УДК 531.35

©2000. **Б.И. Коносевич**

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СНАРЯДА

Методами малого параметра изучается движение осесимметричного быстровращающегося артиллерийского снаряда. Малый параметр введен в уравнения движения снаряда с помощью процедуры числовой нормализации. На основе нелинеаризованных уравнений движения даны оценки модулей поперечной угловой скорости и пространственного угла атаки при известных оценках модулей их начальных значений. Уточнены условия динамической устойчивости снаряда. Установлено, что погрешность асимптотического решения первого приближения [6] уравнений углового движения снаряда увеличивается при учете членов этих уравнений, нелинейных по переменным углового движения.

1. Постановка задачи. Одним из способов частичной формализации процедуры введения малого параметра в уравнения движения механической системы является нормализация этих уравнений (см. [5]). Она основана на переходе к новым масштабам времени, фазовых переменных и зависящих от них функций. При этом в качестве новых масштабов фазовых переменных выбираются верхние характерные значения их модулей, то есть значения, близкие к максимальным по времени для всего изучаемого класса механических систем. В полученных таким образом нормализованных уравнениях движения выделяются безразмерные функции порядка 1, зависящие от фазовых переменных и времени, и множители при них, являющиеся безразмерными степенными одночленами, составленными из характерных значений модулей исходных переменных и функций. Один или несколько из таких одночленов принимаются за малые параметры, а остальные выражаются через них с использованием предположений о выделяемом классе движений, теоретических оценок по упрощенной модели, а также числовых данных, полученных с помощью натурного или численного эксперимента.

Для конкретного класса механических систем каждое из характерных значений, а следовательно, и их комбинация, выбираемая в качестве малого параметра, обычно принадлежат узкому диапазону положительных числовых значений, и потому малый параметр фактически вводится вместо определенного числа $\varepsilon_0 \in (0;1)$. Но тогда с той же степенью обоснованности нормализацию можно сразу проводить не в общем виде, а выбирать в качестве характерных значений конкретные числа и вводить малый параметр вместо определенного числа. Такая числовая нормализация является гибким способом введения малого параметра и позволяет легко определить относительный "вес" каждого члена уравнений.

Примем обозначения статьи [3]. Характерные значения модулей медленно изменяющихся переменных $x, y, z, v, \theta, \psi, p$ достаточно надежно определяются из натурного и численного эксперимента. Поэтому представляет интерес получение теоретических оценок верхних характерных значений модулей переменных q, r, α, β, описывающих угловое движение оси симметрии снаряда. Условия, при которых устанавливаются такие оценки, являются условиями правильности полета снаряда, или условиями его динамической устойчивости (см. [1],[4]), если найденные верхние характерные значения модулей переменнных α, β (или угла атаки δ) достаточно малы (порядка $0{,}1^2$). Последовательность получения этих оценок такова. Для переменных углового движения в качестве новых масштабов берутся некоторые "ожидаемые" верхние характерные числовые значения их модулей. Это позволяет ввести в уравнения движения малый параметр с помощью

Таблица (начало)

Величина	x^*, y^*	z^*	v^*	v_*	θ^*	ψ^*	p^*, p_*	α^*, β^*	q^*, r^*
Значение	10^4	10^2	10^3	10^2	1	$0{,}1^2$	10^3	$0{,}1^2$	1
Ед. измер.	м	м	м/с	м/с	-	-	1/с	-	1/с

Таблица (окончание)

K^*_{x0}	K^*_{y0}, K^*_{z0}	K^*_{p0}	$A^*_{\Omega 0}$	A^*_{g0}, A_{g0*}	B^*_{y0}	B^*_{z0}	B_{z0*}	t^*
10^2	0,1	$0{,}1^2$	1	10^2	10^2	10^4	10^3	10
м/с^2	1/с	1/с	1/с	1/с	1/с^2	1/с^2	1/с^2	с

процедуры числовой нормализации (п.2). Затем проводятся оценки и устанавливается, что рассматриваемые переменные равны $O\,(1)$ при $\varepsilon \to 0$ (пп.3–5), а это означает, что действительные верхние характерные значения модулей соответствующих исходных переменных равны ожидаемым. После этого становятся определенными порядки по ε всех членов уравнений движения, что дает возможность построить приближенное асимптотическое решение уравнений углового движения, аналогичное указанному в [6], и оценить его погрешность с учетом нелинейных членов (п.6).

Символы $O\,(\varepsilon^n)$ $[O^*(\varepsilon^n)]$ обозначают функции $f(\xi, t, \varepsilon)$, которые в рассматриваемой области изменения некоторого вектора ξ и времени t имеют при $\varepsilon \to 0$ порядок не ниже ε^n [равный ε^n], при этом для положительных функций используются обозначения $O_+(\varepsilon^n)$ $[O^*_+(\varepsilon^n)]$. Аналогичные обозначения используются и при оценках числовых порядков. В этом случае применяется десятичная степенная шкала, так что равенства $f(\xi, t) = O\,(0{,}1^n)$ и $f(\xi, t) = O^*(0{,}1^n)$ означают, что $|f(\xi, t)| < 0{,}1^{n-1}$ и $0{,}1^{n+1} < |f(\xi, t)| < 0{,}1^{n-1}$ в рассматриваемой области изменения переменных ξ, t.

Для сокращения записи применяются обозначения $\zeta = \sin\delta, \mathrm{c}(\zeta) = 1/(1+\sqrt{1-\zeta^2})$, где δ – пространственный угол атаки. Так как $\alpha = \sin\delta\cos\nu, \beta = \sin\delta\sin\nu$, где ν – угол поворота плоскости угла атаки, то $\zeta^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Чтобы при введении малого параметра было удобней выделить в уравнениях движения функции порядка единицы, вводятся две четные аналитические функции $\mathrm{s}\,(\psi) = (\sin\psi)/\psi$, $\mathrm{t}\,(\psi) = (\mathrm{tg}\,\psi)/\psi$ $(\mathrm{s}\,(0) = \mathrm{t}\,(0) = 1)$.

