

КАУСТИКИ НА ВОЛНОВЫХ ФРОНТАХ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

© Ю.В. Роганов, 2008

Украинский государственный геологоразведочный институт, Киев, Украина

Relations to determine the presence and place of caustics on the qSV -wavefronts in homogeneous transversely isotropic media are derived. The results are expressed as explicit exact formulas.

Введение. В однородной анизотропной среде фронт квазипоперечной волны от точечного источника может содержать каустики. В англоязычной литературе их называют *triplifications on the wave fronts*, на русском языке лагунами или особенностями [1] на волновых фронтах. Появление каустик связано с наличием участков вогнутости на кривой медленностей, называемой также кривой рефракции [1].

Каустики на фронте qSV -волн, распространяющихся в трансверсально-изотропной (ТИ) среде, возникают для большого количества пород земной коры [2, 3] и приводят к фазовым сдвигам сигналов [4,5] и явлению, когда в одном направлении могут распространяться до трех qSV -волн с разными групповыми скоростями. Эти факты следует учитывать при лучевом трассировании, расчете временных полей, миграции во временной области с использованием поперечных или обменных волн, а также в других процедурах моделирования и обработки геофизических данных.

В связи с этим актуален вопрос о соотношении параметров среды, при которых возникают каустики в ТИ-средах, а также определение углов, которые их ограничивают.

Существование каустик на волновом фронте в ТИ-среде определяется наличием участков вогнутости на кривой медленностей. Условия их возникновения описываются уравнениями относительно параметров среды. Граничные значения

углов, между которыми находятся участки вогнутости, также можно найти, решая полиномиальное уравнение.

Исследования в данном направлении проводили многие авторы, к настоящему времени получены точные [6–13] и аппроксимационные соотношения разной степени сложности [7, 9, 10]. Обзор литературы и введение понятия критической анизотропии (*critical strength*) для оценки в процентах средней девиации скоростей, при которой возникает каустика, представлены в статье [12].

Установлено, что в ТИ-средах каустики qSV -волновых фронтов бывают трех видов в зависимости от углов их расположения. Каустики на фронте волны (кривой групповых скоростей) могут располагаться:

- 1) вокруг оси симметрии ТИ-среды;
- 2) вокруг направлений, перпендикулярных оси симметрии;
- 3) при боковых углах.

Каустики первого и второго типов возникают при отрицательной неэллиптичности и могут существовать одновременно, а каустики третьего типа появляются при положительной неэллиптичности и не могут существовать одновременно с каустиками первого или второго типа. Введение термина «неэллиптичность» и подробное изложение этой классификации приведены ниже.

На рис. 1 изображены кривые групповых скоростей, имеющие каустики перечисленных выше

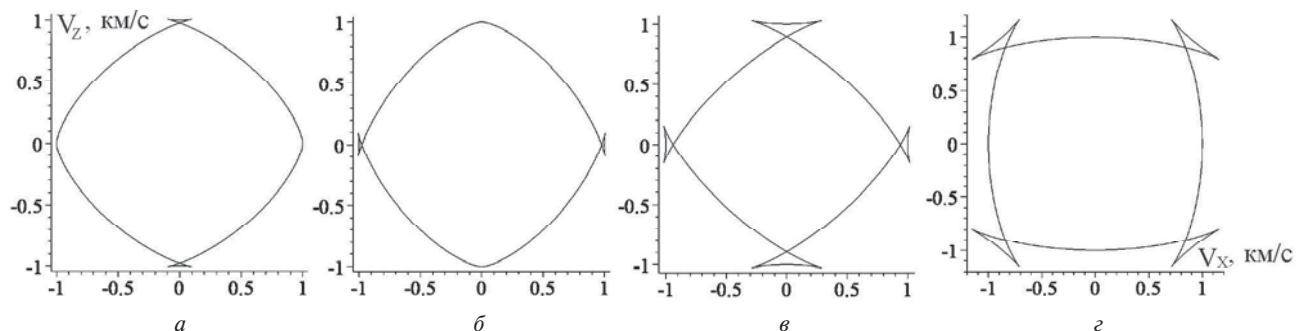


Рис. 1. Кривые групповых скоростей с каустиками: *a* – вокруг оси анизотропии (OX_3); *b* – вокруг оси, перпендикулярной оси анизотропии (OX_1); *v* – вокруг обеих осей; *z* – при боковых углах

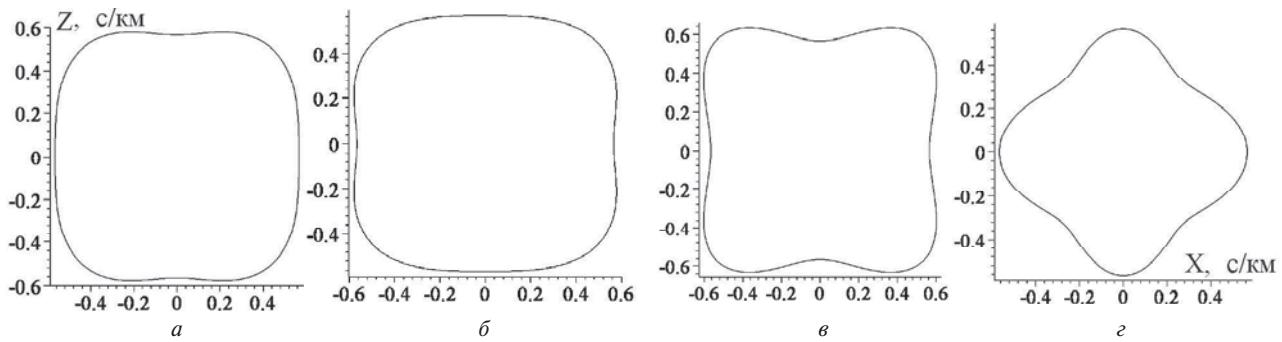


Рис. 2. Кривые медленностей для сред, каустики которых изображены на рис. 1. Области вогнутости расположены: а – вокруг оси OX_3 ; б – вокруг оси OX_1 ; в – вокруг обеих осей; з – при боковых углах

типов. Этим каустикам соответствуют области вогнутости на соответствующих кривых медленностей (рис. 2).

Следует отметить, что отрицательная неэллиптичность не типична для осадочных пород и не может быть результатом длинноволновой аппроксимации тонкослоистой изотропной среды [9].

Математическую сложность в описании значений параметров, при которых появляются каустики, представляет только третий тип. Условие возникновения каустик этого типа описывается кубическим уравнением. Однако координаты кривых, ограничивающих области каустик всех типов, как показано ниже, удовлетворяют одному уравнению, т.е. оно описывает все три типа каустик одновременно и является достаточно сложным.

В настоящей работе выводятся формулы для определения, есть ли каустики на фронте qSV -волны, распространяющейся в ТИ-среде. При наличии каустики вычисляются значения углов, ее ограничивающих. Показано, что qP -волны в ТИ-средах ни при каких значениях параметров не имеют каустик. Формулы можно применять для дальнейших исследований формы и положения областей каустик, а также для численных расчетов. Обозначения введены в соответствии со статьей [9].

Теория. Будем считать, что ТИ-среда имеет вертикальную ось симметрии OX_3 (такая среда называется ВТИ-средой), а кривая медленностей расположена в плоскости (X_1, X_3) .

Зависимость $V(\theta)$ фазовой скорости от фазового угла θ (откладывается от вертикали) определяется уравнением Кристоффеля

$$\det(\Gamma - \text{diag}(V^2(\theta))) = 0, \quad (1)$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} c_{11}n_1^2 + c_{55}n_3^2 & (c_{13} + c_{55})n_1n_3 \\ (c_{13} + c_{55})n_1n_3 & c_{55}n_1^2 + c_{33}n_3^2 \end{pmatrix},$$

$n_1 = \sin \theta$, $n_3 = \cos \theta$, c_{ij} – параметры упругости, деленные на плотность.

Из положительной определенности матрицы Γ для всех углов θ следуют неравенства:

$$c_{11} > 0, \quad c_{33} > 0, \quad c_{55} > 0. \quad (2)$$

К этим неравенствам обычно добавляются неравенства, при выполнении которых кривые медленностей qP - и qSV -волн не пересекаются между собой:

$$c_{55} < c_{11}, \quad c_{55} < c_{33}. \quad (3)$$

Условия (2) и (3) всегда выполняются для геологических сред.

Из соотношения (1) следует, что зависимости фазовых скоростей qP - и qSV -волн от углов с вертикалью θ описываются формулой

$$V^2(\theta) = \frac{c_{55}}{2g} f(u, E), \quad (4)$$

где $u = \cos 2\theta$; $f(u, E) = f_p(u, E)$ для qP -волн; $f(u, E) = f_s(u, E)$ для qSV -волн,

$$f_p(u, E) = (1 - eu + g) + \sqrt{(1 - eu - g)^2 - E(1 - u^2)}, \quad (5)$$

$$f_s(u, E) = (1 - eu + g) - \sqrt{(1 - eu - g)^2 - E(1 - u^2)}. \quad (6)$$

Значения безразмерных параметров e, g, E задаются соотношениями

$$e = \frac{c_{11} - c_{33}}{c_{11} + c_{33}}, \quad g = \frac{2c_{55}}{c_{11} + c_{33}},$$

$$E = \frac{(c_{11} - c_{55})(c_{33} - c_{55}) - (c_{13} + c_{55})^2}{[(c_{11} + c_{33})/2]^2}.$$

Справедливы равенства

$$e = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}, \quad E = 2(\varepsilon - \delta)(1 - e)(1 - e - g) = 2\sigma g(1 - e - g),$$

показывающие, что параметры ε и e связаны дробно-линейным преобразованием, а $E, \varepsilon - \delta$ и σ пропорциональны при фиксированных значениях e и g .

Здесь ε и δ – параметры Томсена [2], величина E определяет отклонение кривой медленностей от эллипса и называется параметром неэллиптичности [9], число σ определено в [14] и

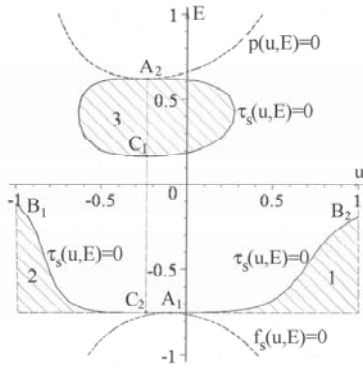


Рис. 3. Расположение на плоскости (u, E) областей, соответствующих участкам вогнутости на кривых медленностей: 1 – вокруг оси OX_3 ; 2 – вокруг оси OX_1 ; 3 – при боковых углах; кривые $f_s(u, E) = 0$ и $p(u, E) = 0$ ограничивают область допустимых значений параметра E

используется в [12] при вычислении границ каустик.

Из соотношений (2) и (3) следует, что области значений чисел e и g ограничены неравенствами

$$0 < g < 1 \text{ и } |e| < 1 - g. \quad (7)$$

В последующем изложении будем предполагать, что параметры e и g фиксированы и для них выполняются неравенства (7), а u и E изменяются в пределах $|u| \leq 1$, $|E| < 1$. Результаты представлены формулами и изображены в виде областей и кривых в декартовой системе координат (u, E) .

Для существования волн во всем диапазоне углов необходимо, чтобы функция $f_s(u, E)$ и ее подкоренное выражение

$$p(u, E) = (1 - eu - g)^2 - E(1 - u^2) \quad (8)$$

были неотрицательными при всех $|u| \leq 1$.

Неявные функции $f_s(u, E) = 0$ и $p(u, E) = 0$ имеют соответственно максимум и минимум в точках A_1 и A_2 с координатами (рис. 3)

$$\begin{aligned} u_{A_1} &= (1 - \sqrt{1 - e^2})/e, & E_{A_1} &= -2g(1 + \sqrt{1 - e^2}), \\ u_{A_2} &= e/(1 - g), & E_{A_2} &= (1 - g)^2 - e^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, параметр E изменяется в пределах $E_{A_1} < E < E_{A_2}$ (рис.3).

Кривая медленностей в декартовой системе координат описывается параметрическими уравнениями

$$X(\theta) = \frac{\sin \theta}{V(\theta)}, \quad Z(\theta) = \frac{\cos \theta}{V(\theta)},$$

где $V(\theta)$ удовлетворяет соотношению (4).

