НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ВЫПУСК 30

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Межведомственный сборник научных трудов Основан в 1969 г.

ДОНЕЦК 2000

УДК 531.38

 П.В. Харламов

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основной раздел теоретической механики - динамика твердого тела (ДТТ) - почти целиком сформирован Л.Эйлером[1]. Он ввел все кинематические и динамические характеристики тела, ему принадлежат не только динамические уравнения, но и обе формы кинематических, хотя одну из них сейчас называют уравнениями Пуассона. Если проследить историю создания ДТТ в работах Эйлера, то нетрудно установить, что ее создание стимулировала одна из важнейших задач небесной механики - задача о прецессии и нутации оси Земли. Эйлеру же принадлежит и первый результат в построении точных решений, он свел к квадратурам задачу о движении тела по инерции. Отметим, попутно, что сами эти квадратуры, бесспорно, повлияли на развитие эллиптических функций.

Как механик, Эйлер четко отличал появляющиеся в задаче объективные факторы от субъективных. Установив объективный факт существования в теле трех ортогональных главных осей инерции, он полагал вполне естественным именно к этим осям

[1]Изложение основных результатов работ Эйлера [85-88] имеется в работе [76]. Их содержание приведено так же в главах 2, 3 монографии [7].

относить формируемую математическую модель движения тела - систему дифференциальных уравнений и достиг при этом ее наибольшей простоты.

Вопросы ДТТ рассматривал и математик Ж.Лагранж [27]. В своей предельно идеализированной формализованной конструкции механики он при обсуждении "земных" задач полагает связи идеальными (лишенными трения), и у него появляется задача о движении тела, имеющего неподвижную точку, которую теперь полагают центром идеального сферического шарнира. В отличие от Эйлера, Лагранж не увидел преимуществ главных осей и не фиксировал должным образом связанную с телом систему координат. Напротив, записывая кинетическую энергию со всеми компонентами тензора инерции (включая несущественные - центробежные) он в таком излишне усложненном представлении решения Эйлера видит обобщение этого решения, чего, конечно же, нет. Отметим еще, что в задачах ДТТ он отказывается от своих обобщенных координат, отдавая предпочтение переменным, введенным Эйлером, подчеркнув тем самым преимущества постановки Эйлера. Впрочем, в случае осесимметричного по распределению масс тела Лагранж использует в качестве обобщенных координат углы Эйлера. При отсутствии сопротивления в случае действия одной лишь активной силы - силы тяжести для тела, закрепленного в неподвижной точке, находящейся на оси симметрии тела, сводит к квадратурам второй после Эйлера случай интегрируемости в ДТТ (1813 г.). Характеризуя дальнейшее развитие этой классической задачи, обычно говорят о третьем случае сведения задачи к квадратурам, указанном в 1888 году С.В.Ковалевской [19, 20]. А между тем, в период между публикациями Лагранжа и Ковалевской интенсивно развивалось другое направление исследований, заложенное механиком Л.Пуансо [90]. Имея в виду результаты Даламбера, Эйлера и Лагранжа, Пуансо заметил, что во всех этих исследованиях нет ничего кроме вычислений, и наглядное представление о движении тела в них отсутствует. В лучшем случае в результате более или менее длинных выкладок приходят к определению положения тела в указанный момент времени, но совсем не видят, каким образом тело приходит к этому положению.

И образцом наглядного представления движения явилось геометрическое решение задачи, которое Пуансо дал телу, движущемуся по инерции. Он показал, что в таком движении неизменно связанный с телом эллипсоид, закрепленный в центре, катится без скольжения по неподвижной плоскости. Он ввел в рассмотрение *полодию* и *герполодию*, подвижный и неподвижный аксоиды.

Тем самым Пуансо четко противопоставил математика, для которого целью является исследование системы дифференциальных уравнений, механику, который видит свою цель в исследовании объективно протекающего явления - движения тела - и рассматривающего математическое решение лишь как средство для достижения своей цели.

Этот результат произвел глубокое впечатление на современников, которые справедливо стали называть и само математическое решение случаем интегрируемости Эйлера-Пуансо, и движение тела - движением по Пуансо. Появились попытки и других представлений движения, не получившие, однако, достаточной наглядности.

Результат Пуансо в течение длительного времени оставался непревзойденным, хотя в этом направлении работали такие выдающиеся математики, как Дарбу, Якоби, а также Альфан, Лоттнер, Мак-Куллаг и другие.

Уже этот краткий обзор развития ДТТ за 150 лет после Эйлера подводит нас к естественному вопросу - какую цель ставили эти исследователи, обращаясь к уравнениям ДТТ? У Даламбера и Эйлера эта цель была четко сформулирована: их интересовало движение полюсов Земли по отношению к небесной сфере - движение одной точки рассматриваемого тела. И поскольку речь шла о вполне конкретном объекте со вполне определеннными значениями характеризующих его числовых величин, исследователи получили и вполне определенный ответ на поставленный вопрос, определив два типа прецессий оси Земли.

