\cos \beta_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{\cos \beta_2} + b_i \left(-\frac{\sin \beta_1}{\cos \alpha_2} + \cos \beta_1 \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \operatorname{tg} \beta_2 \right) \right],$$

$$a_{i1} = \nu_1 \left[-a_i \frac{\sin \beta_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{\cos \beta_2} + b_i \left(\frac{\cos \beta_1}{\cos \alpha_2} + \sin \beta_1 \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \operatorname{tg} \beta_2 \right) \right],$$

$$a_{i2} = \nu_2 \left[-\frac{a_i}{\cos \beta_2} \left(\frac{\cos \beta_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{\cos \alpha_1} - 1 \right) - b_i \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 \sin \beta_1}{\cos \alpha_2} - (\cos \beta_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - 1) \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \beta_2 \right) \right],$$

$$a_{i3} = -\nu_3 b_i / \cos \alpha_2, \quad a_{i4} = \nu_4 (-a_i / \cos \beta_2 + b_i \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \beta_2) / \cos \alpha_2,$$

$$a_{i5} = (-a_i \sin \beta_2 + b_i \operatorname{tg} \alpha_2) / \cos \beta_2,$$

$$\nu_1 = (\sin \varphi \cos \beta_1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \beta_1) \operatorname{tg} \theta / \cos \beta_1, \quad \nu_2 = -\cos \varphi \sin \theta / \cos \beta_1,$$

$$\nu_3 = -(\sin \varphi \cos \beta_1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \beta_1) \cos^2 \alpha_2 \operatorname{tg} \theta / \cos^2 \beta_1,$$

$$\nu_4 = \left[\frac{\nu_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 + \nu_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \theta \cos \alpha_2} + \right.$$

$$\left. + \cos \alpha_1 \sin \beta_1 \left(\frac{\nu_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{(\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \theta \cos \alpha_2)^2} + \nu_4 \right) \right] \cos^2 \beta_2.$$

Здесь $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$ выражаются через φ по формулам (15), (21). Осредняя $F_i(\theta, \varphi)$ по φ от 0 до 2π , получаем

$$F_i^*(\theta) = \frac{M}{l} a_{10}^*(\theta) + \frac{\dot{\varphi}}{l} \sum_{j=1}^4 \kappa_j a_{ij}^*(\theta) + P a_{i5}^*(\theta), \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

где

$$F_i^*(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_i(\theta, \varphi) d\varphi, \quad a_{ij}^*(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{ij}(\theta, \varphi) d\varphi, \quad i = 1, 2, \quad j = 0, \dots, 5.$$

Коэффициенты $a_{ij}(\theta)$ в формулах (23) являются функциями одного аргумента θ и не зависят больше ни от каких параметров. На рис.2 приведены зависимости $a_{10}(\theta)$ для $0 < \theta < 10^\circ$, полученные с помощью компьютера. Численные расчеты показали, что $a_{15} = 0$. Остальные коэффициенты $a_{ij}(\theta)$ при $0 < \theta < 10^\circ$ приближенно выражаются линейными функциями

$$a_{ij}(\theta) = b_{ij} \theta, \quad (24)$$

где $b_{11} = -0,0083$; $b_{12} = -0,0089$; $b_{13} = -0,0084$; $b_{14} = -0,0089$; $b_{20} = 3,5 * 10^{-7}$; $b_{21} = 1,4 * 10^{-7}$; $b_{22} = -1,78 * 10^{-7}$; $b_{23} = 1,45 * 10^{-7}$; $b_{24} = -1,66 * 10^{-7}$; $b_{25} = -0,0176$;