2. Введение малого параметра. Движение осесимметричного быстровращающегося артиллерийского снаряда при $|\delta| \le \pi/2$ описывается уравнениями (19), (20), (24), (25) статьи [3] и изучается на интервале времени $[t_0; t_1]$, где t_0 – момент вылета снаряда из орудия, t_1 – момент его падения на землю. Кроме упомянутых выше максимальных, для оценок используются также близкие к минимальным по времени значения модулей некоторых переменных и функций для всего рассматриваемого класса объектов. Первые естественно назвать верхними, а вторые – нижними характерными числовыми значениями модулей этих величин. Они даны в таблице, где отмечены соответственно верхним и нижним индексом $*$. Приведенные в верхней части таблицы характерные значения $x^*, y^*, z^*, v^*, v_*, \theta^*, \psi^*, p^*, p_*$ являются действительными, а $\alpha^*, \beta^*, q^*, r^*$ – ожидаемыми. Указанные в таблице верхние и нижние характерные значения переменных y, v, θ, ψ, p определяют область Ξ^5 изменения этих переменных (5-мерный параллелепипед). Соответствующая область изменения y, v, p обозначается через Ξ^3.

Характерные начальные значения $\alpha^*, \beta^*, q^*, r^*(t_0)$ переменных α, β, q, r найдем в предположении, что в момент t_0 вылета снаряда из орудия скорость его центра масс направлена вдоль оси ствола, расстояние между ведущими утолщениями $L \approx 500$ мм, а зазор между снарядом и поверхностью канала ствола $h \approx 0{,}5$ мм. Тогда синус угла наклона снаряда к оси ствола по модулю равен $|\zeta(t_0)| = h/L$, и следовательно, $|\zeta^*(t_0)| \approx 0{,}1^3$. В этом наклонном положении благодаря нарезке ствола снаряд имеет угловую скорость $\boldsymbol{\omega}(t_0)$, направленную вдоль оси ствола. Проекция $\boldsymbol{\Omega}(t_0)$ вектора $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ на плоскость, ортогональную оси симметрии снаряда, по модулю равна $|p(t_0)\sin\delta(t_0)|$. Поэтому $q^*, r^*(t_0) = p^*(t_0)\zeta^*(t_0)$. Следовательно,

$$\alpha^*, \beta^*(t_0) = 0{,}1^3, \qquad q^*, r^*(t_0) = 1\,\text{c}^{-1}. \tag{1}$$

Аэродинамические силы и моменты характеризуются функциями $R_x, R_{y1} = R_y/\zeta$, $R_{z1} = R_z/\zeta, M_p, M_\Omega, M_{y1} = M_y/\zeta, M_{z1} = M_z/\zeta$, которые зависят от y, v, ζ, а R_{z1}, M_{y1} – еще и от p. В уравнения движения снаряда входят выражающиеся через них аэродинамические функции

$$K_x = R_x/m,\ K_y = R_{y1}/mv,\ K_z = R_{z1}/mv,\ K_p = M_p/I_1,$$

$$A_\Omega = M_\Omega/I_2,\ B_y = M_{y1}/I_2,\ B_z = M_{z1}/I_2. \tag{2}$$

Все они являются четными по ζ [3]. Эти функции предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми при $(y, v, p,) \in \Xi^3$ и значениях $\zeta = O(0{,}1)$, которые по модулю на десятичный порядок больше ожидаемых. Поэтому, если временно обозначить через $A(y, v, p, \zeta)$ одну из этих функций, то

$$A(y, v, p, \zeta) = A_0(y, v, p) + A_2(y, v, p, \zeta)\zeta^2, \tag{3}$$

где $A_0(y, v, p) = A(y, v, p, 0)$, $A_2(y, v, p, \zeta) = A''(y, v, p, \tilde{\zeta}(\zeta))/2$ ($\tilde{\zeta}(\zeta) \in [0; \zeta]$) являются соответственно дважды непрерывно дифференцируемой и непрерывной функциями. Здесь и далее нулевым нижним индексом отмечаются значения функций при $\zeta = 0$, штрих означает дифференцирование по ζ.

Функции $K_{x0}, K_{y0}, K_{p0}, A_{\Omega 0}, B_{z0}(y, v)$ достаточно надежно определяются экспериментальным путем, что позволяет найти характерные значения их модулей (они приведены в нижней части таблицы). В п.3 после замены переменных в линейной части уравнений углового движения функция B_{z0} входит в эти уравнения с множителем 4. Поэтому в таблице в качестве B^*_{z0}, B_{z0*} взяты верхнее и нижнее характерные значения функции $4B_{z0}$. Относительно силы Магнуса R_z известно, что она меньше влияет на полет снаряда, чем подъемная сила R_y. С учетом этого для общности предполагается, что R_z принимает значения того же порядка, что и подъемная сила R_y, или меньшие по модулю значения, то есть $K^*_{z0} = K^*_{y0}$. Для функции B_{y0}, характеризующей момент Магнуса M_y, следует предположить, что $B^*_{y0} = 0{,}1^2 B^*_{z0}$, так как если предположить B^*_{y0} больше хотя бы на один десятичный порядок, то невозможно обеспечить выполнение условий динамической устойчивости снаряда в п.4. Время полета снаряда при стрельбе на максимальную дальность составляет несколько десятков секунд. Поэтому характерное время полета $t^* = 10$с. В таблице приведены также характерные значения функции $A_{g0}(p) = pI_1/I_2$.

Относительно величин квадратичных по ζ членов аэродинамических функций K_x, K_y, K_z, K_p, B_z делаются следующие предположения, основанные на имеющихся экспериментальных данных. Для функций K_x, K_y, K_z, K_p предполагается, что в области

$(y,v,p) \in \Xi^3$, $\zeta = O(0{,}1)$ числовые значения производных $K_x'', K_y'', K_z'', K_p''$, а вместе с ними и числовые значения коэффициентов $K_{x2}, K_{y2}, K_{z2}, K_{p2}$ при ζ^2 в формулах вида (3) на один десятичный порядок больше, чем значения соответствующих нулевых членов $K_{x0}, K_{y0}, K_{z0}, K_{p0}$. Для функции B_z предполагается, что B_z'', а значит, и коэффициент нелинейного члена B_{z2} в представлении вида (3) принимает при $(y,v,p) \in \Xi^3$ числовые значения того же порядка, что и нулевой член B_{z0}. Таким образом, имеем $K_{x2}^* = 10K_{x0}^*, K_{y2}^* = 10K_{y0}^*, K_{z2}^* = 10K_{z0}^*, K_{p2}^* = 10K_{p0}^*, B_{z2}^* = B_{z0}^*$. Что касается двух оставшихся функций A_Ω, B_y, то квадратичные по ζ члены их представлений вида (3) предполагаются такими, что соответствующие им члены уравнений движения имеют тот же порядок, что и нелинейный член, связанный с B_z.

Нормализуем приведенные в [3] уравнения движения снаряда, выбирая в качестве новых масштабов фазовых переменных верхние характерные значения их модулей, указанные в таблице. Аэродинамические функции (2) отнесем к верхним характерным значениям модулей нулевых членов их представлений вида (3), функцию A_{g0} – к A_{g0}^*, а константу g – к величине 10 м/с^2. В качестве новой единицы времени возьмем $t^0 = 0{,}01$с. Для новых переменных и функций сохраним прежние обозначения. Числовые коэффициенты при выделенных таким образом в уравнениях движения функциях порядка 1 представим в виде степеней числа $\varepsilon_0 = 0{,}1$, а затем заменим ε_0 малым параметром ε. В результате получим содержащие ε уравнения поступательного движения и продольного вращения

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = \varepsilon^3 F_x(v,\theta,\varepsilon^2\psi), \quad \dot{y} = \varepsilon^3 F_y(v,\theta,\varepsilon^2\psi), \quad \varepsilon^2\dot{z} = \varepsilon^5 F_z(v,\varepsilon^2\psi),\\
&\dot{v} = \varepsilon^4 F_v(\theta,\varepsilon^2\psi) + \varepsilon^3 K_x(y,v,\zeta,\varepsilon),\\
&\dot{\theta} = \varepsilon^3 F_\theta(v,\theta,\varepsilon^2\psi) + \varepsilon^5[K_y(y,v,\zeta,\varepsilon)\alpha - K_z(y,v,p,\zeta,\varepsilon)\beta]/\cos\varepsilon^2\psi,\\
&\varepsilon^2\dot{\psi} = \varepsilon^5 F_\psi(v,\theta,\varepsilon^2\psi) + \varepsilon^5[K_z(y,v,p,\zeta,\varepsilon)\alpha + K_y(y,v,\zeta,\varepsilon)\beta],\\
&\dot{p} = \varepsilon^4 p K_p(y,v,\zeta,\varepsilon),
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
&F_x(v,\theta,\varepsilon^2\psi) = v\cos\theta\cos\varepsilon^2\psi,\ F_y(v,\theta,\varepsilon^2\psi) = v\sin\theta\cos\varepsilon^2\psi,\ F_z(v,\varepsilon^2\psi) = v\psi\,\mathrm{s}\,(\varepsilon^2\psi),\\
&F_v(\theta,\varepsilon^2\psi) = -g\sin\theta\cos\varepsilon^2\psi,\ F_\theta(v,\theta,\varepsilon^2\psi) = -\frac{\varepsilon g\cos\theta}{v\cos\varepsilon^2\psi},\ F_\psi(v,\theta,\varepsilon^2\psi) = \frac{\varepsilon g}{v}\psi\,\mathrm{s}\,(\varepsilon^2\psi)\sin\theta,
\end{aligned} \tag{5}$$

причем $\varepsilon g/v = O(1)$. Согласно предположениям о нелинейностях,

$$\begin{aligned}
&K_x(y,v,\zeta,\varepsilon) = K_{x0}(y,v) + \varepsilon^3\zeta^2 K_{x2}(y,v,\zeta,\varepsilon),\\
&K_y(y,v,\zeta,\varepsilon) = K_{y0}(y,v) + \varepsilon^3\zeta^2 K_{y2}(y,v,\zeta,\varepsilon),\\
&K_z(y,v,p,\zeta,\varepsilon) = K_{z0}(y,v,p) + \varepsilon^3\zeta^2 K_{z2}(y,v,p,\zeta,\varepsilon),\\
&K_p(y,v,\zeta,\varepsilon) = K_{p0}(y,v) + \varepsilon^3\zeta^2 K_{p2}(y,v,\zeta,\varepsilon),\\
&A_\Omega(y,v,\zeta,\varepsilon) = A_{\Omega 0}(y,v) + \varepsilon^2\zeta^2 A_{\Omega 2}(y,v,\zeta,\varepsilon),\\
&B_y(y,v,p,\zeta,\varepsilon) = B_{y0}(y,v,p,) + \varepsilon^2\zeta^2 B_{y2}(y,v,p,\zeta,\varepsilon),\\
&B_z(y,v,\zeta,\varepsilon) = B_{z0}(y,v) + \varepsilon^4\zeta^2 B_{z2}(y,v,\zeta,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{6}$$

При этом для снаряда $K_{x0}, K_{y0}, B_{z0}(y,v) > 0$ и $K_{p0}, A_{\Omega 0}(y,v) < 0$. Пусть

$$\xi = (x, y, \varepsilon^2 z, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p), \quad \xi_5 = (y, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p), \quad \xi_3 = (y, v, p).$$

Области изменения ξ_5, ξ_3, в которые после изменения масштабов переходят исходные области Ξ^5, Ξ^3, снова обозначаются через Ξ^5, Ξ^3. В формулах (5), (6) и далее функции переменных ξ_5, ζ и параметра ε, обозначаемые заглавными латинскими буквами, равны $O(1)$ при $\xi_5 \in \Xi^5$, $\zeta = O(\varepsilon^{-1})$. Поэтому если, например, $k = O(\varepsilon^3)$, то $k = \varepsilon^3 K$, где $K = O(1)$.

Уравнения углового движения оси симметрии снаряда после введения в них малого параметра ε запишем в квазилинейной форме, пользуясь в их линейной части комплексными переменными $\Omega = q + ir$, $\Delta = \alpha + i\beta$:

$$\begin{aligned} \dot\Omega &= a(y,v,p,\varepsilon)\Omega + b(y,v,p,\varepsilon)\Delta + h_\Omega(y,v,\theta,\psi,p,q,r,\alpha,\beta,\varepsilon), \\ \dot\Delta &= -i\Omega - k(y,v,p,\varepsilon)\Delta + l(v,\theta,\varepsilon^2\psi) + h_\Delta(y,v,\theta,\psi,p,q,r,\alpha,\beta,\varepsilon). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь коэффициенты линейных членов равны

$$\begin{aligned} &a(y,v,p,\varepsilon) = \varepsilon^2 A_{\Omega 0}(y,v) + iA_{g0}(p), \quad b(y,v,p,\varepsilon) = \varepsilon^2 B_{y0}(y,v,p) + iB_{z0}(y,v), \\ &k(y,v,p,\varepsilon) = \varepsilon^3 K_{y0}(y,v) + i\varepsilon^3 K_{z0}(y,v,p), \quad l(v,\theta,\varepsilon^2\psi) = \varepsilon L_\alpha(v,\theta,\varepsilon) + i\varepsilon^3 L_\beta(v,\theta,\psi,\varepsilon), \end{aligned} \tag{8}$$