Однако уже в общетеоретической задаче о движении тела по инерции результат Эйлера не был столь же определенным. Действительно, коль скоро речь идет о задаче механики, то результатом ее исследования должна была быть полная информация об изучаемом движении. Эйлер же свел задачу к квадратурам, которые в общем случае не давали возможности получить даже математическое решение: установить зависимость основных переменных от времени посредством известных в то время элементарных функций. В дальнейшем эта математическая задача была в известном смысле обращена: отнесенные к главным осям уравнения движения тела по инерции, имевшие два конечных соотношения между основными переменными - найденные Эйлером первые интегралы этих уравнений - были восприняты как математическое представление связей между тремя функциями, фактически определяемыми этими уравнениями. Другими словами, математическое решение задачи о движении тела по инерции представлялось не путем нахождения зависимостей основных переменных от времени из имеющихся дифференциальных уравнений, а наоборот, эти дифференциальные уравнения воспринимались как соотношения, вводящие в математический обиход новые функции, свойства которых устанавливались по структуре правых частей этих дифференциальных уравнений.

Фактически уравнения Эйлера движения тела по инерции послужили основанием нового раздела математики - теории эллиптических функций, а именно того ее раздела, в котором были созданы функции Якоби.

По существу, тот же подход был реализован и в случае интегрируемости Лагранжа. Однако здесь более удобным оказалось представление эллиптических функций, данное Вейерштрассом.

Такой же обращенный подход в построении математического решения был реализован в случае интегрируемости Ковалевской. Более того, она уже на этапе поиска решения задавалась его математической структурой, которую ей подсказывала достаточно развитая к тому времени теория абелевых интегралов. И в этом математическом решении вводились специальные функции - двоякопериодические функции Розенхайна.

И такое чисто математическое направление, сводящееся в лучшем случае к установлению зависимости основных переменных от времени посредством специально вводимых функций, приспосабливаемых к рассматриваемой задаче, надолго определило аналитическое направление исследований. По-видимому, это было связано с тем, что формально выполнимые математические операции оказались для многих более доступными, чем пространственные геометрические образы, посредством которых могла бы быть реализована идея Пуансо. К тому же реализация этой идеи в других случаях оказалась задачей, с которой в течении долгого времени не могли справиться крупнейшие геометры. Длительные попытки реализовать идею даже в случае Лагранжа так и не привели к желаемой цели. Известный результат Дарбу и Якоби с достаточной полнотой изложенный, например, в трактате Г.К.Суслова [42], требует отслеживания суперпозиции двух движений: прямого и обращенного движений по Пуансо. Конечно же, столь сложное представление далеко от той наглядности, какую Пуансо дал движению тела по инерции.

С еще большими трудностями сталкивались исследователи при попытках нахождения наглядного представления движения тела в случае Ковалевской, хотя в этом направлении работал выдающийся механик Н.Е.Жуковский с присущим ему геометрическим складом мышления. Он был активным сторонником геометрических подходов к решению задач механики. Именно ему принадлежит программное высказывание: "Можно говорить, что математическая истина только тогда должна считаться обработанной, когда она может быть объяснена всякому из публики, желающему ее усвоить. Я думаю, что если возможно приближение к этому идеалу, то только со стороны геометрического толкования или моделирования" [14].

В стремлении к такому идеалу значимость полученных в ДТТ математических результатов можно оценивать лишь той их частью, которая используется при построении полного решения. Здесь появился новый термин *полное* решение, который естественно возник как при восприятии основной идеи Пуансо, так и при оценке Жуковским наглядного представления движения.

В упомянутых так называемых общих случаях интегрируемости Лагранжа и Ковалевской, как было уже отмечено, приблизиться к уровню наглядности, полученному Пуансо, не удавалось. Однако С.А.Чаплыгин, замечательный механик и искусный аналитик, очевидно, под влиянием Н.Е.Жуковского, в каждой из изучавшихся им задач ДТТ [84] довольно близко приближался к указанному Н.Е.Жуковским идеалу. А в одном случае движения тела в жидкости он обобщил результат Пуансо, представив движение тела качением без скольжения неизменно связанного с телом эллипсоида по неподвижному желобу. Разработанный С.А.Чаплыгиным в этом случае интегрируемости метод нахождения этого желоба был в 1959 году распространен на задачу о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, в центральном ньютоновском поле сил [70]. Движение тела представлено качением без скольжения неизменно связанного с ним эллипсоида по внутренней поверхности эллиптического цилиндра, ось которого содержит неподвижную точку тела. Это прямое обобщение результата Пуансо. Его результат в этом случае является предельным и следует при неограниченном удалении центра притяжения от центра эллипсоида - неподвижной точки тела.

В других случаях интегрируемости С.А.Чаплыгин представлял движение тела качением связанной с телом кривой по некоторой поверхности, однако для получения оставляемой этой кривой следа на неподвижной поверхности недоставало предложенных им уравнений.

В 1964 году было найдено замыкающее уравнение неподвижного аксоида. И основная теорема кинематики о существовании подвижного и неподвижного аксоидов в каждом движении твердого тела привела к конструктивному методу построения полных решений исследуемых задач. Представление движения тела посредством аксоидов придало задачам ДТТ исчерпывающую наглядность. Это дало основание называть такой результат *полным решением* задач механики [65, Очерк 11; 49]. С этих позиций появился и новый критерий оценки математических решений, в том числе и форм их представлений. Предпочтительной оказывалась та форма, которая была наиболее приспособлена для исследования аксоидов средствами компьютерной графики.

