

ТРИВИМІРНЕ СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДОМ РАНДОМІЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ МОНІТОРИНГУ ГЕОЛОГІЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

© С.А. Вижива, З.О. Вижива, В.К. Демидов, 2008

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

The method, algorithm example of three-dimensional fields via investigation technique “at random” is brought forward. The algorithm has been approbated in the time of cockpit and suffusion processes research within the premises of Rovenskaya NPP.

Вступ. У зв'язку з ростом кількості природних та природно-техногенних катастроф, кількості спричинених ними людських жертв та економічних збитків постає нагальна потреба у розробці нових теоретичних й методичних підходів до їх попередження та нейтралізації. Одним із таких підходів є розробка систем моніторингу за станом геологічного середовища з використанням сучасного математичного апарату та інформаційних технологій.

В загальній системі моніторингу навколишнього середовища важливою складовою є локальний моніторинг територій розташування потенційно небезпечних об'єктів.

У моніторингу таких об'єктів постає досить багато проблем, наприклад відсутність неперервних рядів спостережень у базі даних або їх недостатня кількість чи необхідність доповнити базу даних без проведення додаткових досліджень, або потреба спрогнозувати розвиток небезпечних процесів за часом чи у просторі, в проміжках наявної мережі спостережень.

Такого роду проблеми прикладна геофізика практично не розглядала, хоча математичний апарат для цього розроблено досить давно. Зокрема, методи статистичного моделювання дають змогу отримувати додаткову інформацію у разі різномірної геолого-геофізичної інформації, відсутності кондиційних баз даних. У гірничій справі моделі ізотропних кореляційних функцій розробляли Д. Матернон [5], М. Армстронг, Р. Джабіб [2], а в геоморфології – М. Олівер, Р. Вебстер [6]. Математичний аналіз властивостей кореляційних функцій, що розглядаються, для гауссівських випадкових полів (зокрема, в задачах статистичного моделювання) для конкретних прикладів наведено в монографії П. Абрахамсена [1]. За останні десятиліття метод статистичного моделювання випадкових полів, який дає можливість за окремими отриманими значеннями їх реалізацій знайти досконале зображення цих полів на всьому інтервалі спостережень, для вирішення геологічних завдань використовували поряд з іншими

дослідниками вчені М. Шинозука, С. Жан [7], Д. Чайлз і П. Дельфінер [3], а також С.А. Вижива, З.О. Вижива, В.К. Демидов [9–14, 16].

На кафедрі геофізики геологічного факультету із залученням фахівців із механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка протягом останніх 10 років розроблені теоретичні та методологічні основи застосування методів статистичного моделювання під час дослідження екологічного стану територій. Ці розробки застосовують для обґрунтованих систем моніторингу за станом геологічного середовища [9–14, 16]. В основі цих розробок лежить спектральна теорія випадкових полів [15].

Завдання нашої роботи – створення методики та програмно-алгоритмічного комплексу статистичного моделювання три вимірних полів у задачах моніторингу. Слід зауважити, що сфера застосування розробленого підходу може бути більш широкою.

Під час аналізу було використано дані режимних спостережень геофізичних полів, прямих досліджень рівня ґрунтових вод, отриманих різними організаціями.

Важливим етапом статистичної обробки результатів практичних спостережень є дослідження типу кореляційної функції для них. Знаючи вигляд кореляційної функції та математичне сподівання даних спостережень, можна із заданою точністю змоделювати масиви дво- та тривимірних додаткових даних у проміжках мережі спостережень. У геології найчастіше використовують кореляційні функції, що описуються функціями Бесселя або експоненційно затухаючими косинусоїдами. Для вирішення завдань моніторингу автори застосовували метод “спектральних коефіцієнтів” [16] і метод “рандомізації”, а також проводили порівняльний аналіз результатів, отриманих різними методами.

Теоретичні аспекти можливостей використання статистичного моделювання для розв'язання поставлених задач розглянуто авторами в публі-

каціях [9–14], практичну апробацію на реальних даних проведено для процесів і полів на площині в роботах [9, 10], для тривимірних випадкових полів “методом спектральних коефіцієнтів” – у статті [16]. У цій статті вперше поставлено задачу впровадження методу “рандомізації” в тривимірному варіанті до реальних даних моніторингових спостережень на території РАЕС.

Сучасний стан проблеми. Випадкові поля в тривимірному евклідовому просторі є більш узагальненим об’єктом порівняно з випадковими процесами та полями на площині. Такі поля, як правило, є основним об’єктом досліджень у геофізиці та геології.