причем

$$L_\alpha(v,\theta,\varepsilon) = \frac{\varepsilon g}{v}\cos\theta, \quad L_\beta(v,\theta,\psi,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon g}{v}\psi\, \mathrm{s}(\varepsilon^2\psi)\sin\theta, \tag{9}$$

а дополнительные члены выражаются формулами

$$\begin{aligned} h_\Omega(y,v,\theta,\psi,p,q,r,\alpha,\beta,\varepsilon) &= \Big\{\varepsilon^4(\alpha^2+\beta^2)A_{\Omega 2}(y,v,\zeta,\varepsilon) - i\varepsilon^4(\alpha q + \beta r)\,\mathrm{c}\,(\varepsilon^2\zeta) + \\ &+ \varepsilon^6 g v^{-1}\Big[\psi\,\mathrm{t}\,(\varepsilon^2\psi)\cos\theta + \beta\,\mathrm{c}\,(\varepsilon^2\zeta)\cos\theta + \varepsilon^2\alpha\psi\,\mathrm{s}\,(\varepsilon^2\psi)\,\mathrm{c}\,(\varepsilon^2\zeta)\sin\theta\Big] - \\ &- i\varepsilon^7 K_y(y,v,\zeta,\varepsilon)\alpha\psi\,\mathrm{t}\,(\varepsilon^2\psi) + i\varepsilon^7 K_z(y,v,p,\zeta,\varepsilon)\Big[(\alpha^2+\beta^2)\,\mathrm{c}\,(\varepsilon^2\zeta) + \beta\psi\,\mathrm{t}\,(\varepsilon^2\psi)\Big]\Big\}\Omega + \\ &+ \varepsilon^4(\alpha^2+\beta^2)[B_{y2}(y,v,p,\zeta,\varepsilon) + iB_{z2}(y,v,\zeta,\varepsilon)]\Delta, \\ h_\Delta(y,v,\theta,\psi,p,q,r,\alpha,\beta,\varepsilon) &= \Big\{\varepsilon^4(\beta q - \alpha r)\,\mathrm{c}\,(\varepsilon^2\zeta) + i\varepsilon^6 g v^{-1}\psi\,\mathrm{t}\,(\varepsilon^2\psi)\cos\theta - \\ &- \varepsilon^6(\alpha^2+\beta^2)\Big[K_{y2}(y,v,\zeta,\varepsilon) + iK_{z2}(y,v,p,\zeta,\varepsilon)\Big] + \varepsilon^7 K_y(y,v,\zeta,\varepsilon)\Big[(\alpha^2+\beta^2)\,\mathrm{c}\,(\varepsilon^2\zeta) - \\ &- i\alpha\psi\,\mathrm{t}\,(\varepsilon^2\psi)\Big] + i\varepsilon^7 K_z(y,v,p,\zeta,\varepsilon)\Big[(\alpha^2+\beta^2)\,\mathrm{c}\,(\varepsilon^2\zeta) + \beta\psi\,\mathrm{t}\,(\varepsilon^2\psi)\Big]\Big\}\Delta + \\ &+ \varepsilon^6 g v^{-1}(\alpha^2+\beta^2)\,\mathrm{c}\,(\varepsilon^2\zeta)[-\cos\theta + i\psi\,\mathrm{s}\,(\varepsilon^2\psi)\sin\theta]. \end{aligned} \tag{10}$$

В соответствии с таблицей функция $B_{z0}(y,v) > 0$ ограничена снизу значениями порядка ε, которые она может принимать на среднем участке траектории при больших углах стрельбы, а функция $A_{g0}(p) = Ip$ (I – число, близкое к 1) принимает только значения порядка 1:

$$O_+^*(\varepsilon) \le B_{z0}(y,v) \le O_+^*(1), \quad A_{g0}(p) = O^*(1). \tag{11}$$

Кроме того, не только сами нулевые члены представлений (3) функций (2) равны $O(1)$ в Ξ^3, но и все их частные производные первого и второго порядков считаются равными $O(1)$ в Ξ^3. Это обозначается следующим образом

$$K_{x0}, K_{y0}, K_{z0}, K_{p0}, A_{\Omega 0}, B_{y0}, B_{z0}\,(y,v,p) = O^2(1), \quad (y,v,p) \in \Xi^3. \tag{12}$$

В начальный момент в соответствии с (1) имеем $\Omega(t_0,\varepsilon)=O(1)$, $\Delta(t_0,\varepsilon)=O(\varepsilon)$. Система (4), (7) рассматривается на отрезке времени $[t_0;t_1]$, длина которого $t_1-t_0=O(\varepsilon^{-3})$.

3. Преобразование уравнений углового движения. Пусть $e(\xi_5,\varepsilon)$, $d(\xi_5,\varepsilon)$ – значения Ω и Δ, при которых обращаются в нули правые части уравнений (7) с отброшенными h_Ω, h_Δ. Тогда

$$e=bl/(ib-ak),\quad d=-al/(ib-ak), \tag{13}$$

причем в соответствии с (8), (11), (12)

$$e(\xi_5,\varepsilon)=\varepsilon E(\xi_5,\varepsilon),\quad d(\xi_5,\varepsilon)=D(\xi_5,\varepsilon),\qquad E,D(\xi_5,\varepsilon)=O^2(1). \tag{14}$$

Условимся верхним индексом $[m]$ отмечать зависящие от ξ_5,ε функции, которые с погрешностью $O(\varepsilon^m)$ аппроксимируют в Ξ^5 соответствующие функции без этого индекса. Подставив (8) в (13), получаем

$$e^{[2]}=-i\varepsilon L_\alpha,\quad d^{[2]}=-\varepsilon^3 A_{g0}B_{y0}L_\alpha/B_{z0}^2+i\varepsilon A_{g0}L_\alpha/B_{z0}, \tag{15}$$

причем $\varepsilon/B_{z0}=O(1)$ согласно (11).

В выражении $\dot a(\xi_5,\zeta,\varepsilon)=a_0^1(\xi_3,\varepsilon)+a_1^1(\xi_5,\zeta,\varepsilon)$ производной функции $a(\xi_5,\varepsilon)$ в силу уравнений движения ведущий член равен

$$a_0^1(\xi_3,\varepsilon)=i\varepsilon^4 A_{g0}(p)K_{p0}(y,v), \tag{16}$$

а для a_1^1 справедлива оценка $a_1^1=O(\varepsilon^5)$. Пусть функция $w(\xi_5,\varepsilon)$ определена равенством

$$w=(a-k)^2/4-ib+ak-a_0^1/2. \tag{17}$$

После подстановки в (17) выражений a,b,k из (8) w записывается в виде

$$w=-A_{g0}^2\sigma^2/4+O(\varepsilon^2), \tag{18}$$

где

$$\sigma=\sqrt{1-4B_{z0}/A_{g0}^2}. \tag{19}$$

Свои наибольшие значения функция B_{z0} принимает на начальном участке траектории, где $B_{z0}=O_+^*(1)$, а наименьшие – на среднем участке, где при больших углах стрельбы $B_{z0}=O_+^*(\varepsilon)$. Для A_{g0} имеем $A_{g0}=O^*(1)$ во все время полета. В момент t_0 конструктивно обеспечивается положительность подкоренного выражения в (19), в этот момент $0{,}6<$ $<\sigma_0<0{,}7$. Но тогда подкоренное выражение положительно при всех $t\in[t_0;t_1]$, а функция σ находится в пределах

$$\sigma_0\le\sigma\le 1-O_+(\varepsilon), \tag{20}$$

где $\sigma_0=O_+^*(1)$. Следовательно, $w=O^*(1)\ne 0$. Полагаем теперь

$$\lambda_j=(a-k)/2\pm\sqrt{w},\quad \lambda_j^+=\lambda_j-\dot w/4w\qquad (j=1,2). \tag{21}$$

Здесь $\dot w=\dot w(y,v,p,\zeta,\varepsilon)$, верхний знак отвечает $j=1$, нижний – $j=2$.

В линейной части уравнений (7) делаем замену переменных Ω, Δ на u_1, u_2 типа квазидиагонализирующей замены (7.2.4) в [7]:

$$\Omega = i(\lambda_1^+ + k)u_1 + i(\lambda_2^+ + k)u_2 + e, \quad \Delta = u_1 + u_2 + d. \tag{22}$$

Тогда уравнения (7) преобразуются к виду

$$\dot{u}_j = \lambda_j^+ u_j \pm \rho(u_1 + u_2) \mp \frac{1}{2w^{1/2}}\Big[i(h_\Omega - \dot{e}) + (\lambda_{3-j}^+ + k)(h_\Delta - \dot{d})\Big] \quad (j = 1, 2), \tag{23}$$

$$\rho = \frac{1}{2w^{1/2}}\left(\frac{\ddot{w}}{4w} - \frac{5\dot{w}^2}{16w^2} - \frac{a_1^1 + \dot{k}}{2}\right).$$

Рассмотрим структуру зависимости $\dot{e}, \dot{d}$ от введенных переменных. Согласно (8),(9), функцию l в (13) можно представить в виде суммы $l = L_0 + \varepsilon^4 L_1$ функции $L_0 = \varepsilon g v^{-1}\cos(\theta + i\varepsilon^2\psi)$ и малого добавка. Выражение $\dot{\theta} + i\varepsilon^2\dot{\psi}$ в соответствии с (4) представляется в виде суммы членов трех типов: зависящих только от ξ_5, линейных по $\Delta = \alpha + i\beta$ и малых дополнительных членов. Поэтому и величины $\dot{e}, \dot{d}$ в (23) представляются в таком же виде. На рассматриваемом решении $\xi, q, r, \alpha, \beta(t, \varepsilon)$ уравнений движения функции $\lambda_j, \rho(\xi, q, r, \alpha, \beta, \varepsilon)$ и т.д. обращаются в функции $\lambda_j, \rho(t, \varepsilon)$ и т.д. Уравнения (23) записываются в интегральной форме

$$\begin{gathered} u_j(t,\varepsilon) = \widetilde{u}_j(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t}\Big[\rho_j(t,\tau,\varepsilon)\Big(u_1(\tau,\varepsilon) + u_2(\tau,\varepsilon)\Big) + \chi_j(t,\tau,\varepsilon)\Big]\,d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t}\eta_j(t,\tau,\varepsilon)\Big[\exp\int_{\tau}^{t}\lambda_j(\tau_1,\varepsilon)\,d\tau_1\Big]\,d\tau \qquad (j = 1, 2), \end{gathered} \tag{24}$$

где

$$\widetilde{u}_j(t,\varepsilon) = u_j(t_0,\varepsilon)\frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)}\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_j(\tau_1,\varepsilon)\,d\tau_1 \qquad (j = 1, 2), \tag{25}$$

функции η_j зависят от t только через переменные ξ_5, а функции ρ_j, χ_j зависят от t также и через q, r, α, β, причем эта нелинейная зависимость слабая.

4. Условия динамической устойчивости. Представим λ_j $(j = 1, 2)$ в виде $\lambda_j = n_j + i\omega_j$. Подставив в (17), (21) выражения (8), (16), находим ε^5-приближения для n_j, ω_j $(j = 1, 2)$:

$$n_j^{[5]} = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(A_{\Omega 0} \pm \frac{A_{g0}A_{\Omega 0} - 2B_{y0}}{\sigma A_{g0}}\right) + \frac{\varepsilon^3}{2}K_{y0}\left(-1 \pm \frac{1}{\sigma}\right) \mp \varepsilon^4\frac{K_{p0}}{2\sigma},$$

$$\omega_j^{[5]} = \frac{A_{g0}}{2}(1 \pm \sigma) + \varepsilon^3\frac{K_{z0}}{2}\left(-1 \pm \frac{1}{\sigma}\right) \pm \varepsilon^4\left[\frac{(1-\sigma^2)A_{\Omega 0}^2}{4\sigma^3 A_{g0}} - \frac{B_{y0}A_{\Omega 0}}{\sigma^3 A_{g0}^2} + \frac{B_{y0}^2}{\sigma^3 A_{g0}^3}\right]. \tag{26}$$

Отсюда с учетом (11), (20) следует, что в области Ξ^3, а значит, и на траектории полета при $t \in [t_0; t_1]$ выполняются соотношения

$$\lambda_1, \omega_1 = O^*(1), \quad O_+^*(\varepsilon) \le |\lambda_2| \le O_+^*(1), \quad O_+^*(\varepsilon) \le |\omega_2| \le O_+^*(1), \quad n_1, n_2 = O(\varepsilon^2). \tag{27}$$

Поэтому в соответствии с (12) в области Ξ^3 имеем

$$1/\lambda_1, 1/\omega_1 = O^2(1), \quad 1/\lambda_2, 1/\omega_2 = O^2(\varepsilon^{-1}). \tag{28}$$

Предположим, что при $t \in [t_0; t_1]$ кроме условия гироскопической устойчивости $1 - 4B_{z0}/A_{g0}^2 > 0$ выполняются неравенства $n_j \le O_+(\varepsilon^4)$, $\quad j = 1, 2$. Поскольку $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, то тогда

$$\left|\exp \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau, \varepsilon)\, d\tau\right| = 1 + O_+(\varepsilon). \tag{29}$$

Согласно (26), неравенства $n_j \le O_+(\varepsilon^4)$ означают, что с погрешностью порядка ε^2 выполняется неравенство $|1 - \varepsilon\varkappa - \mu| \le \sigma(1 + \varepsilon\varkappa)$, где $\mu = 2B_{y0}/A_{g0}A_{\Omega 0}$, $\varkappa = -K_{y0}/A_{\Omega 0} > 0$. Рассматривая его как ограничение на параметр μ, получаем для μ с погрешностью порядка ε^2 допустимый интервал $[\mu_1; \mu_2]$, где $\mu_1, \mu_2 = 1 \mp \sigma - \varepsilon\varkappa(1 \pm \sigma)$.

В следующем параграфе будет показано, что если выполняются предположения, сделанные при введении малого параметра, а также указанные в данном параграфе неравенства $\sigma^2 = 1 - 4B_{z0}/A_{g0}^2 > 0$, $n_j \le O_+(\varepsilon^4)$ $(j = 1, 2)$, $\sigma_0 \le \sigma \le 1 - O_+(\varepsilon)$, то $\Omega, \Delta(t, \varepsilon) = O(1)$, $\quad t \in [t_0; t_1]$. Таким образом, эти предположения и неравенства в совокупности обеспечивают динамическую устойчивость снаряда.

Если предположить, что $n_j \le O_+(\varepsilon^3)$, то тогда с погрешностью порядка ε будет выполняться неравенство $|1 - \mu| \le \sigma$. Полагая $s_d = \mu = 2By0/A_{g0}A_{\Omega 0}$, $s_g = A_{g0}^2/4B_{z0}$, получим отсюда условие $s_d(2 - s_d) \ge 1/s_g$, приведенное в [4]. Формально при $n_j \le O_+(\varepsilon^3)$ левая часть (29) равна $O_+(1)$. Но так как параметр ε введен вместо числа $\varepsilon_0 = 0{,}1$, то в исходной системе уравнений движения (без параметра ε) аналогичная числовая оценка в этом случае выполняться не будет, поскольку $\exp O_+(1)$ может иметь числовой порядок $0{,}1^{-1}$ и ниже. А тогда нельзя будет гарантировать в п.5, что $\Omega, \Delta(t, \varepsilon) = O(1)$.

5. Оценки модулей Ω, Δ. Пусть $\Omega^0(t, \varepsilon) = \max|\Omega(\tau, \varepsilon)|$, $\Delta^0(t, \varepsilon) = \max|\Delta(\tau, \varepsilon)|$ при $\tau \in [t_0; t]$. Функции $\Omega^0, \Delta^0(t, \varepsilon)$ являются непрерывными и неубывающими по t. Отмечая верхним нулевым индексом верхние оценки модулей функций, входящих в (24), получаем

$$\begin{aligned}
&|\tilde u_j(t, \varepsilon)| \le \tilde u^0 = O_+(1), \quad |\rho_j(t, \varepsilon)| \le \rho^0(\varepsilon) = O_+(\varepsilon^5), \quad |\eta_j(t, \varepsilon)| \le \eta^0(\varepsilon) = O(\varepsilon^3),\\
&|\chi_j(t, \varepsilon)| \le \chi^0(t, \varepsilon) = [O_+(\varepsilon^4)(\Delta^0)^2 + O_+(\varepsilon^4)\Omega^0\Delta^0 + O_+(\varepsilon^5)\Delta^0 + O_+(\varepsilon^5)]\Omega^0 +\\
&\qquad + [O_+(\varepsilon^4)(\Delta^0)^2 + O_+(\varepsilon^5)\Delta^0 + O_+(\varepsilon^5)]\Delta^0 + O_+(\varepsilon^6) \quad (j = 1, 2).
\end{aligned} \tag{30}$$

Аргументы у $\Omega^0, \Delta^0(t, \varepsilon)$ здесь для краткости опущены. Функции ρ_j, зависящие от q, r, α, β, оценены при $\Omega, \Delta = O(\varepsilon^{-1})$, и поэтому ρ^0 не зависит от Ω^0, Δ^0. Так как η_j здесь зависят от t только через $\xi_5(t, \varepsilon)$, то из (4),(28) следует, что $d(\eta_j/\lambda_j)/dt = O(\varepsilon^5)$ при $\Delta = O(\varepsilon^{-1})$. Тогда, обозначая через $I_j(t, \varepsilon)$ интегралы в (24), содержащие η_j, с помощью интегрирования по частям и оценок (28),(29) устанавливаем, что

$$|I_j(t, \varepsilon)| \le I^0(\varepsilon) = O(\varepsilon^2) \quad (j = 1, 2; \quad t \in [t_0; t_1]). \tag{31}$$

В таком случае из (24),(30) следуют неравенства

$$|u_j(t, \varepsilon)| \le \tilde u^0 + \chi^+(t, \varepsilon) + \rho^0(\varepsilon) \int\limits_{t_0}^{t} (|u_1(\tau, \varepsilon)| + |u_2(\tau, \varepsilon)|)\, d\tau \quad (j = 1, 2).$$

Здесь $\chi^+(t,\varepsilon) = \chi^0(t,\varepsilon)(t-t_0) + I^0(\varepsilon)$, а так как $t - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, то $\chi^+(t,\varepsilon)$ имеет вид функции $\chi^0(t,\varepsilon)$ в (30), где величины $O(\varepsilon^n)$ заменены на $O(\varepsilon^{n-3})$. Отсюда, пользуясь леммой Гроноулла в форме, приведенной в [2], получаем оценку

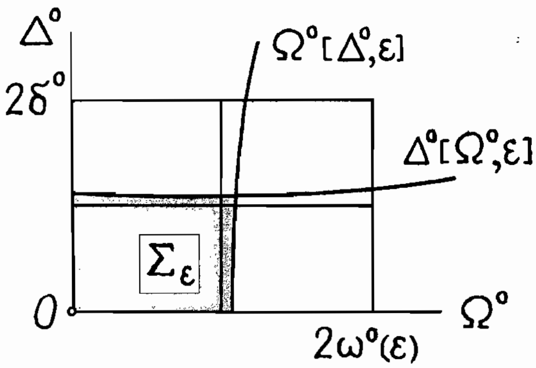
$$|u_1(t,\varepsilon)| + |u_2(t,\varepsilon)| \le 2\widetilde{u}^0 + m_1(\Omega^0(t,\varepsilon), \Delta^0(t,\varepsilon), \varepsilon), \tag{32}$$