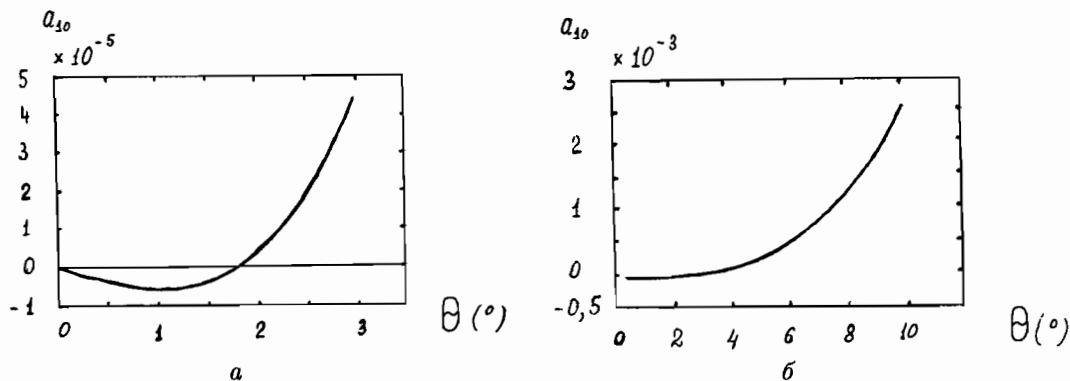


Рис. 2

Из формул (23), (24) и графиков рис.2 следует, что при $\theta < \theta_*$, ($1,5^\circ < \theta_* < 2^\circ$) $F_1^* < 0$, то есть усредненная составляющая F_1^* силы \mathbf{F}^* , действующая на волчок со стороны подвеса ортогонально плоскости, проходящей через оси двигателя и вала, будет

направлена по ходу двигателя. При $\theta_* < \theta < 10^\circ$, эта сила может быть направлена как по ходу двигателя, так и против него, в зависимости от значений параметров $M, l, \dot{\psi}, \kappa_1, \dots, \kappa_4$.

Приближенные уравнения планетарных движений. Будем представлять планетарные движения волчка, как движения математического маятника, к которому приложены силы F_i^* , определяемые формулами (23) при $P = 0$. При этом F_1^* направлена ортогонально вертикальной плоскости, в которой лежит маятник, а F_2^* лежит в этой плоскости и направлена горизонтально.

Пусть $O\xi\eta\zeta$ — неподвижная система координат, ось $O\zeta$ которой направлена вертикально вверх. Точку O будем считать точкой подвеса маятника. Уравнения колебаний маятника с учетом действия сил F_1^* и F_2^* будут

$$\ddot{\psi} \sin \theta = -2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{F_1^*(\theta)}{ml}, \quad \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{F_2^*(\theta)}{ml} \cos \theta,$$

где θ — угол между отрицательной полуосью $O\zeta$ и маятником; ψ — угол между осью $O\eta$ и проекцией маятника на плоскость $O\xi\eta$; l — длина маятника; m — масса маятника; g — ускорение свободного падения.

Заключение. Формулы (23) позволяют легко оценивать величину сил F_1^* и F_2^* , действующих на волчок со стороны подвеса. Особое значение имеет оценка силы F_1^* , так как именно она влияет на изменение скорости прецессии вала $\dot{\psi}$, а F_2^* только несколько изменяет угол нутации θ . Из формул (23) следует, что при $\theta < \theta_*$ выполняется неравенство $F_1^* < 0$, что будет приводить к росту $\dot{\psi}$. При $\theta > \theta_*$ $F_1^*(\theta)$ может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от параметров системы. Причем, при достаточно больших κ_i и достаточно малом M $F_1^*(\theta) < 0$, что будет приводить к возрастанию $\dot{\psi}$, то есть развитию планетарных движений в направлении вращения двигателя. При достаточно малых κ_i и M достаточно большом $F_1^*(\theta) > 0$. В этом случае возможно развитие планетарных движений, для которых $\dot{\psi} < 0$, то есть в направлении обратном вращению двигателя.

1. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. — М.: Наука, 1991г. — 332с.
2. Малашенко С.В. Некоторые экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тел // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1960. — N 3. — С.205–211.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 20.12.99

УДК 531.38

©2000. П.Е. Рябов

ФАЗОВАЯ ТОПОЛОГИЯ ЗАДАЧИ ЧАПЛЫГИНА О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

В настоящей работе изучены бифуркации первых интегралов в задаче Чаплыгина о движении твердого тела в жидкости под действием силы тяжести.

1. Введение. Рассматривается классическая задача Чаплыгина [10], которая описывает частный случай движения твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости.