4. *Hess W.* Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine partikulare Lösung der Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. - 1890. - **37**, H. 2. - S. 153-181.

5. *Staude O.* Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // Journ für die reine und angew Math. - 1894. - **113**, H. 2. - S. 318-334.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк Получено 7.10.99

УДК 531.38

©2000. **Г.В. Горр, Е.В. Саркисьянц, С.В. Скрыпник**

ОБ ИЗОКОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТЕЛА В СЛУЧАЕ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Изучены условия существования изоконических движений тела в случае, когда система дифференциальных уравнений движения допускает три линейных инвариантных соотношения. Найден новый класс изоконических движений тела, для которого подвижным годографом является спиралевидная кривая, расположенная на эллипсоиде вращения.

Метод инвариантных соотношений [8] на конструктивном уровне позволяет найти условия существования произвольного инвариантного соотношения и осуществить поиск новых частных случаев интегрируемости уравнений динамики твердого тела. Важность построения решений обусловлена применением метода годографа [6] кинематического истолкования движения тела. Обзор результатов, посвященных некоторым решениям уравнений динамики, приведен в [1].

Линейные по основным переменным задачи инвариантные соотношения представляют собой соотношения, которые наиболее подробно изучены в литературе [7]. Изоконические движения тела с неподвижной точкой, для которых подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу относительно, касательной к ним плоскости [2], в силу своей наглядности представляют особый интерес для кинематического истолкования движения методом годографов [6].

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим в векторном виде дифференциальные уравнения движения гиростата, имеющего неподвижную точку, для обобщенной задачи динамики (см., например, [4]) :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{B}\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{C}\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движения носимых тел; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс; $\boldsymbol{a} = (a_{ij})$ – гирационный тензор, построенный в неподвижной точке; $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$, $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над векторами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}$ обозначает производную по времени.

Уравнения (1), (2) имеют интегралы

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{C}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \tag{3}$$

где E и k – произвольные постоянные.

Предположим, что движение гиростата обладает свойством изоконичности. Тогда должно выполняться инвариантное соотношение [2]

$$\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{e})=0. \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,e_3)$ – единичный вектор, неизменно связанный с гиростатом; $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}$ – вектор угловой скорости.

Исследование инвариантного соотношения (4) будем проводить при условии, что дифференциальные уравнения (1), (2) допускают три линейных инвариантных соотношения [7] , которые запишем в переменных задачи (1) - (3) :

$$\left.\begin{aligned} x_1&=b_0+b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_3\nu_3,\\ x_2&=c_0+c_1\nu_1+c_2\nu_2+c_3\nu_3,\\ x_3&=d_0+d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Целесообразность такой записи обусловлена инвариантным соотношением (4). В силу структуры формул (5) в качестве подвижной системы координат примем главную систему координат, то есть $a_{ij}=0\,(i\neq j)$, $a_{11}=a_1$, $a_{22}=a_2$, $a_{33}=a_3$. Очевидно, что при этом матрицы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ могут содержать и недиагональные элементы.

При наличии соотношений (5) уравнения Пуассона (2) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \dot\nu_1&=a_3\nu_2\left(d_0+d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3\right)-a_2\nu_3\left(c_0+c_1\nu_1+c_2\nu_2+c_3\nu_3\right),\\ \dot\nu_2&=a_1\nu_3\left(b_0+b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_3\nu_3\right)-a_3\nu_1\left(d_0+d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3\right),\\ \dot\nu_3&=a_2\nu_1\left(c_0+c_1\nu_1+c_2\nu_2+c_3\nu_3\right)-a_1\nu_2\left(b_0+b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_3\nu_3\right).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Запишем систему (6) в векторном виде. Пусть

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2c_1 & a_2c_2 & a_2c_3\\ a_3d_1 & a_3d_2 & a_3d_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{g}_0=(a_1b_0,a_2c_0,a_3d_0). \tag{7}$$

Тогда из (6) имеем

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{g}_0+\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{G}\boldsymbol{\nu}, \tag{8}$$

где

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{\nu}=\left(a_1b_1\nu_1+a_1b_2\nu_2+a_1b_3\nu_3,\ a_2c_1\nu_1+a_2c_2\nu_2+a_2c_3\nu_3,\ a_3d_1\nu_1+a_3d_2\nu_2+a_3d_3\nu_3\right).$$

2. Исследование уравнений (1)-(3) [7]. Потребуем, чтобы подстановка равенств (5) в уравнения, вытекающие из формулы (1), приводила к тождеству по переменным ν_1,ν_2,ν_3. Кроме того, будем предполагать, что при внесении (5) в первые два интеграла из (3) получим геометрический интеграл $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1$. Тогда найдем следующие условия на параметры задачи и неизвестные параметры $b_i,c_i,d_i\ (i=0,1,2,3)$:

$$b_0=-\lambda_1,\ c_0=-\lambda_2,\ d_0=-\lambda_3, \tag{9}$$

$$b_1=-\frac{1}{2}\left(B_{22}+B_{33}\right),\ c_2=-\frac{1}{2}\left(B_{33}+B_{11}\right),\ d_3=-\frac{1}{2}\left(B_{11}+B_{22}\right), \tag{10}$$

$$s_i=-(a_1\lambda_1b_i+a_2\lambda_2c_i+a_3\lambda_3d_i),\ (i=1,2,3), \tag{11}$$

$$c_1 = B_{12} - b_2,\ d_1 = B_{13} - b_3,\ d_2 = B_{23} - c_3, \tag{12}$$

$$C_{ij} = -(a_1 b_i b_j + a_2 c_i c_j + a_3 d_i d_j),\ (i \neq j), \tag{13}$$

$$C_{ii} = C_{33} + a_1(b_3^2 - b_i^2) + a_2(c_3^2 - c_i^2) + a_3(d_3^2 - d_i^2),\ \ (i = 1, 2). \tag{14}$$

Для простоты значения на постоянные E и k не приводим, так как по совему механическому смыслу они могут принимать произвольные значения.

В силу гидродинамической аналогии [4] задачи о движении гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями (1), (2), и задачи о движении тела в идеальной несжимаемой жидкости [7], соотношения (9)-(14) можно получить из условий, указанных в [7]. Представляет интерес указать соответствие между случаем, который анализируется в данной статье, и случаем П.В.Харламова [7]. Пусть P_1, P_2, P_3; R_1, R_2, R_3– основные переменные в задаче о движении тела в жидкости. Три линейных инвариантных соотношения в [7] задаются в виде $P_i = k_i R_i + s_i$, где $i = 1, 2, 3$; s_i и k_i – постоянные. Уравнения движения тела в жидкости имеют три первых интеграла, из которых выпишем только аналог интеграла площадей

$$R_1(P_1 + \lambda_1) + R_2(P_2 + \lambda_2) + R_3(P_3 + \lambda_3) = m, \tag{15}$$

где λ_i – параметры, совпадающие с компонентами вектора $\boldsymbol{\lambda}$ из (1). Если внести равенства $P_i = k_i R_i + s_i$ в интеграл (15) и потребовать, чтобы (15) приводился к интегралу $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R_0^2$, то получим $k_1 = k_2 = k_3$, $s_i + \lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Для этого варианта в статье [7] выписана кинетическая энергия.

Рассмотрим вопрос о сведении задачи к квадратурам при наличии равенств (9)-(14). Остановимся на одном частном варианте, когда матрица (7) имеет диагональную структуру, то есть положим $b_2 = b_3 = 0$, $c_1 = c_3 = 0$, $d_1 = d_2 = 0$. Уравнения (6) таковы

$$\left.\begin{aligned} \dot\nu_1 &= a_2\lambda_2\nu_3 - a_3\lambda_3\nu_2 + (a_3 d_3 - a_2 c_2)\nu_2\nu_3, \\ \dot\nu_2 &= a_3\lambda_3\nu_1 - a_1\lambda_1\nu_3 + (a_1 b_1 - a_3 d_3)\nu_3\nu_1, \\ \dot\nu_3 &= a_1\lambda_1\nu_2 - a_2\lambda_2\nu_1 + (a_2 c_2 - a_1 b_1)\nu_1\nu_2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Условия на параметры (11)-(14) принимают вид

$$\begin{gathered} s_1 = -a_1\lambda_1 b_1, \quad s_2 = -a_2\lambda_2 c_2, \quad s_3 = -a_3\lambda_3 d_3, \\ B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0, \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0, \\ C_{11} = C_{33} + a_3 d_3^2 - a_1 b_1^2, \quad C_{22} = C_{33} + a_3 d_3^2 - a_2 c_2^2. \end{gathered}$$

Система (16) допускает два интеграла

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad a_1 b_1 \nu_1^2 + a_2 c_2 \nu_2^2 + a_3 d_3 \nu_3^2 - 2(a_1\lambda_1\nu_1 + a_2\lambda_2\nu_2 + a_3\lambda_3\nu_3) = n_0 \tag{17}$$

и поэтому сводится к квадратурам.

В случае $a_3 d_3 = a_2 c_2 = a_1 b_1 = 0$ из (17) имеем

$$a_1\lambda_1\nu_1 + a_2\lambda_2\nu_2 + a_3\lambda_3\nu_3 = m_0. \tag{18}$$

Первое равенство из (17) параметризуем так

$$\nu_1 = \sin\theta\,\sin\varphi, \qquad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \nu_3 = \cos\theta. \tag{19}$$

Введем обозначения

$$A_0 = \sqrt{a_1^2\lambda_1^2 + a_2^2\lambda_2^2}, \qquad \sin\varphi_0 = \frac{a_2\lambda_2}{A_0}, \qquad \cos\varphi_0 = \frac{a_1\lambda_1}{A_0}.$$

Тогда на основании (18) зависимости θ и φ от времени получим в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \arcsin\frac{m_0 - a_3\lambda_3\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad \dot\theta = -\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\sin^2\theta - (m_0 - a_3\lambda_3\cos\theta)^2}. \tag{20}$$

Зависимости основных переменных от времени определим из (5), (10).

При рассмотрении второго примера положим $\lambda_3 = 0$. Соотношение (17) представим в канонической форме

$$\frac{(\nu_1 + a^2a_1\lambda_1)^2}{a^2} + \frac{(\nu_2 + b^2a_2\lambda_2)^2}{b^2} = E_0, \tag{21}$$

где E_0 – произвольная постоянная и

$$a = (a_3d_3 - a_1b_1)^{-1/2}, \qquad b = (a_3d_3 - a_2c_2)^{-1/2}.$$

Здесь, очевидно, считаем, что $a_3d_3 - a_1b_1 > 0$, $a_3d_3 - a_2c_2 > 0$. На основании представления (21), легко свести задачу к квадратурам

$$\begin{gathered}\nu_1 = a\left(\sqrt{E_0}\cos u - aa_1\lambda_1\right), \qquad \nu_2 = b\left(\sqrt{E_0}\sin u - ba_2\lambda_2\right),\\ \nu_3^2 = \varphi(u) = 1 - a^2\left(\sqrt{E_0}\cos u - aa_1\lambda_1\right)^2 - b^2\left(\sqrt{E_0}\sin u - ba_2\lambda_2\right)^2,\\ \dot u = -\frac{1}{ab}\sqrt{\varphi(u)}.\end{gathered} \tag{22}$$

После нахождения из (22) $\nu_i = \nu_i(t)$ зависимости $x_i = x_i(t)$ определим из (5). Таким образом мы пришли к аналогу решения Н.Е.Жуковского [3]. Для частного случая рассматриваемой задачи он получен и в [4].

Можно привести пример, когда интегрирование системы (16) не сводится к решению Н.Е.Жуковского [3]. Пусть $\lambda_3 = 0$, $a_3d_3 - a_1b_1 > 0$, $a_3d_3 - a_2c_2 < 0$. Из второго равенства системы (17) имеем

$$\frac{(\nu_1 + a_*^2a_1\lambda_1)^2}{a_*^2} - \frac{(\nu_2 - b_*^2a_2\lambda_2)^2}{b_*^2} = E_0, \tag{23}$$

где

$$a_* = (a_3d_3 - a_1b_1)^{-1/2}, \qquad b_* = (a_2c_2 - a_3d_3)^{-1/2}.$$

При параметризации соотношения (23) в виде

$$\nu_1 = a_*\left(\sqrt{E_0}\,\mathrm{ch}\,u - a_*a_1\lambda_1\right), \qquad \nu_2 = b_*\left(\sqrt{E_0}\,\mathrm{sh}\,u - b_*a_2\lambda_2\right) \tag{24}$$