где m_1 – функция такого же вида, что и χ^+. Но тогда из формул замены (22) с учетом непрерывности и неубывания $\Omega^0, \Delta^0(t,\varepsilon)$ по t следует, что при $0 \le \Omega^0 \le O_+(\varepsilon^{-1})$, $0 \le$ $\le \Delta^0 \le O_+(\varepsilon^{-1})$ для $\Omega^0, \Delta^0(t,\varepsilon)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\Omega^0(t,\varepsilon) \le \omega^0(\varepsilon) + m_2(\Omega^0(t,\varepsilon), \Delta^0(t,\varepsilon), \varepsilon), \\ &\Delta^0(t,\varepsilon) \le \delta^0 + m_1(\Omega^0(t,\varepsilon), \Delta^0(t,\varepsilon), \varepsilon), \quad t \in [t_0; t_1]. \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь $\omega^0(\varepsilon) = 2\varepsilon[\lambda^{+0}(\varepsilon) + k^0(\varepsilon)]\widetilde{u}^0 + e^0(\varepsilon) = O_+(1)$, $\delta^0 = 2\widetilde{u}^0 + d^0 = O(1)$, а m_2 – функция такого же вида, что и χ^+.

С помощью принципа сжимающих отображений устанавливаем, что множество точек (Ω^0, Δ^0) прямоугольника $\Sigma^0_\varepsilon : 0 \le \Omega^0 \le 2\omega^0(\varepsilon)$, $0 \le \Delta^0 \le 2\delta^0$, удовлетворяющих неравенствам (33), при малых ε представляет собой область Σ_ε, ограниченную осями координат и непрерывными кривыми $\Omega^0[\Delta^0,\varepsilon]$, $\Delta^0[\Omega^0,\varepsilon]$ такими, что $\Omega^0[\Delta^0,\varepsilon] =$ $= \omega^0(\varepsilon) + O_+(\varepsilon)$, $\Delta^0[\Omega^0,\varepsilon] = \delta^0 + O_+(\varepsilon)$ (см. рисунок). Аргументы здесь взяты в квадратные скобки, чтобы отличить эти кривые от $\Omega^0, \Delta^0(t,\varepsilon)$. Множество (возможно, пустое) точек (Ω^0, Δ^0), удовлетворяющих неравенствам (33) и лежащих вне прямоугольника Σ^0_ε, обозначим через Σ'_ε.



В соответствии с формулами (22) и вытекающим из (24),(25) неравенством $|u_1(t_0,\varepsilon)| + |u_2(t_0,\varepsilon)| \le 2\widetilde{u}^0$ имеем $\Omega^0(t_0,\varepsilon) \le \omega^0(\varepsilon)$, $\Delta^0(t_0,\varepsilon) \le \delta^0$, так что при $t = t_0$ точка $(\Omega^0(t,\varepsilon),\ \Delta^0(t,\varepsilon))$ лежит в Σ_ε.

Но функции $\Omega^0, \Delta^0(t,\varepsilon)$ удовлетворяют неравенствам (33) при всех $t \in [t_0; t_1]$, а поскольку они непрерывны по t, точка $(\Omega^0(t,\varepsilon),\ \Delta^0(t,\varepsilon))$ не может попасть в Σ'_ε и, следовательно, остается в Σ_ε. Это означает, что при $t \in [t_0; t_1]$ выполняются следующие оценки

$$\begin{aligned} |\Omega(t,\varepsilon)| &\le \omega^0(\varepsilon) + O_+(\varepsilon) = O_+(1), \\ |\Delta(t,\varepsilon)| &\le \delta^0 + O_+(\varepsilon) = O_+(1). \end{aligned} \tag{34}$$

6. Приближенные выражения Ω, Δ. Оценки (34) позволяют установить, что $m_1 = O(\varepsilon)$, $\chi_j = O(\varepsilon^4)$. Тогда из (24), (32) с учетом полученных ранее оценок (30),(31) для ρ_j, η_j, I_j получаем $u_j(t,\varepsilon) = \widetilde{u}_j(t,\varepsilon) + O(\varepsilon)$, $j = 1,2$. При этом $u(t_0,\varepsilon) = \widetilde{u}(t_0,\varepsilon)$ согласно (25). Следовательно, если обозначить через $\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Delta}(t,\varepsilon)$ функции, которые определяются формулами (22) при замене в них u_j выражением (25), то получим оценки

$$\Omega(t,\varepsilon) - \widetilde{\Omega}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \Delta(t,\varepsilon) - \widetilde{\Delta}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad t \in [t_0; t_1]. \tag{35}$$

Здесь $\Omega, \Delta(t,\varepsilon)$ – точное решение уравнений (7). В начальный момент имеем $\tilde{\Omega}, \tilde{\Delta}(t_0,\varepsilon) = \Omega, \Delta(t_0,\varepsilon)$, отсюда следуют выражения для комплексных постоянных $u_j(t_0,\varepsilon)$.

Величины w, λ_j, k, e, d в определении функций $\tilde{\Omega}, \tilde{\Delta}(t,\varepsilon)$ зависят от t только через y, v, θ, ψ, p, а λ_j^+ – еще и через ζ в выражении $\dot{w}$. Поэтому указанные функции нельзя рассматривать в качестве приближеного решения уравнений (7). Однако, поскольку $k = O(\varepsilon^3), \dot{w}/4w = O(\varepsilon^3)$, то оценки (35) не изменятся, если в определении $\tilde{\Omega}$ формулой вида (22) вместо $\lambda_j^+ + k$ взять λ_j $(j = 1,2)$. Тогда приближенное решение уравнений углового движения (7) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}(t,\varepsilon) &= i\frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{-1/4}(t,\varepsilon)}\Big[C_1\lambda_1(t,\varepsilon)\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau + C_2\lambda_2(t,\varepsilon)\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_2(\tau,\varepsilon)\,d\tau\Big] + e(t,\varepsilon),\\
\tilde{\Delta}(t,\varepsilon) &= \frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{-1/4}(t,\varepsilon)}\Big[C_1\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau + C_2\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_2(\tau,\varepsilon)\,d\tau\Big] + d(t,\varepsilon),
\end{aligned} \qquad (36)$$

и для его погрешности сохранятся оценки (35). Из условий $\tilde{\Omega}(t_0,\varepsilon) = \Omega(t_0,\varepsilon)$, $\tilde{\Delta}(t_0,\varepsilon) = \Delta(t_0,\varepsilon)$ следуют выражения комплексных постоянных $C_j = u_j(t_0,\varepsilon)$:

$$C_j = (-1)^j\frac{i[\Omega(t_0,\varepsilon) - e(t_0,\varepsilon)] + \lambda_{3-j}(t_0,\varepsilon)[\Delta(t_0,\varepsilon) - d(t_0,\varepsilon)]}{2w(t_0,\varepsilon)} \qquad (j = 1,2). \qquad (37)$$

Решение (36) определено, если известны зависимости y, v, θ, ψ, p от t, ε.