Так как

$$\frac{d^2 Z}{dX^2} = \frac{Z''_0 X'_0 - Z'_0 X''_0}{(X'_0)^2} = -\frac{V''_0(\theta)/V(\theta) + 1}{(X'_0)^2 V^3(\theta)},$$

то точки, ограничивающие участки вогнутости кривой $(X(\theta), Z(\theta))$, удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 V(\theta)}{d\theta^2} / V(\theta) + 1 = 0. \quad (10)$$

Неравенство, аналогичное уравнению (10), представлено в статье [7]. При его выводе использовались соотношения между фазовым и лучевым (групповым) углами, а также между фазовой и групповой скоростями для ВТИ-среды.

Подстановка выражения (4) в уравнение (10) позволяет получить эквивалентное равенство, не содержащее параметр θ :

$$1 + \left(\frac{f'_u}{f}\right)^2 (1 - u^2) + 2 \left(\frac{f'_u}{f}\right)' (1 - u^2) - 2 \frac{f'_u}{f} u = 0. \quad (11)$$

После умножения соотношения (11) на положительное число $f^2 p^{3/2}(u, E)$ и подстановки значений f из выражений (5) и (6) получим уравнения (12) и (13) для определения границ каустик qP - и qSV -волн соответственно:

$$\tau_p(u, E) = r - s\sqrt{p(u, E)} = 0, \quad (12)$$

$$\tau_s(u, E) = r + s\sqrt{p(u, E)} = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} r &= 2 \left[-e(e^2 - 2g + 2g^2)u^3 - 3e^2(g - 1)u^2 + \right. \\ &\quad \left. + 3e(g^2 - 1)u + (1 + g)(1 - g)^2 + 2e^2g \right] E + \\ &\quad + 2(e^2 + g^2 - 1)(1 - eu - g)^3, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} s &= (u^2 - 1)E^2 - [(e^2 + g^2 + 1 - 6g)u^2 + 4e(g - 1)u + \\ &\quad + e^2 + (g + 1)^2]E - 2(e^2 - g^2 - 1)(1 - eu - g)^2, \end{aligned} \quad (15)$$

а значение $p(u, E)$ находится по формуле (8).

Выражения (12)–(15) достаточно сложные, чтобы по ним можно было определить, какое влияние оказывают значения параметров e и g на положение кривых $\tau_p(u, E) = 0$ и $\tau_s(u, E) = 0$. Однако эти уравнения вполне приемлемы для численной оценки положения каустик при любых заданных значениях e и g , а также для дальнейших теоретических исследований.

Выполнив независимый перебор значений e , u , g и E , можно получить, что при $p(u, E) \geq 0$, $|u| \leq 1$, $0 < g < 1$ и $|e| < 1 - g$ всегда выполняются неравенства $r < 0$ и $s > 0$. Следовательно, в этой области всегда $\tau_p(u, E) < 0$. Поэтому qP -волны никогда не имеют каустик, а кривые медленностей для них всегда выпуклые. Полином

$$\tau(u, E) = r^2 - p(u, E)s^2 = \tau_p(u, E)\tau_s(u, E)$$

имеет шестую степень по u , пятую степень по E и также описывает границы каустик qSV -волн.

При $E = 0$ выполняются равенства $f_s(u, E) \equiv 2g$ и $V^2(\theta) \equiv c_{35}$. Следовательно, в этом случае обе кривые медленностей и групповых скоростей для qSV -волн являются окружностями. Значит, при $E = 0$

qSV -волны не имеют каустик. Прямая $E=0$ разделяет плоскость (u, E) на полуплоскости, в которых находятся две непересекающиеся ветви кривой (13).

Одна из этих ветвей расположена в области $E_{A1} < E < 0$, $|u| \leq 1$ и ограничена слева и справа соответственно точками B_1 и B_2 с координатами

$$u_{B1} = -1, E_{B1} = -g(1+e-g),$$

$$u_{B2} = 1, E_{B2} = -g(1-e-g),$$

а другая ветвь замкнута и располагается в области $0 < E \leq E_{A2}$.

Отрицательность значений E_{B1} и E_{B2} следует из неравенств (7).

Под нижней ветвью кривой (13) располагаются две области параметров (u, E) , при которых возникают каустики вокруг осей OX_1 и OX_3 . Верхняя ветвь ограничивает область каустик, возникающих при боковых углах. Эти области обозначены соответственно цифрами 1–3 на рис. 3. Следовательно, каустики вокруг осей OX_1 и OX_3 могут существовать одновременно и возникают при $E < 0$, а каустики при боковых углах существуют отдельно и могут появляться только при $E > 0$.