из геометрического интеграла и системы (16) имеем

$$\nu_3^2 = \psi(u) = 1 - a_*^2\left(\sqrt{E_0}\,\mathrm{ch}\,u - a_*a_1\lambda_1\right)^2 - b_*^2\left(\sqrt{E_0}\,\mathrm{sh}\,u - b_*a_2\lambda_2\right)^2, \tag{25}$$

$$\dot{u} = -\frac{1}{a_* b_*}\sqrt{\psi(u)}.$$

3. Изучение соотношения (4). Рассмотрим случай, когда подстановка выражений (5) в равенство (4) приводит к тождеству по переменным ν_1, ν_2, ν_3. Тогда получим следующую систему равенств:

$$b_1 = c_2 = d_3 = 0, \qquad a_1 b_2 + a_2 c_1 = 0, \qquad a_1 b_3 + a_3 d_1 = 0, \qquad a_2 c_3 + a_3 d_2 = 0, \tag{26}$$

$$a_1 e_1 \lambda_1 + a_2 e_2 \lambda_2 + a_3 e_3 \lambda_3 = 0, \qquad a_2 e_2 c_1 + a_3 e_3 d_1 = -a_1 \lambda_1, \tag{27}$$

$$a_1 e_1 b_2 + a_3 e_3 d_2 = -a_2 \lambda_2, \qquad a_1 e_1 b_3 + a_2 e_2 c_3 = -a_3 \lambda_3. \tag{28}$$

Считая b_2, b_3, e_1 независимыми параметрами, найдем общее решение системы (45)–(47):

$$\begin{gathered} c_1 = -\frac{a_1 b_2}{a_2}, \qquad c_2 = 0, \qquad c_3 = \frac{1}{a_2 \lambda_1}(a_2 \lambda_2 b_3 - a_3 \lambda_3 b_2), \\ d_1 = -\frac{a_1 b_3}{a_3}, \qquad d_2 = \frac{1}{a_3 \lambda_1}(a_3 \lambda_3 b_2 - a_2 \lambda_2 b_3), \qquad d_3 = 0, \\ e_2 = \frac{\lambda_1(a_3 \lambda_3 + a_1 e_1 b_3)}{a_3 \lambda_3 b_2 - a_2 \lambda_2 b_3}, \qquad e_3 = \frac{\lambda_1(a_2 \lambda_2 + a_1 e_1 b_2)}{a_2 \lambda_2 b_3 - a_3 \lambda_3 b_2}. \end{gathered} \tag{29}$$

Значение параметра e_1 можно найти из равенства $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$. В данном случае в силу (10) и (26) $B_{11} = 0$, $B_{22} = 0$, $B_{33} = 0$, но, очевидно, $B_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$. Кинематические уравнения из (26) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= a_2 \lambda_2 \nu_3 - a_3 \lambda_3 \nu_2 - a_1 b_3 \nu_1 \nu_2 + a_1 b_2 \nu_1 \nu_3 + \frac{1}{\lambda_1}(a_3 \lambda_3 b_2 - a_2 \lambda_2 b_3)(\nu_2^2 + \nu_3^2), \\ \dot{\nu}_2 &= a_3 \lambda_3 \nu_1 - a_1 \lambda_1 \nu_2 + a_1 b_2 \nu_2 \nu_3 + a_1 b_3(\nu_1^2 + \nu_3^2) - \frac{1}{\lambda_1}(a_3 \lambda_3 b_2 - a_2 \lambda_2 b_3)\nu_1 \nu_2, \\ \dot{\nu}_3 &= a_1 \lambda_1 \nu_2 - a_2 \lambda_2 \nu_1 - a_1 b_2(\nu_1^2 + \nu_2^2) - a_1 b_3 \nu_1 \nu_3 - \frac{1}{\lambda_1}(a_3 \lambda_3 b_2 - a_2 \lambda_2 b_3)\nu_1 \nu_3. \end{aligned} \tag{30}$$

Уравнения (30) имеют интеграл $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и поэтому задача интегрирования этих уравнений может быть сведена только к уравнению первого порядка на функцию $\nu_2(\nu_1)$.