Вперше статистичне моделювання випадкових полів у тривимірному просторі було застосовано понад 35 років тому. У 1972 р. розроблена модель для полів простору будь-якої цілочисельної розмірності N вченими М. Шинозука і К. Жан [7]. Цей підхід має один суттєвий недолік у використанні для статистичного моделювання суцільних випадкових полів, які широко застосовують у геології, а саме: час обчислення за наведеними у статті [7] формулами навіть за наявності сучасних засобів обчислювальної техніки значно зростає, коли кількість точок моделювання є досить великою.

Економніший спосіб моделювання розробили вчені Д. Матернон, А. Мантоглоу та Д. Уїлсон [4] – метод обертання груп. Він полягає в тому, що моделювання у дво- й тривимірному просторі зводиться до одновимірного моделювання. Ідея методу – проектування вектора від початку координат до точки моделювання у тривимірному просторі на одиничний вектор від початку координат із випадковим напрямком, який в цьому просторі обертається. Після таких перетворень як одновимірну модель підбирають уже відомі моделі випадкових процесів. Метод обертання груп використовували для статистичного моделювання тривимірних випадкових полів з різними коваріаційними функціями у гірничій справі протягом багатьох років. Однак зауважимо, що для застосування цього методу необхідно, щоб задана коваріаційна функція $C_S(z)$ досліджуваного тривимірного випадкового поля зводилась до одновимірної коваріаційної функції $C_1(z)$ за допомогою перетворення

$$C_1(\xi) = \frac{d}{d\xi} (\xi C_S(\xi)). \quad (1)$$

Таку умову диференційованості може задовольнити не кожна функція.

Метод статистичного моделювання тривимірних випадкових полів на основі спектральної теорії випадкових полів дає можливість за окремими отриманими значеннями таких просторових полів відтворити їх досконале зображення

на всьому масиві спостережень. Він допомагає уникнути наведених вище недоліків. Водночас знаходження спектральних коефіцієнтів для деяких кореляційних функцій потребує обчислення досить складних інтегралів, що часто є неможливим.

Постановка задачі. Пропонуємо розроблену нами за методом “рандомізації” модель для генерування реалізацій випадкових полів у тривимірному просторі, заданих будь-яким типом кореляційних функцій і для яких можна вказати явний вигляд спектральних функцій, а також сконструйовано алгоритм, що не потребує громіздких обчислень, для генерування реалізацій таких випадкових полів.

Метод “рандомізації” наведено у порівнянні із методом “спектральних коефіцієнтів”, Коротко наведемо теорію цих методів.

Метод спектральних коефіцієнтів. Розглянемо дійснозначне однорідне та ізотропне випадкове поле $\xi(r, \theta, \varphi)$ у тривимірному евклідовому просторі (r, θ, φ – сферичні координати).

Припустимо, що

$$\xi(\bar{x}) \quad (\bar{x} = (r, \theta, \varphi); \quad r \in R, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi])$$

це випадкове поле в просторі R^3 з нульовим математичним сподіванням і дисперсією:

$$D\xi = M\xi^2(0) = \int_0^\infty d\Phi(\lambda), \quad (2)$$

де $\Phi(\lambda)$ – спектральна функція випадкового поля $\xi(\bar{x})$.

Відомо [8], що неперервне в середньому квадратичному дійснозначне однорідне та ізотропне випадкове поле $\xi(r, \theta, \varphi)$ у просторі R^3 можна подати у вигляді “спектрального розкладу”:

$$\xi(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m C_{m,l} P_m^l(\cos \theta) \times \\ \times [\zeta_{m,1}^l(r) \cos l\varphi + \zeta_{m,2}^l(r) \sin l\varphi]. \quad (3)$$

Тут $\zeta_{m,p}^l(r)$ $p=1, 2$ – послідовності гауссівських випадкових процесів з математичним сподіванням $M\xi_{m,p}^l(r) = 0$ та дисперсією

$$D\xi_{m,p}^l(r) = b_m(r) \quad \forall l, p; \quad (4)$$

$$C_{m,l} = \sqrt{(2m+1) \frac{(m-l)!}{(m+l)!}}, \quad (5)$$

де $P_m^l(\cos \theta)$ – приєднані функції Лежандра.