Визуализация исследуемого движения, представление его посредством выведенного на монитор фильма, потребовали специфической работы по созданию соответствующего программного обеспечения. Имеющиеся уравнения подвижного и неподвижного аксоидов определяют в пространстве две линейчатые поверхности, касающиеся друг друга по их общей образующей. Она является в рассматриваемый момент мгновенной осью вращения движущегося тела. Для каждого момента времени выводится изображение положения подвижного аксоида на неподвижном по созданным алгоритмам [50]. И для большей наглядности выполняется процедура удаления невидимых в данном положении образующих этих поверхностей [44]. Иногда у исследователя появляется желание показывать на экране и само движущееся тело [43]. При этом можно ограничиться его представлением посредством центрального эллипсоида инерции (или гирационного эллипсоида), с достаточной полнотой характеризующего динамические свойства рассматриваемого тела [46].

Первые публикации, сообщавшие о визуализации движения тела на основе новых кинематических уравнений, имели качественный характер и обходились без конкретизации имеющихся в уравнениях параметров [1-3, 8-10, 13, 16-18, 21, 23, 32, 33, 45, 51, 53, 55-60, 62, 67, 69, 71, 72, 77, 89]. До появления персональных компьютеров предпринимались попытки создания фильмов, демонстрирующих движение тела посредством аксоидов [89]. Создание таких фильмов требовало трудоемкой работы. Персональные компьютеры, и в особенности их последние модели с большой памятью и быстродействием, буквально совершили революцию в подобного рода исследованиях. И в последние годы появилась серия работ [4-6, 22, 31, 34-37, 43, 44, 47, 52, 54], сообщавших о компьютерной визуализации. Но выполнявшиеся в этом направлении исследования показали, насколько обширное поле творческой, научной деятельности в ДТТ возникло при построении точных решений. И принципиальным моментом здесь явилось наличие в классических задачах ДТТ больших наборов свободных параметров - они и определяют разнообразие форм аксоидов в каждом из найденных точных решений задачи. Так в ДТТ сформировано новое научное направление, в котором успехи предстоящих исследований основываются на широком использовании современных средств компьютерной графики. Каждое найденное точное решение в различных задачах ДТТ от математического до приведения к полному решению составит отдельную главу при современном изложении состояния этой науки. А некоторые из математических решений для исчерпывающего анализа появляющихся при варьировании параметров всевозможных форм аксоидов могут потребовать отдельных монографий.

Однако обращение к персональным компьютерам приводит к значительной переоценке самого понятия решения задачи. Оказалось, что этот термин сам по себе весьма расплывчат, и в его содержание разные авторы вкладывают и различный смысл. Так, например, в классической задаче ДТТ могут термин решение отнести к результатам различного уровня полученной информации.

Своеобразное направление работ сформировалось на основе известной теоремы о четвертом интеграле классических задач ДТТ - его, якобы, достаточно для сведения задачи к квадратурам. В действительности же воспользоваться этой теоремой удается лишь в исключительных случаях, и это обусловлено тем, что существующие интегралы, как и предполагаемый четвертый, вообще говоря, нелинейны по основным переменным задачи, содержат параметры, и реализация самой процедуры сведения к квадратурам обычно оказывается невыполнимой. Тем более, как было показано (см., например, [12]), отвечающий структуре уравнений четвертый алгебраический интеграл, за исключением уже найденных случаев, не существует, а интегралы другой структуры в ДТТ найдены не были.

Возможности построения решений существенно расширились, когда их начали искать посредством инвариантных соотношений. В настоящее время появилось достаточно много публикаций, сообщающих о найденных решениях. Это потребовало и обзоров таких результатов. Они начали появляться с 1973 года [25], а последующие обзоры включали и новые результаты [11, 26, 63, 64]. Последние во времени обзоры содержат достаточно полный перечень точных решений. Один из них содержит сводку результатов в двух классических задачах ДТТ - задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой и в задаче о движении по инерции ограниченного многосвязной поверхностью тела в простирающейся беспредельно идеальной несжимаемой жидкости [30]. Другой обзор излагает результаты по построению точных решений систем связанных твердых тел [73].

Наличие таких результатов открывает большие перспективы дальнейших научных исследований в области аналитической динамики твердого тела. Здесь в первую очередь необходимо для каждого сообщения установить уровень информации о решении, достаточность ее для сведения задачи к квадратурам в тех случаях, когда такая информация об этом отсутствует. Таковы, например, некоторые случаи интегрируемости задачи о движении тела в жидкости, где сообщается лишь о четвертом интеграле без этапа сведения задачи к квадратурам. В некоторых случаях, когда решение строилось на основе инвариантных соотношений, оказывалось, что задача сводится к одному дифференциальному уравнению, для которого, вообще говоря, не могут быть указаны квадратуры.

Если анализ информации о решениях будет выполнен, то в результате определятся те математические решения, которые могут быть доведены до уровня полных решений.

Критический анализ публикаций по построению точных решений необходим еще и с другой позиции. Дело в том, что в силу специфики задач ДТТ оказалось возможным формирование математических моделей одной и той же задачи, существенно различающихся по своей структуре, зависящей от выбора основных переменных задачи, отбора существенных параметров, от сохранения, а иногда и искусственного введения в систему несущественных параметров. Построение решений для одной и той же задачи нередко проводилось разными авторами при использовании таких различных форм математической модели. Это привело к тому, что сообщалось об одном и том же решении, лишь представленном различной записью его. И здесь желательно при сопоставлении научных статей установить автора первого сообщения о результате и показать, что в последующих публикациях нового результата нет. Замечу, что подобное сопоставление в ряде случаев оказывается отнюдь не простым. До настоящего времени сохраняются в неприкосновенности работы, о которых из механических соображений можно с большой долей уверенности предполагать, что речь в них идет об одном и том же результате, но идентификация этих сообщений до сих пор не выполнена.

Отметим еще одну сторону вопроса. С.А.Чаплыгин в своих работах продемонстрировал глубокое понимание изучаемой задачи механики, показав, как следует уже на этапе постановки задачи устранять все несущественное в рассматриваемом явлении, максимально упрощая подлежащую исследованию математическую структуру. К сожалению, эти великолепные образцы не были восприняты во многих последующих публикациях. Появилось немало работ, в которых уже известные точные решения "обобщались" введением в систему избыточных несущественных параметров, и, тем самым, предлагалось "решение", якобы обобщающее уже известный результат, иногда являвшийся уже классическим. Отмечу, что необходим их критический анализ, отсеивающий подобные псевдорешения из перечня действительно содержательных результатов. И, наконец, отметим уже накопившееся немалое количество работ, сообщавших о якобы новых решениях. Критический анализ этих работ показал, что в этих сообщениях речь идет либо о решениях уже известных, но представленных в другой форме, либо о результатах, попросту, являющихся ошибочными, поскольку эти "решения" не удовлетворяют системе уравнений. Некоторые из таких результатов проанализированы в работах [15, 24, 38-41, 48, 66, 74, 78-83].

В последние годы в ДТТ предлагались математические модели, основанные на умозрительных положениях, не имеющих механического смысла. Разумеется, и "результаты", получаемые на основе таких моделей, не имели отношения к механике. Лишь некоторые из таких работ были подвергнуты критическому анализу [29; 65: Очерки 9, 10; 75].

Давно назрела необходимость тщательной чистки всего множества точных решений. И, по-видимому, исчерпывающий критический анализ их может послужить содержанием целой монографии.

Стоит заметить, что подвижный и неподвижный аксоиды объективны. Их форма и процесс обкатывания совершенно не зависят от тех субъективных факторов, которые тот или иной исследователь внес в процесс построения решения. И при построении полного решения может быть обнаружено, что различающиеся по форме сообщения о точном решении описывают одно и то же движение тела.

Остановимся теперь на тех проблемах, которые возникают при визуализации движения средствами компьютерной графики.

При обращении к математическому результату - представленному в аналитической форме точному решению системы дифференциальных уравнений, моделирующей движение тела, его необходимо привести к виду, наиболее удобному для составления программ (или использования уже имеющихся) визуализации изучаемого движения. Так как в большинстве найденных точных решений их аналитическое представление имеет особенности (точки ветвления, полюса и тому подобное), наличие таких особенностей необходимо предварительно установить и известными путями устранить их. В противном случае они окажутся препятствием к визуализации движения.

Поскольку годографы представляют собой пространственные полосы линейчатых поверхностей, при их проектировании на картинную плоскость одни части этих полос могут перекрываться другими частями. И здесь возникает дилемма выбора более наглядного представления их взаимного положения. Если допустить, что образующие аксоиды полосы прозрачны, то на картинной плоскости в одной и той же области может оказаться наложение проекций различных образующих. Это обстоятельство может быть не столь существенным при некоторых достаточно простых формах аксоидов. Однако в общем случае аксоиды имеют непростую форму и целесообразно полагать их непрозрачными, что, в свою очередь, порождает определенные проблемы. Во-первых, необходим алгоритм и программное обеспечение удаления в картинной плоскости частей аксоидов, оказывающихся в текущий момент времени невидимыми. Такой алгоритм и соответствующие программы были созданы [44]. При реализации их выяснилось, что некоторые принципиально важные элементы создаваемой картины движения могут оказаться невидимыми. Естественно возникает задача, предусмотреть в создаваемых программах формирование своеобразных "окон" - обеспечить прозрачность тех участков аксоидов, которые закрывают интересующие нас элементы. И в первую очередь здесь следует обеспечивать видимость той образующей аксоидов, по которой происходит их соприкосновение.

Подвижный аксоид неизменно связан с движущимся телом и в наглядном представлении он сам может выступать в качестве такого тела. Однако в некоторых случаях может появиться желание ввести в создаваемую картину движения и само движущееся тело. Это приводит к дополнительным осложнениям в геометрической конструкции, состоящей в таком случае из трех поверхностей. Уже появились сообщения о подобных конструкциях при построении полного решения задачи о движении гирошара Жуковского и задачи о движении по инерции тела, подчиненного неголономной связи.