Рассмотрим теперь случай, когда при подстановке $\omega_i = a_i x_i$, с учетом (5), в равенство (4) получим функцию переменных ν_1, ν_2, ν_3, которая обращается в нуль вследствие интеграла $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$. Тогда найдем следующие условия на параметры:

$$a_1 b_1 = a_2 c_2 = a_3 d_3, \qquad a_1 e_1 \lambda_1 + a_2 e_2 \lambda_2 + a_3 e_3 \lambda_3 = -a_1 b_1, \tag{31}$$

$$a_1 e_1 b_1 + a_2 e_2 c_1 + a_3 e_3 d_1 = -a_1 \lambda_1, \qquad a_1 e_1 b_2 + a_2 e_2 c_2 + a_3 e_3 d_2 = -a_2 \lambda_2, \tag{32}$$

$$a_1 e_1 b_3 + a_2 e_2 c_3 + a_3 e_3 d_3 = -a_3 \lambda_3, \tag{33}$$

$$a_1 b_2 + a_2 c_1 = 0, \qquad a_1 b_3 + a_3 d_1 = 0, \qquad a_2 c_3 + a_3 d_2 = 0. \tag{34}$$

В качестве независимых параметров выберем b_1, b_2, b_3 и c_3. Из (31), (34) найдем

$$c_1 = -\frac{a_1 b_2}{a_2}, \qquad d_1 = -\frac{a_1 b_3}{a_3}, \qquad c_2 = \frac{a_1 b_1}{a_2}, \qquad d_2 = -\frac{a_2 c_3}{a_3}, \qquad d_3 = \frac{a_1 b_1}{a_3}. \tag{35}$$

Легко показать, что последнее равенство из (31) является следствием равенств (32) и (33). Поэтому рассмотрим последние уравнения, считая, что они служат для определения величин e_1, e_2, e_3. Вычислим определитель, составленный из коэффициентов при этих величинах:

$$\Delta = a_1 b_1 [a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2 c_3^2] \neq 0.$$

Таким образом, показана разрешимость уравнений (32), (33) относительно e_1, e_2, e_3. Используя равенство $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$, получим дополнительное условие на параметры. Кинематические уравнения из (6) можно записать так :

$$\begin{aligned}
\dot\nu_1 &= a_2\lambda_2\nu_3 - a_3\lambda_3\nu_2 - a_1b_3\nu_1\nu_2 + a_1b_2\nu_1\nu_3 - a_2c_3(\nu_2^2 + \nu_3^2),\\
\dot\nu_2 &= a_3\lambda_3\nu_1 - a_1\lambda_1\nu_3 + a_1b_2\nu_2\nu_3 + a_2c_3\nu_1\nu_2 + a_1b_3(\nu_1^2 + \nu_3^2),\\
\dot\nu_3 &= a_1\lambda_1\nu_2 - a_2\lambda_2\nu_1 + a_2c_3\nu_1\nu_3 + a_1b_3\nu_2\nu_3 - a_1b_2(\nu_1^2 + \nu_2^2).
\end{aligned} \tag{36}$$

Как и в предыдущем случае, эти уравнения имеют интеграл $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$. Однако представляет большой интерес привести пример разрешимости уравнений (36) в квадратурах и указать свойства годографов в исследуемом случае изоконических движений. Для этой цели положим $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $b_3 = 0$, $c_3 = 0$. Тогда очевидно $\lambda_3 = -\dfrac{a_1b_1}{a_3}$, $e_3 = 1$, $e_1 = e_2 = 0$, $c_1 = -\dfrac{a_1b_2}{a_2}$, $c_2 = \dfrac{a_1b_1}{a_2}$, $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = \dfrac{a_1b_1}{a_3}$. В силу этих равенств уравнения (55) легко интегрируются

$$\nu_1 = -\frac{\sin a_3\lambda_3\tau}{ch\ a_1b_2\tau}, \qquad \nu_2 = \frac{\cos a_3\lambda_3\tau}{ch\ a_1b_2\tau}, \qquad \nu_3 = -th\ a_1b_2\tau, \tag{37}$$