При цьому “спектральні коефіцієнти” визначимо через кореляційну функцію $B(x)$ випадкового поля за виразом

$$b_m(x) = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi B(x) P_m(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad (6)$$

де x – відстань між будь-якими двома точками простору R^3 .

Цю формулу використовують для обчислення спектральних коефіцієнтів випадкового поля в тривимірному просторі, якщо відома його кореляційна функція. Проте не для кожного типу кореляційної функції є можливість обчислити інтеграл (6) і вказати вираз для спектральних коефіцієнтів. Через ускладнення під час обчислень інтегралів ми застосували “метод рандомізації”.

Метод рандомізації. Випадкове поле $\xi(r, \theta, \varphi)$ у тривимірному просторі можна зобразити у вигляді “спектрального розкладу” загального вигляду, порівняно з рівністю (3), а саме:

$$\xi(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^m C_{m,l} P_m^l(\cos \theta) \cos l\varphi \times \left[\int_0^{\infty} \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\sqrt{\lambda r}} Z_{m,1}^l(d\lambda) + \sin l\varphi \int_0^{\infty} \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\sqrt{\lambda r}} Z_{m,2}^l(d\lambda) \right], \quad (7)$$

де функції $P_m^l(x)$ – приєднані поліноми Лежандра; $J_m(z)$ – функція Бесселя першого роду m -го порядку; λ – змінна інтегрування; $\{Z_{m,p}^l(\cdot)\}_{m=0,l=0}^{\infty,m}$ ($p=1,2$) – набори ортогональних випадкових мір на σ -алгебрі борелівських множин $B([0, +\infty))$ із інтервалу $[0, +\infty)$, таких, що:

$$M Z_{m,k}^l(S_1) Z_{m,k}^l(S_2) = \delta_m^l \delta_k^l \delta_k^l \Phi(S_1 \cap S_2), \quad (8) \\ \forall S_1, S_2 \in B([0, +\infty)).$$

У статті [8] знайдено оцінку середньоквадратичного наближення цього випадкового поля частковими сумами ряду (7) спеціального вигляду, яка буде використано для побудови моделі поля методом “рандомізації”.

Для цього розглянемо розбиття інтервалу

$$[0, +\infty) = \bigcup_{i=1}^k \Lambda_i = \bigcup_{i=1}^k \Lambda_i \cup \Lambda_k, \quad (9)$$

де діаметри d_i ($i=1, k-1$) областей $\Lambda_i = \{\lambda : a_{i-1} < \lambda \leq a_i\}$ ($a_i \in R, i=1, k$) – скінченні, а область $\Lambda_k = \{\lambda : \lambda > a_k\}$ має нескінченний діаметр. Виберемо в кожній області Λ_i точку – змінну λ_i .

Нехай гауссівське випадкове поле $\xi(\bar{x}), \bar{x} \in R^3$ задано своїми математичними сподіванням і спектральною функцією $\Phi(\lambda)$ (або кореляційною функцією). Нехай також існує спектральна щільність $\varrho(u) = \Phi'(u)$. Тоді випадкова точка $\lambda_i, \lambda_i \in \Lambda_i$ ($i=1, k$) має щільність розподілу

$$p_i(u) = \begin{cases} \frac{\varrho(u)}{p_i}, & u \in \Lambda_i, \\ 0, & u \notin \Lambda_i, \end{cases} \quad (10)$$

де $p_i = \int_{\Lambda_i} d\Phi(\lambda)$.

Розглянемо рандомізоване зображення спектрального розкладу випадкового поля:

$$\xi_k(r, \theta, \varphi) = \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m C_{m,l} P_m^l(\cos \theta) \times \left[\cos l\varphi \int_{\Lambda_i} \frac{J_{m+\frac{1}}{2}}(\lambda_i r)}{\sqrt{\lambda_i r}} Z_{m,1}^{i,l}(d\lambda) + \sin l\varphi \int_{\Lambda_i} \frac{J_{m+\frac{1}}{2}}(\lambda_i r)}{\sqrt{\lambda_i r}} Z_{m,2}^{i,l}(d\lambda) \right].$$

Середньоквадратичне наближення випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$ частковими сумами вигляду

$$\xi_k^N(r, \theta, \varphi) = \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^m C_{m,l} P_m^l(\cos \theta) \times \left[\cos l\varphi \int_{\Lambda_i} \frac{J_{m+\frac{1}}{2}}(\lambda_i r)}{\sqrt{\lambda_i r}} Z_{m,1}^l(d\lambda) + \sin l\varphi \int_{\Lambda_i} \frac{J_{m+\frac{1}}{2}}(\lambda_i r)}{\sqrt{\lambda_i r}} Z_{m,2}^l(d\lambda) \right] \quad (11)$$

має оцінку, яку отримано в теоремі, що наведена нижче.