Каково же состояние визуализации движения в настоящее время и каковы перспективы ее развития в дальнейшем?

Как было отмечено, начатые еще в 60-е годы и продолжавшиеся в дальнейшем попытки построения полных решений обычно носили качественный характер. В настоящее время все эти работы нуждаются в существенной корректировке, основывающейся на использовании средств компьютерной графики. Но и работы, использовавшие компьютеры первых поколений, ограничивались геометрической картиной весьма частных случаев движений. Обычно параметры системы подбирались так, чтобы и подвижный, и неподвижный аксоиды оказывались замкнутыми, что обеспечивало выделение в исследуемом движении случая его периодичности. При этом оказывалось достаточным выводить на монитор исследуемое движение лишь в течение одного периода, оно затем могло неограниченно воспроизводиться на последующих периодах.

И хотя существует мнение, что исследование общего (непериодического) движения не встретит принципиальных затруднений, однако практика построения полных решений показала, что обычно на этом пути появляются не предусмотренные ранее затруднения, обусловленные спецификой компьютерных методов.

И эти вопросы требуют дальнейших исследований.

К настоящему времени в дополнение к упоминавшимся классическим задачам о движении одного твердого тела появились постановки задач о движении систем твердых тел. И хотя переход уже к двум телам делает математическую модель их движения значительно более сложной по сравнению с моделью движения одного твердого тела, все же в задачах о движении взаимодействующих двух, трех и даже любого количества тел в недавнее время были построены наборы точных решений (см. об этом в [30, 28]). Можно сказать, что их поиски только начаты и в дальнейшем при их развитии количество таких решений может быть увеличено. Понятно, что и в этих задачах естественно с позиций механика построение полных решений, приносящих в наглядной форме исчерпывающую информацию об особенностях движения каждого из тел системы.

Приятно отметить, что первые работы в этом направлении уже появились. В ряде публикаций информация о точных решениях сопровождается приведением уравнений аксоидов. И уже есть сообщения о компьютерной визуализации некоторых из этих движений. Однако следует признать, что это лишь первые ростки на обширном поле, которые появляются при постановке таких задач.

Проведенные рассуждения адресованы лицам определенного образного склада мышления. Они сочтут требования Пуансо и Жуковского естественными и необходимыми для задач ДТТ. Именно для них в сжатой форме будут сформулированы возможные направления дальнейших исследований.

1. Каждая задача ДТТ может и должна получить полное решение, дающее наглядное представление об исследуемом движении.

2. Математическое решение задачи (точное или приближенное) служит предварительным вспомогательным этапом для построения полного решения. Строго говоря, этот математический этап в прикладных разработках может оказаться и необязательным, так как необходимые для полного решения величины (компоненты угловой скорости тела и направляющие косинусы, устанавливающие взаимную ориентацию базисов) могут быть получены измерениями на движущемся объекте.

3. Большую теоретическую ценность представляет набор точных математических решений в различных классических задачах аналитической ДТТ. Критический анализ всех таких решений должен быть проведен с целью отбора тех из них, которые могут быть использованы для построения полных решений.

4. Обладающие большой памятью и быстродействием персональные компьютеры последних поколений предоставили обширные возможности изучения движений в их наглядном представлении. Они служат и строгим контролером теоретических выкладок. Многие погрешности в последних немедленно проявляются в наблюдаемой картине движения в виде невязок, несоответствий элементов аксоидов. С этих позиций очевидна необходимость критического анализа полных решений, построение которых основывалось лишь на качественных методах, и реализация их современными средствами компьютерной графики.

5. Следует продолжить и аналитические исследования по построению математических решений. Даже в классической задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой, где, казалось бы, поиски математических решений столкнулись с необходимостью анализа громоздких переопределенных систем условий, практически уже невыполняемого обычными средствами, появляется надежда (по крайней мере в рекламе компьютерных средств) выполнения такого анализа в будущем. В других задачах еще далеко не исчерпаны возможности использования конструктивного метода инвариантных соотношений [61, 68].

6. Необходимо продолжить критический анализ публикаций, сообщающих об открытии новых точных решений классических задач ДТТ. Уже выявлено немало случаев, когда предлагаемые результаты либо не новы, либо ошибочны. Следует преодолеть иногда встречающийся психологический барьер негативного восприятия критических публикаций, без которых наука не может нормально развиваться.

This work was supported, in part, by the International Soros Science Education Program (ISSEP) through grant N EPU081037.

1. *Бурлака П.М.* Кинематическое истолкование движения гиростата в одном решении Е.И.Харламовой // Механика твердого тела.- 1982. - Вып. 14.- С. 9-20.

2. *Бурлака П.М., Горр Г.В.* Движение твердого тела в одном частном случае интегрируемости уравнений Эйлера - Пуассона // Там же.- 1974.- Вып. 7.- С. 3-9.

3. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Изоконические движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - 1982. - Вып.14. - С. 20-33.