Исследуем, при каких значениях параметра E начинают появляться каустики. С этой целью определим точки, в которых кривая $\tau_s(u, E) = 0$ имеет горизонтальные касательные. Данные точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \tau_s(u, E) = 0 \\ \frac{\partial \tau_s(u, E)}{\partial u} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Система уравнений (16) в области $|u| \leq 1$, $E_{A1} \leq E \leq E_{A2}$ имеет 4 решения: $\{u_{A1}, E_{A1}\}$, $\{u_{A2}, E_{A2}\}$, $\{u_{C1}, E_{C1}\}$ и $\{u_{C2}, E_{C2}\}$. Первые два решения определены формулами (9), $u_{C1} = u_{C2} = u_{A2}$, а E_{C1} и E_{C2} являются большим (всегда положительным) и средним (всегда отрицательным) корнями кубического уравнения

$$t(E) = E^3 + (3g^2 - 3e^2 + 2g + 3)E^2 + 8g(1 + g^2 - e^2)E + 16g^2(1 - e^2)(e^2 - (g - 1)^2) = 0. \quad (17)$$

Уравнения, аналогичные (17), представлены в работах [6–8, 11, 12].

Убедиться в том, что уравнение $t(E) = 0$ определяет положение критических точек кривой $\tau(u, E) = 0$, можно также, проделав вычисления при $u = u_{A2}$. Действительно, можно проверить, что

$$\tau(u_{A2}, E) = \frac{p^2(u_{A2}, E)((g - 1)^2 - e^2)}{(g - 1)^2} t(E)$$

и

$$\frac{\partial \tau(u_{A2}, E)}{\partial u} = \frac{6e(g - 1)}{e^2 - (g - 1)^2} \tau(u_{A2}, E).$$

Следовательно, если $t(E) = 0$, то $\tau(u_{A2}, E) = 0$ и $\frac{\partial \tau(u_{A2}, E)}{\partial u} = 0$.

Наименьший корень уравнения (17) лежит в области $E < -1$ и является корнем уравнения (12), т.е. относится к каустикам qP -волн.

Средний корень всегда отрицательный и определяет критическую точку C_2 , лежащую на нижней ветви кривой (13). На этой же ветви находится точка минимума A_1 , разделяющая области каустик 1 и 2 (рис. 3).

Наибольший корень всегда положительный, и ему соответствует точка минимума C_1 на верхней ветви кривой (13). При $E > E_{C1}$ появляются каустики для боковых углов (рис. 3).

Корни E_{C1} и E_{C2} можно найти по формулам

$$E_{C1} = 2Q \sin(2\psi/3 + \pi/6) - a,$$

$$E_{C2} = 2Q \sin(2\psi/3 + 5\pi/6) - a,$$

где

$$a = 1 + 2g/3 + g^2 - e^2,$$

$$Q = |1 - e^2 - 2g/3 + g^2|,$$

$$\psi = \arccos \frac{\sqrt{[(g - 1)^2 - e^2](1 - e^2 - g^2)}}{Q^{3/2}}.$$

Численные примеры. Продемонстрируем применение изложенной теории на примерах сред, описываемых параметрами из статьи [2] (Green River Shale): $V_p = 3292$ м/с, $V_s = 1768$ м/с, $e = 0,163$, $g = 0,241$, $\varepsilon = 0,195$, $\delta_{GR} = -0,22$, $E_{GR} = 0,414$.

Если зафиксировать значения e и g , а параметр E изменять, то каустики для боковых углов будут существовать при $0,185 < E < 0,549$ (рис. 4). Следует отметить, что вместе с изменением значений E изменяются значения пропорционально ему параметра Томсена δ .