Теорема. Припустимо, що при $k \rightarrow \infty$ (k – кількість інтервалів розбиття (9)) величини N та a_k прямують до нескінченності так, що виконуються умови:

$$1) \frac{N}{\sqrt{a_k}} \rightarrow \infty; \quad 2) \frac{a_k}{N} \rightarrow 0, \quad a_k < \frac{N}{eQ}; \quad 3) \frac{N}{k} = 0(1);$$

$$4) \frac{a_k^2}{k} \rightarrow 0; \quad 5) N^3 \mu_1 \rightarrow 0, \quad \int_{a_k}^{\infty} d\Phi(\lambda) = \mu_1;$$

$$6) \max_{1 \leq i \leq k-1} d_i \leq \frac{c a_k}{k} \quad (c \in R); \quad 7) \int_{a_k}^{\infty} \lambda^3 d\Phi(\lambda) = \mu_3 < +\infty;$$

$$8) D\xi(x) = \int_0^{\infty} d\Phi(\lambda) = 1.$$

Тоді

$$M \int_{\bar{x} \in Q} [\xi(\bar{x}) - \xi_k^N(\bar{x})]^2 d\bar{x} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

і справедлива оцінка

$$M \int_{\bar{x} \in Q} [\xi(\bar{x}) - \xi_k^N(\bar{x})]^2 d\bar{x} \leq \frac{\pi}{2} Q^4 \left(\frac{c a_k}{k} \right)^2 \times \left\{ 1 + \frac{(2N+1)^2}{N} \left[Q^4 \frac{\pi}{2(N+2)} \left(\frac{N}{2^N} \right)^2 + \frac{N+1}{2^{2(N-1)}} \left(\frac{eN}{2(N+3)} + \frac{N+1}{2(N+2)} \right) \right] \right\} + \quad (12) \\ + 2\pi^2 Q^2 \{ 1 + N(2N+1) \} \mu_1 + \\ + \pi^2 Q^3 \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{N^2}{a_k Q}} + 2\pi^2 Q^4 \frac{N}{N^2-1} \mu_3,$$

де Q – деяке дійсне невід’ємне число (радіус кулі); a_k – остання точка розбиття (9).

Доведення цієї теореми наведено у статті [8].

Як показано далі, такі суми та оцінки можна використовувати для статистичного моделювання

випадкових полів із заданими статистичними характеристиками.

У цій статті застосовано алгоритм [9] статистичного моделювання тривимірного випадкового поля, який побудовано методом “рандомізації” на основі середньоквадратичної оцінки (12).

Із спектральної теорії випливає, що відповідну модель за методом рандомізації такого тривимірного випадкового поля будуємо за формулою (11).

Для вибору статистичної моделі цього поля використано часткову суму ряду (11). Тоді модель має вигляд

$$\xi_k^N(r, \theta, \varphi) = \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^m C_{m,l} P_m^l(\cos \theta) \times \left[\cos l\varphi \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda_i r)}{\sqrt{\lambda_i r}} Z_{m,1}^l + \sin l\varphi \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda_i r)}{\sqrt{\lambda_i r}} Z_{m,2}^l \right], \quad (13)$$

де $\{Z_{m,p}^{i,l}(\cdot)\}_{m=0,l=0,i=1}^{N,m,k}$, $(p=1,2)$ – набори незалежних гауссівських випадкових величин з нульовим математичним сподіванням та дисперсіями

$$DZ_{m,p}^{i,l} = \Phi(a_{i-1}) - \Phi(a_i), p=1,2; \quad \forall m=0,1,\dots,N; \quad l=0,1,\dots,m; \quad i=1,2,\dots,k, \quad (14)$$

де $\Phi(\lambda)$ – спектральна функція випадкового поля $\xi(\bar{x})$.

Далі на основі такої моделі будуємо алгоритм для генерування реалізацій гауссівського випадкового поля $\xi(\bar{x})$ методом статистичного моделювання.

Алгоритм.