4. *Гашененко И.Н., Касяник В.Н.* Один частный случай движения гироскопа С.В.Ковалевской // Там же. - 1983. - Вып.15. - С. 31-34.
5. *Гашененко И.Н.* Исследование одного класса движений гироскопа Чаплыгина // Там же. -1985. - Вып.17. - С. 6-9.
6. *Гашененко И.Н.* Движение гироскопа Ковалевской при нулевой постоянной интеграла площадей // Там же.- 1993.- Вып. 25.- С. 7-16.
7. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова А.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. - Киев: Наук.думка, 1978. - 296 с.
8. *Горр Г.В., Левицкая Г.Д.* Об одном периодическом движении гироскопа Горячева-Чаплыгина //Механика твердого тела. - 1971. - Вып.3. - С. 101-106.
9. *Горр Г.В., Савченко А.Я.* Об одном случае движения тяжелого твердого тела в решении С.В. Ковалевской // Там же. - 1970. - Вып.2. -С. 66-73.
10. *Горр Г.В., Савченко А.Я.* Об одном периодическом движении в решении С.В.Ковалевской // Там же. - 1971. - Вып.3. - С. 64-69.
11. *Демин В.Г., Степанова Л.А.* О построении и исследовании точных решений уравнений динамики твердого тела // Прикл. механика.- 1976.- 12, N 9.- С. 3-17.
12. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера-Пуассона. - Киев: Наук. думка, 1992. - 168 с.
13. *Елфимов В.С.* О геометрическом исследовании движения гироскопа Лагранжа // Механика твердого тела .- 1979.- Вып. 11. - С. 22-32.
14. *Жуковский Н.Е.* О значении геометрического истолкования в теоретической механике // Собр.соч.: В 8-и т. - М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. - Т. 7. - С. 9-15.
15. *Забелина Е.И.* О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Бобылева-Стеклова // Труды Донецкого индустриального института, 1957, т.XX, Вып.1. - С. 11-13.
16. *Ковалев А.М.* Кинематическое истолкование движения тела в случае Л.Н.Сретенского // Механика твердого тела. - 1968. - Вып.5. - С. 45-50.
17. *Ковалева Л.М.* Геометрическое исследование одного движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - 1971. - Вып.3. - С. 79-86.
18. *Ковалева Л.М.* Один случай движения гиростата по инерции. Разделяющие движения // Там же. - 1978. - Вып.10. - С.41-45.
19. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. - В кн.: Ковалевская С.В. Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948. - С.153-220 (Классики науки).
20. *Ковалевская С.В.* Мемуар об одном частном случае задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, когда интегрирование производится с помощью ультраэллиптических функций времени. - Там же. - С. 235-244.
21. *Коваль В.И., Харламов П.В.* О годографах угловой скорости гироскопа Ковалевской в случае Делоне // Механика твердого тела. - 1979.- Вып. 11.- С. 3-17.
22. *Кравчук Д.Н.* Геометрическое истолкование одного класса движений гиростата по инерции // Там же. - 1986.- Вып.18. - С. 15-22.
23. *Коносевич Б.И., Позднякович Е.В.* Движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, в двух частных случаях интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона // Там же . - 1970. - Вып.2. - С. 77-80.
24. *Кудряшова Л.В., Мозалевская Г.В.* Об одном классе решений задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Мат.физика. - 1968.- Вып. 5.- С. 139-150.
25. *Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* О точных решениях уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // История и методология естественных наук.- М.: Изд-во Моск. ун-та.- 1973.- Вып.14.- С. 225-241.
26. *Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Донецкая школа динамики твердого тела // Исследования по истории физики и механики. М.: Наука, 1987.- С. 45-64.
27. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. - М.; Л.: Гостехиздат, 1950. - Т.II. - 440 с.
28. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. - Донецк: ДонГТУ, 1996. - 238 с.
29. *Лесина М.Е.* О некоторых публикациях Г.В.Горра. - Донецк: ДонГТУ, 1999. - 18 с.
30. *Лесина М.Е., Кудряшова Л.В.* Новые постановки и решения задач динамики системы тел. - Донецк: ДонГТУ, 1999. - 268 с.

31. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Новый подход к построению аксоидов в задаче о движении системы двух связанных тел // Механика твердого тела. - 1993. - Вып.25. - С. 30-42.

32. *Мозалевская Г.В.* Исследование одного частного решения задачи о движении тяжелого гиростата // Там же. - 1970. - Вып.2. - С. 73-76.

33. *Мозалевская Г.В.* Исследование одного решения задачи о движении тяжелого гиростата // Там же. 1971. - Вып.3. - С. 87-90.

34. *Орешкина Л.Н., Харламов А.П.* Движение гироскопа Е.И.Харламовой в случае А.И.Докшевича // Там же.- 1983. - Вып.15. - С. 57-61.

35. *Сергеев Е.В.* О движении гиростата в случае А.И.Докшевича // Там же.- С. 39-47.

36. *Сергеев Е.В.* Об асимптотических к покою движениях гиростата в случае А.И.Докшевича // Там же.- 1985.- Вып. 17.- С. 3-6.