Для сред с параметрами $E = E_1 = 0,3$, $E = E_2 = E_{GR}$ и $E_u = E_3 = 0,48$ построим кривые медленностей (рис. 5), кривые групповых скоростей (рис. 6), а также рассчитаем углы с вертикалью θ_1 и θ_2 , ограничивающие области во-

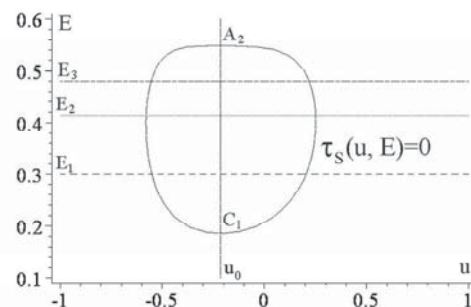


Рис. 4. Расположение на плоскости (u, E) области типа 3 (см. рис. 3) для сред с параметрами, $e = 0,163$, $g = 0,241$ ($E = 0,414$ соответствует среде Green River Shale из [2])

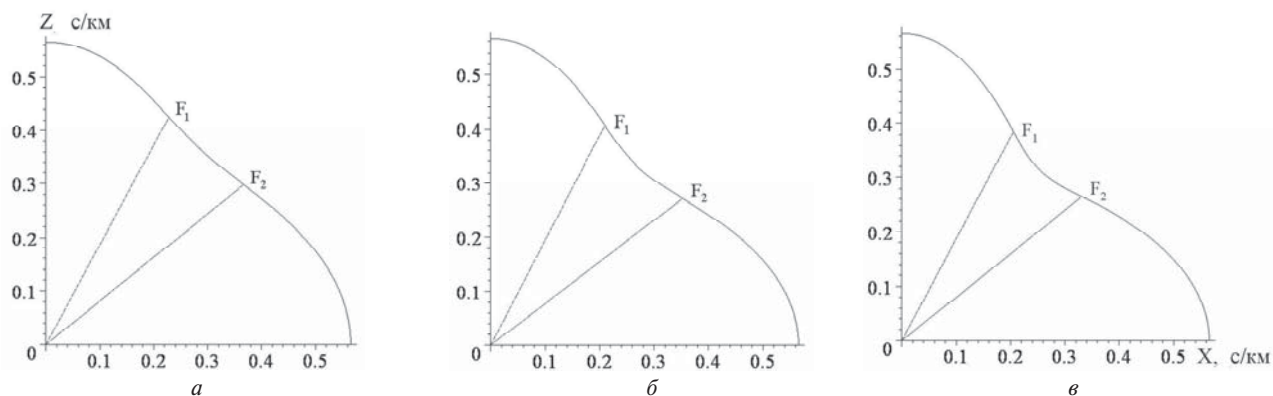


Рис. 5. Кривые медленностей для сред с параметрами $e = 0,163$, $g = 0,241$ и значениями E : а – $E=0,3$; б – $E=0,414$; в – $E=0,48$

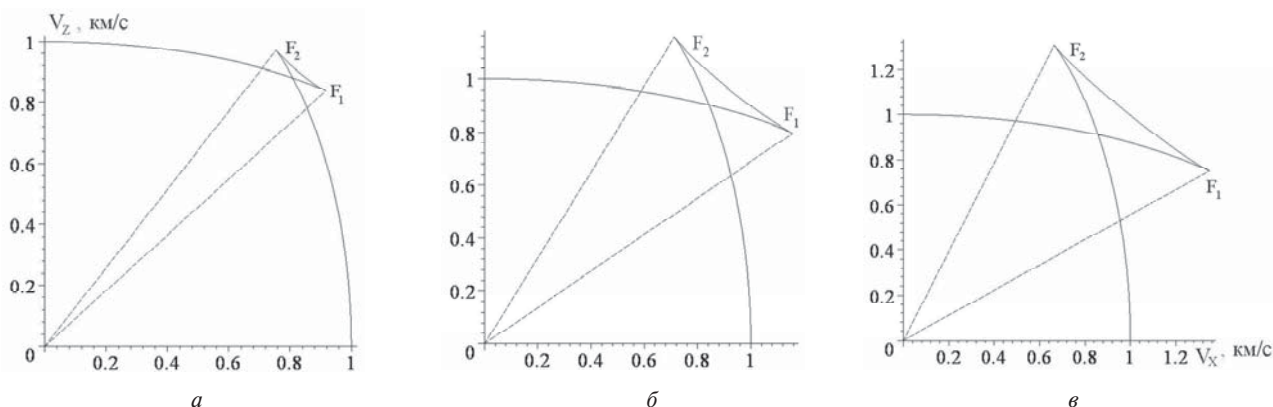


Рис. 6. Кривые групповых скоростей для сред с параметрами $e = 0,163$, $g = 0,241$ и значениями E : а – $E=0,3$; б – $E=0,414$; в – $E=0,48$

нутости на кривых медленностей. Определим также соответствующие углы α_1 , α_2 в градусах на кривых групповых скоростей. Результаты представлены в таблице.