1. Моделюємо послідовність випадкових величин $\lambda_i, \lambda_i \in \Lambda_i (i=1, \dots, k)$ із щільностями розподілу p_i , заданими формулами (10).
2. Визначаємо відповідне для заданої точності наближення $\varepsilon > 0$ значення числа N за допомогою оцінки (див. [8]):

$$\frac{\mu}{2} Q^4 \left(\frac{ca_k}{k} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{(2N+1)^2}{N} \left[Q^4 \frac{\mu}{2(N+2)} \left(\frac{N}{2^N} \right)^2 + \frac{N+1}{2^{2(N-1)}} \left(\frac{eN}{2(2N+3)} + \frac{N+1}{2(N+2)} \right) \right] \right\} + 2\pi^2 Q^2 \{1 + N(2N+1)\} \mu_1 + \pi^2 Q^3 \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{N^2}{a_k Q}} + 2\pi^2 Q^4 \frac{N}{N^2-1} \mu_3 \leq \varepsilon. \quad (15)$$

3. Моделюємо набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин із статистичними характеристиками (14), які позначили через

$$\{Z_{m,p}^{i,l}\}_{m=0,l=0,i=1}^{N,m,k}, (p=1,2).$$

4. Обчислюємо значення реалізації випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$ за формулою (13) під час підстановки значень величин, знайдених за пунктами 1, 2, та змодельованих гауссівських випадкових величин за пунктом 3.

5. Знаходимо статистичну оцінку для кореляційної функції згенерованої реалізації випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$ за допомогою пакета прикладних програм Geo-R і порівнюємо із підбраною кореляційною функцією $B(\rho)$ для даних, а також проводимо статистичний аналіз цієї реалізації на адекватність.

Слід зауважити, що наведений алгоритм можна використовувати для того, щоб отримати реалізації випадкових полів не лише гауссівських, а й інших типів розподілу. Для цього потрібно використати відомі в літературі перетворення негауссівських випадкових полів у гауссівські.

Приклад практичного застосування методу на території промийданчика Рівненської АЕС. Досліджували густину скелета крейдяних відкладів, що є потенційно карстонебезпечними. Використано дані вимірювання густини скелета за результатами радіоізотопних досліджень по сітці режимних свердловин, розташованих по периметру основних споруд Рівненської АЕС. Ці дані отримані ДП КПВД “Енергопроект” протягом 1983–2004 рр.

Для визначення розподілу вхідних даних побудовано гістограму (рис. 1) за допомогою програми Statistika. Встановлено, що дані мають наближено гауссівський розподіл.

Для підбору статистичної моделі розподілу густини крейдяної товщі в просторі визначено її кореляційну функцію за допомогою пакету програм Geo-R. Моделювання проводили по трьох рівнях (28, 29, 30 м від поверхні). На основі статистичних досліджень вхідних даних встановлено, що наші вхідні дані найадекватніше описували два типи кореляційної функції – функція Бесселя (16) та функція Коші (17):

$$B(\rho) = 9\sqrt{\pi} \frac{J_3(a\rho)}{(a\rho)^{\frac{5}{2}}}, \quad a=1,5; \quad (16)$$

$$B(\rho) = \left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{-1}, \quad a > 0. \quad (17)$$

Згенеровано реалізації тривимірного випадкового поля із бesselевою кореляційною функцією вигляду (16). Моделювання проводили методом спектрального розкладу способом знаходження спектральних коефіцієнтів (алгоритм наведено в статті [16]) та методом “рандомізації” (за наведеним вище алгоритмом).

Встановлено також, що можливе достатньо адекватне наближення кореляційної функції в тривимірному моделюванні даних моделлю експоненційно згасаючої косинусоїди (показано на рис. 2 для порівняння результатів).

На основі висновків із статистичної обробки даних та описаного вище алгоритму методу “рандомізації” для моделювання реалізацій у тривимірному випадку, в середовищі Delphi7.0 була розроблена оригінальна програма Spectr3.1, в якій використано підбрану кореляційну функцію бес-