Его можно еще упростить, сохранив оценки (35). Для этого в формулах (36) следует заменить под знаками интегралов λ_j на $\lambda_j^{[5]}$, а во внеинтегральных членах этих формул достаточно заменить величины w, λ_j, C_j, e, d их приближенными выражениями $w, \lambda_j^{[2]}, C_j^{[2]}, e^{[2]}, d^{[2]}$. Для $w^{[2]}, \lambda_j^{[2]}$ согласно (18), (26) имеем $w^{[2]} = -A_{g0}^2\sigma^2/4$, $\lambda_j^{[2]} = i\omega_j^{[2]}$, $\omega_j^{[2]} = A_{g0}(1 \pm \sigma)/2$, а для $e^{[2]}$, $d^{[2]}$, $\lambda_j^{[5]} = n_j^{[5]} + i\omega_j^{[5]}$ уже получены выражения (15), (26). Воспользовавшись этими аппроксимациями, находим

$$C_j^{[2]} = (-1)^j\frac{\Omega(t_0,\varepsilon) - e^{[2]}(t_0,\varepsilon) + \omega_{3-j}^{[2]}(t_0,\varepsilon)[\Delta(t_0,\varepsilon) - d^{[2]}(t_0,\varepsilon)]}{A_{g0}(t_0,\varepsilon)\sigma(t_0,\varepsilon)} \qquad (j = 1,2).$$

В результате вместо $\tilde{\Omega}, \tilde{\Delta}$ получаем приближенное решение уравнений углового движения (7), которое обозначим через $\tilde{\tilde{\Omega}}, \tilde{\tilde{\Delta}}$. Так как $\tilde{\Omega} - \tilde{\tilde{\Omega}} = O(\varepsilon^2)$, $\tilde{\Delta} - \tilde{\tilde{\Delta}} = O(\varepsilon^2)$, то из (35) следует оценка его погрешности

$$\Omega(t,\varepsilon) - \tilde{\tilde{\Omega}}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \Delta(t,\varepsilon) - \tilde{\tilde{\Delta}}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad t \in [t_0; t_1]. \qquad (38)$$

В работе [6] оценка модуля погрешности приближенного решения, аналогичного $\tilde{\tilde{\Omega}}, \tilde{\tilde{\Delta}}$, получена не через O-символы, а в виде сложных неравенств. При этом не учитывались нелинейные члены уравнений движения, а также возможность уменьшения частоты ω_2 на среднем участке траектории при больших углах стрельбы. При таких допущениях в уравнениях (7) следует положить $h_\Omega, h_\Delta = 0$, а вместо (28) принять $1/\omega_j = O(1)$ $(j = 1,2)$. Тогда в (30) будет $\chi^0(\varepsilon) = O(\varepsilon^6)$, а оценка (31) примет вид

$I_j(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3)$. В результате оказывается, что принятой в [6] постановке задачи вместо (35) соответствует оценка $\Omega - \widetilde{\Omega} = O(\varepsilon^3)$, $\Delta - \widetilde{\Delta} = O(\varepsilon^3)$, а вместо (38) – оценка $\Omega - \widetilde{\widetilde{\Omega}} = O(\varepsilon^2)$, $\Delta - \widetilde{\widetilde{\Delta}} = O(\varepsilon^2)$.

1. *Гантмахер Ф.Р., Левин Л.М.* Теория полета неуправляемых ракет. – М.: Физматгиз, 1959. – 360 с.
2. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 475 с.
3. *Коносевич Б.И.* К теории полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 28. – С. 44 – 55.
4. *Мэрфи Ч.Х.* Динамическая неустойчивость осесимметричного снаряда // Ракетная техника и космонавтика. – 1982. – **20**, N 5. – С. 132–141.
5. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. – М.: Изд-во МГУ. – 1991. – 190 с.
6. *Пугачев В.С.* Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе//Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
7. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 12.10.99

УДК 531.38

©2000. **Т.А. Кушпиль, Д.Д. Лещенко, И.А. Тимошенко**

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭВОЛЮЦИИ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Рассматривается движение вокруг центра инерции твердого тела близкого к динамически сферическому и содержащего вязкоупругий элемент. Этот элемент моделируется подвижной массой, прикрепленной при помощи упругой связи с вязким трением к точке, расположенной на одной из главных осей инерции. Считается, что малые параметры, обусловленные близостью моментов инерции и наличием подвижной массы, одного порядка. Вводятся сферические координаты, определяющие положение вектора угловой скорости, для которых получена и исследована система дифференциальных уравнений. Рассмотрены специальные случаи движения.
Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени, и восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации. Тело предполагается быстро закрученным, проекции вектора возмущающего момента на оси инерции тела одного порядка малости с восстанавливающим моментом. Получены и исследуются усредненные системы уравнений движения в первом и втором приближениях. Рассмотрены примеры.

1. Исследуем движение вокруг центра инерции близкого к динамически сферическому твердого тела, к которому в точке O_1, расположенной на одной из главных осей инерции, прикреплена при помощи упругой связи точка массы m. Начало декартовой системы координат, связанной с твердым телом, поместим в центр инерции тела точку O, а орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ направим по главным осям инерции так, чтобы орт $\mathbf{e}_3$ определял ось, на которой расположена точка O_1. Тогда для радиус-вектора точки O_1 имеем $\rho = \rho\mathbf{e}_3$, причем, не нарушая общности, будем считать $\rho > 0$.

При выводе уравнений движения используется схема, изложенная в [8].

При исследовании эволюции вращения твердого тела ограничимся условиями

$$\Omega^2 \gg \lambda\omega \gg \omega^2, \quad (\omega \equiv |\boldsymbol{\omega}| \sim 1) \tag{1}$$

что дает возможность пренебрегать свободными колебаниями точки m и учитывать лишь ее вынужденные движения, которые будем искать в виде разложения по степеням Ω^{-2} . В этом случае уравнение движения твердого тела с тензором инерции J_0^*