	θ_1	θ_2	α_2	α_1	δ
E_1	28,2	50,9	37,8	47,6	-0,106
E_2	27,2	47,6	31,6	55,4	-0,22
E_3	28,1	37,8	26,9	60,9	-0,29

При $E = 0,185$ область каустики вырождается в точку, которой соответствуют углы с вертикалью $\theta = 38,8^\circ$ и $\alpha = 41,5^\circ$ на кривых медленностей и групповых скоростей соответственно.

Из таблицы и рис. 4 видно, что при возрастании параметра E область вогнутости на кривой медленностей сначала увеличивается, а потом уменьшается. Однако на кривой групповых скоростей область каустики только увеличивается. Это происходит вследствие того, что с возрастанием E скорости начинают резко изменяться в зависимости от направления распространения волны.

Наконец, находим, что каустики в окрестностях осей OX_1 и OX_3 появляются, соответственно, при

$$E < E_4 = g(1 + e - g) = -0,22$$

и

$$E < E_5 = g(1 - e - g) = -0,14.$$

Замечание. Для изображения зависимости групповой скорости $V_{gr}(\alpha)$ от угла α распространения энергии используются формулы

$$V_{gr}(\theta) = \sqrt{\frac{(1 + f_1^2)f}{2g}}, \quad \alpha = \theta - \arctg(f_1), \quad f_1 = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial u} \sin 2\theta.$$

Выводы. Исследован вопрос существования каустик на фронте qSV -волны, распространяющейся в ТИ-среде. Результаты представлены точными формулами и изображены наглядно в виде кривых, ограничивающих области каустик.

1. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Л.: Наука, 1980. – 180 с.
2. *Thomsen L.* Weak elastic anisotropy // *Geophysics.* – 1986. – **51**, №10. – P. 1954–1966.
3. *Wang Z.* Seismic anisotropy in sedimentary rocks. Pt 2: laboratory data // *Geophysics.* – 2002. – **67**, № 5. – P. 1423–1440.
4. *Hanyga A., Slavinski M.A.* Caustics in qSV ray fields of transversely isotropic and vertically. inhomogeneous media. *Anisotropy 2000: Fractures, converted waves, and case studies.* – SEG Books (Special Issue), 2001. – P. 409–418.
5. *Cerveny V.* *Seismic Ray Theory.* – Cambridge: Cambridge Univ., 2001. – 712 с.
6. *Peyton R.G.* *Elastic wave propagation in transversely isotropic media.* – The Netherlands: Martinus Nijhoff Publ., 1983. – 612 с.

7. *Thomsen L., Dellinger J.* On shear-wave triplication in transversely isotropic media // *J. Applied Geophysics*. – 2003. – **54**. – P. 289–296.
8. *Dellinger J.A.* Anisotropic seismic wave propagation. – USA, Stanford: Stanford Univ., PhDThesis, 1991. – 171 c. – (<http://sepwww.stanford.edu/theses/sep69/>).
9. *Schoenberg M., Daley T.M.* qSV wavefront triplication in transversely isotropic material // Expanded Abstracts of SEG 73rd Ann Internat. Mtg. – 2003. – Paper 687.
10. *Schoenberg M., Daley T.M.* Criteria for quasi-shear wavefront triplication in a transversely isotropic material // *J. the Acoustical Soc. of America*. – 2004. – **115**, № 5. – P. 2626–2626.
11. *Schoenberg M., Helbig K.* Orthorhombic media: Modeling elastic wave behavior in vertically fractured earth // *Geophysics*. – 1997. – **62**, № 6. – P. 1954–1974.
12. *Vavrycuk V.* Generation of triplication on transversely isotropic media // *Phys. Rev. B*. – 2003. – **68**, 054107.
13. *Musgrave M.J.P.* *Cristal Acoustics*. – San Francisco: Holden-Day, 1970. – 288 c.
14. *Tsvankin I., Thomsen L.* Nonhyperbolic reflection moveout in anisotropic media // *Geophysics*. – 1994. – **59**, № 8. – P. 1290–1304.

Поступила в редакцию 26.03.2008 г.