37. *Сергеев Е.В.* Об одном периодическом движении гиростата в случае Докшевича // Там же.- 1986.- Вып. 18.- С. 10-12.

38. *Степанова Л.А.* Об одном ошибочном утверждении в задаче о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - 1973. - Вып.5. - С. 24-27.

39. *Степанова Л.А.* К вопросу о найденных точных решениях уравнений динамики твердого тела // Там же. - 1975. - Вып.7. - С. 86-91.

40. *Степанова Л.А.* Об попытке построения четвертого интеграла уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - 1976. - Вып.8. - С. 76-77.

41. *Степанова Л.А.* О неудавшейся попытке защитить приоритет классиков задач динамики твердого тела // Там же. - 1990. - Вып.22. - С. 19-33.

42. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. - М.; Л.: Гостехиздат, 1946. - 655 с.

43. *Харламов А.П.* Построение полного решения для периодического движения гирошара // Механика твердого тела. - 1992. - Вып.24. - С. 62-68.

44. *Харламов А.П.* Об удалении невидимых линий при построении плоских проекций сложных трехмерных объектов // Там же.- 1993.- Вып. 25.- С. 70-75.

45. *Харламов А.П.* Движение по инерции тела, имеющего неподвижную точку и подчиненного неголономной связи // Там же. - 1995. - вып.27. - С. 21-31.

46. *Харламов А.П.* Об изображении движущегося твердого тела при построении компьютерной визуализации полных решений задач динамики // - Там же. - 1999. - Вып.28. - С. 67-70.

47. *Харламов А.П., Кравчук Д.Н.* Движение гироскопа А.И.Докшевича // Там же.- 1983. - Вып.15. - С. 35-39.

48. *Харламов М.П.* Об условно-линейном интеграле уравнений движения твердого тела, обладающего динамической симметрией // Там же. - 1978. - Вып.10. - С. 24-29.

49. *Харламов М.П.* О построении аксоидов пространственного движения твердого тела // Механика твердого тела. - 1980.- Вып. 12.- С. 3-8.

50. *Харламов М.П.* О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - 1981. - Вып.13. - С. 10-14.

51. *Харламов М.П.* Об одном классе движений гиростата // Там же. - 1983. - Вып.15. - С.47-56.

52. *Харламов М.П.* Об одном асимптотическом движении тяжелого гиростата // Там же.- 1986. - Вып.18. - С. 12-15.

53. *Харламов М.П., Кононыхин Г.А.* О движении по инерции системы двух твердых тел, связанных сферическим шарниром // Там же. - 1980. - Вып.12. - С. 52-63.

54. *Харламов М.П., Сергеев Е.К.* Построение полного решения одной задачи динамики твердого тела // Там же.- 1982.- Вып. 14.- С. 33-38.

55. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. матем. и механика.- 1964.- 28, No 3.- С. 502-507.

56. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование одного решения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Докл. АН СССР. - 1964. - 158. - No 5. - С.1048-1050.

57. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. - Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. - 221 с.

58. *Харламов П.В.* Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика.- 1965.- 29, N 1. - С. 26-34.

59. *Харламов П.В, Мозалевская Г.В.* Геометрическое истолкование некоторых движений гироскопа С.В.Ковалевской // Механика твердого тела. - 1973. - Вып. 5.- С. 5-24.

60. *Харламов П.В.* Движение гироскопа С.В.Ковалевской в случае Б.К.Млодзеевского // Там же.- 1975.- Вып. 7.- С. 9-17.

61. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Там же.- 1974.- Вып. 6.- С. 15-24.

62. *Харламов П.В.* Исследование решения с двумя линейными инвариантными соотношениями задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку (специальные случаи) // Там же.- 1976.- Вып. 8.- С. 37-56.

63. *Харламов П.В.* Новые методы исследования задач динамики твердого тела // Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. - М .: Наука, 1975.- С. 317-325.

64. *Харламов П.В.* Решения с инвариантными соотношениями некоторых задач динамики твердого тела // История механики гироскопических систем. - М.: Наука, 1975. - С. 5-19.

65. *Харламов П.В.* Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки.- Киев: Наук. думка, 1995. - 407 с.

66. *Харламов П.В.* Комментарии к статьям Л.А.Степановой, А.И.Хохлова // Механика твердого тела. - 1990. - Вып.23. - С. 36-43.

67. *Харламов П.В., Коваль В.И.* Движение гироскопа Ковалевской в случае Делоне // Там же.- 1982.- Вып. 14.- С. 38-54.

68. *Харламов П.В, Лесина М.Е.* Неопределенные множители. - Донецк, 1999. - с. 28. - (Препринт / НАН Украины Ин-т прикл. математики и механики; N 99.07.).

69. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В.* Исследование подвижного годографа угловой скорости в симметричном решении задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. - 1972. - Вып. 4. - С. 8-24.

70. *Харламова Е.И.* О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил // Изв.Сиб.отд. АН СССР. - 1959. - N 6. - С. 7-17.

71. *Харламова Е.И.* Кинематическое истолкование одного движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. - 1968. - **32**, N 2. - С. 298-305.