где $\tau = t - t_0$, а t_0 – произвольная постоянная. Компоненты вектора угловой скорости, в силу (5), (37), выражаются равенствами

$$\begin{gathered}
\omega_1 = \frac{a_1\mu_0}{ch\ a_1b_2\tau}\cos(a_3\lambda_3\tau + \varphi_0), \qquad \omega_2 = \frac{a_2\mu_0}{ch\ a_1b_2\tau}\sin(a_3\lambda_3\tau + \varphi_0),\\
\omega_3 = a_1b_1(1 - th\ a_1b_2\tau),
\end{gathered} \tag{38}$$

где $\mu_0 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = \dfrac{b_1}{b_2}$. Параметры задачи из равенств (11) – (14) удовлетворяют соотношениям

$$s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = \frac{a_1^2b_1^2}{a_2}, \qquad B_{11} = \frac{b_1}{a_2a_3}(a_2a_3 - a_1a_3 - a_1a_2),$$

$$B_{22} = \frac{b_1}{a_2a_3}(a_1a_3 - a_2a_3 - a_1a_2), \qquad B_{33} = \frac{b_1}{a_2a_3}(a_1a_2 - a_2a_3 - a_1a_3),$$

$$B_{12} = \frac{b_2}{a_2}(a_2 - a_1), \qquad B_{13} = 0, \qquad B_{23} = 0, \qquad C_{12} = \frac{a_1b_1b_2}{a_2}(a_1 - a_2),$$

$$C_{13} = C_{23} = 0, \qquad C_{11} = C_{33} + \frac{a_1b_1^2}{a_3}(a_1 - a_3) - \frac{a_1^2}{a_2}b_2^2,$$

$$C_{22} = C_{33} + \frac{a_1^2b_1^2}{a_2a_3}(a_2 - a_3) - a_1b_2^2.$$

Эти условия показывают, что по заданным параметрам a_i $(i = 1, 2, 3)$, b_1, b_2 всегда можно определить величины B_{ij}, C_{ij}, и s_i. Из ограничений на параметры λ_i, s_i, e_i вытекает, что векторы $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{e}$ коллинеарны и направлены по третьей главной оси подвижной системы координат.

Выясним свойства годографа вектора угловой скорости. Очевидно, что он лежит на эллипсоиде вращения

$$b_1^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + (b_1^2 + b_2^2)(\omega_3 - a_1 b_1)^2 = a_1 b_1 (b_1^2 + b_2^2), \tag{39}$$

уравнение которого получаем подстановкой величин

$$\nu_1 = \frac{\omega_1 b_1 - \omega_2 b_2}{a_1(b_1^2 + b_2^2)}, \qquad \nu_2 = \frac{\omega_1 b_2 + \omega_2 b_1}{a_1(b_1^2 + b_2^2)}, \qquad \nu_3 = \frac{\omega_3 - a_1 b_1}{a_1 b_1}$$

в интеграл $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$. Соотношения (38) показывают, что при $\tau \to \infty$ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ стремятся к нулю и подвижный годограф, имея спиралевидную форму и располагаясь на эллипсоиде (39), асимптотически стремится к точке с нулевыми координатами. В силу свойства изоконичности неподвижный годограф будет симметричен подвижному (38) относительно касательной к ним плоскости. Движение тела асимптотически стремится к состоянию покоя.

Авторы выражают благодарность Г.В. Мозалевской за ценные замечания, высказанные при обсуждении рукописи статьи.

1. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1978. – 294 с.
2. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. - Киев: Наук. думка, 1984. – 288 с.
3. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч.: В 2-х т. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – Т.2. – С. 130-152.
4. *Орешкина Л.Н.* О двух задачах динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 1987. – Вып.19. – С. 20–30.
5. *Орешкина Л.Н.* Об уравнениях М.П.Харламова // Там же. – С. 30–33.
6. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 502–507.
7. *Харламов П.В.* О решениях уравнений динамики твердого тела // Там же. – 1965. – **29**, вып. 3. – С. 567–572.
8. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–244.

Донецкий гос. ун-т,
Донецкий гос. ун-т экономики и торговли
Получено 22.10.99