72. *Харламова Е.И.* Об одном движении тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. - 1970. - Вып.2. - С. 35-37.

73. *Харламова Е.И.* Обзор точных решений задач о движении систем связанных твердых тел // Там же.- 1998.- Вып.26(II). - С. 125-138.

74. *Харламова Е.И., Горр Г.В.* Об одной работе Н.И.Мерцалова // Там же. - С. 58-61.

75. *Харламова Е.И., Лесина М.Е.* К вопросу о решениях обобщенных уравнений динамики твердого тела // Там же. - 1997. - Вып.29. - С. 114-133.

76. *Харламова Е.И., Кудряшова Л.В., Мозалевская Г.В.* К истории формирования уравнений динамики твердого тела // Там же. - 1974.- Вып. 7. - С. 59-82.

77. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Исследование решения В.А.Стеклова уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика.- 1968.- Вып.5.- С. 194-202.

78. *Харламова Е.И., Степанова Л.А.* О некоторых утверждениях, относящихся к задаче интегрирования уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. - 1977. - Вып.9. - С. 45-58.

79. *Харламова Е.И., Степанова Л.А.* Об изоморфизме некоторых классических задач динамики твердого тела и попытках построения новых решений путем замены переменных // Там же.- 1988.- Вып. 20.- С. 1-13.

80. *Хохлов А.И.* О линейном интеграле дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - 1980. - Вып.12 . - С.51-52.

81. *Хохлов А.И.* Об одной безуспешной попытке защитить результат В.А.Стеклова // Там же. - Вып.23. - С. 26-36.

82. *Хохлов А.И., Степанова Л.А.* О некоторых попытках построения четвертого интеграла задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - 1981. - Вып.13. - С. 41-44.

83. *Хохлов А.И., Степанова Л.А.* Об одной попытке обобщения решения Гесса задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - 1982. - Вып.14. - С. 74-76.

84. *Чаплыгин С.А.* Собр.соч. в 4-х т. -М.;Л.: Гостехтеориздат, 1948. - Т.1. - 484 с.

85. *Euler L.* Dècouverte d'un nouveau principe de Mécanique. - Histoire de l'Ac.Royale des sc. et belles lettres. - Berlin, 1750, 1752. - **6**. - P. 185-217.
86. *Euler L.* Recherches sur la connaissance mécanique des corps // Ibid. - 1758, 1765. - **14**. - P. 131-153.
87. *Euler L.* Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable // Ibid., P.154-193.
88. *Euler L.* Du mouvement d'un corps solide quelconque lorsqu'il tourne aut. d'un axe mobile // Ibid.,**16**, 1760, 1767. - P. 176-227.
89. *Kharlamov M.P., Kharlamov P.V.* To solve a problem of rigid body dynamics. What does it mean? // Proceedings of the IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics. Academia of Sciènses of Turin. (June 7-11, 1982). Atti della emia delle scienze di Torino.- Vol. 117 (1983). - P.535-562.
90. *Poinsot L.* Theorie nouvelle de la rotation des cops // J.math pures et appl. - 1851. - **1**, No 16. - P.289-336.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк — Получено 15.09.99

УДК 531.38

©2000. **А.М. Ковалев, А.Я. Савченко**

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА: ПРОШЛОЕ, НАСТОЯЩЕЕ, БУДУЩЕЕ

Статья написана по материалам Круглого стола "Динамика твердого тела: прошлое, настоящее, будущее", состоявшегося на международной конференции "Устойчивость, управление и динамика твердого тела" 8 сентября 1999 г. в г.Донецке. Приведены выступления участников дискуссии, дан анализ результатов и развития динамики твердого тела в 20 столетии и предложены приоритетные направления ее будущего развития.

Задача интегрирования уравнений Эйлера-Пуассона [55] занимает важное место в современной науке. Она относится к тем задачам, решение которых было и остается делом чести самых выдающихся ученых своего времени. Надежду и энтузиазм исследователей поддерживает решение время от времени какой-либо из этих знаменитых задач. Таким выдающимся событием последнего времени является доказательство теоремы Ферма [62]. Отметим, что немаловажным фактором этого успеха были упорство и массовость исследователей, организовавших даже собственное общество. Оценивая успехи, достигнутые в динамике твердого тела и применяемых в ней математических дисциплинах, можно утверждать, что близка к своему решению и задача Эйлера-Пуассона. Безусловно, для этого нужны соединение и координация усилий всех работающих в этой области специалистов. Эту цель и ставила перед собой Донецкая школа механики, организуя конференцию и Круглый стол. Этой же цели служит и данная статья.

Прежде, чем переходить к основному содержанию, приведем предмет нашего исследования - уравнения Эйлера-Пуассона

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \Gamma \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Укажем также случаи интегрируемости этих уравнений, принадлежащие Л. Эйлеру [55], Ж. Лагранжу [26] и С.В. Ковалевской [20]. Полученные классиками науки эти решения остаются образцом для всех последующих исследователей.

1. **Предварительная подготовка.** Традиционно на конференциях в Донецке основное внимание уделяется проблемам динамики систем твердых тел. Успешной работе