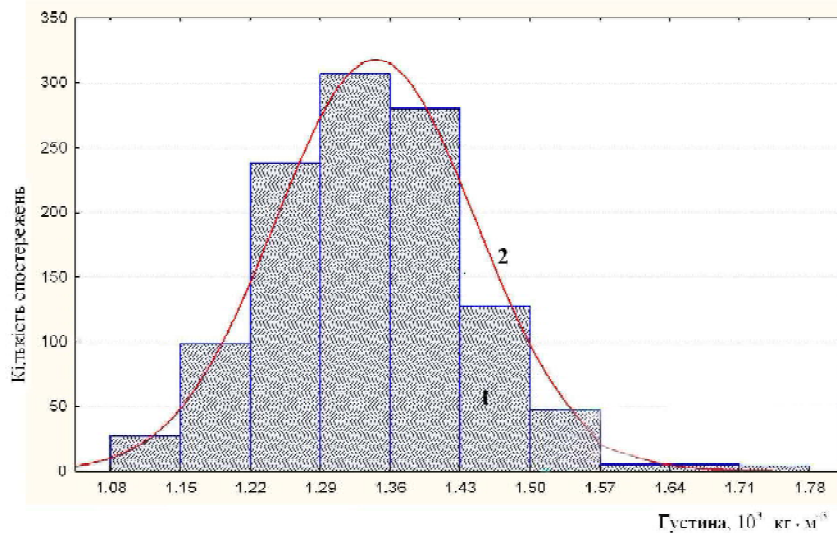


Рис. 1. Гістограма густини крейдяної товщі (усереднені дані за 1984–2003 рр. спостережень): 1 – кількість спостережень в окремих інтервалах густини; 2 – теоретична гауссівська крива

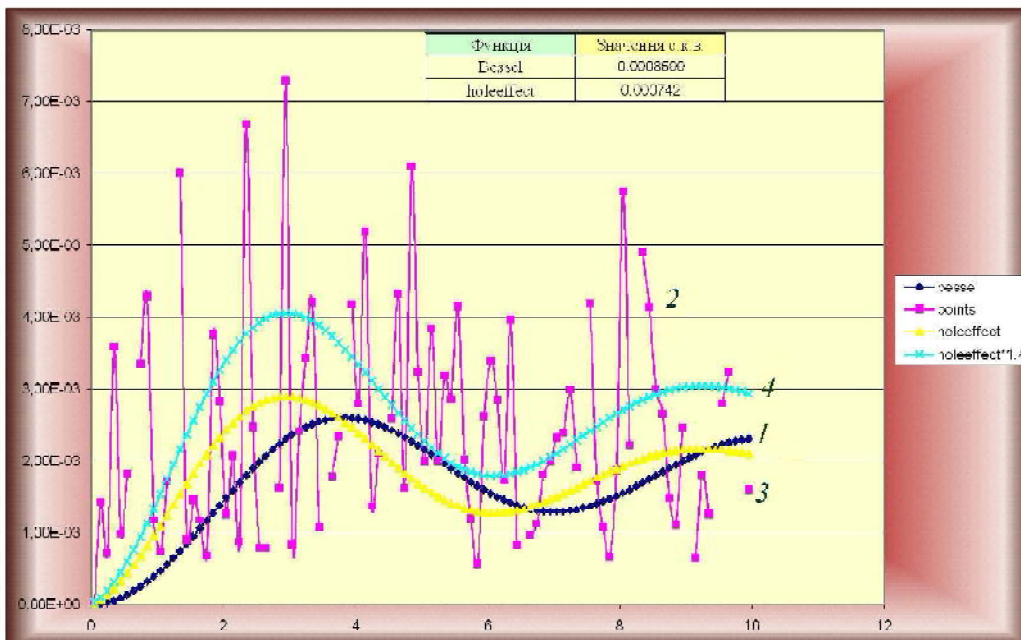


Рис. 2. Емпірична варіограма для кореляційної функції вихідних даних у вигляді функції Бесселя $B(\rho)=J_{3/2}(c \rho)$, $c=5$ та функції $B(\rho)=\exp(c \rho)\cos(\rho)$, де points (1) – вихідні дані, Bessel (2) – функція Бесселя, holeeffect (3, 4) – $\exp(c \rho)\cos(\rho)$

селевого типу (16) (рис. 2). Зауважимо, що під час моделювання дані по роках для кожної свердловини було усереднено.

За допомогою цієї програми генеровано реалізації тривимірному випадкового поля із бesselовою кореляційною функцією вигляду (16) та відповідною спектральною функцією, яку задано формулою

$$\Phi(u) = \begin{cases} \left(\frac{u}{a}\right)^3, & 0 \leq u < a \\ 0, & u > a \end{cases} \quad (17^*)$$

за значеннями параметрів $a = a_k = 1,5$; $k = 10$. При цьому для моделювання методом “рандомі-

зації” такого поля використовували алгоритм, що наведений нижче.

1. Моделюємо послідовність випадкових величин $\lambda_i, \lambda_i \in \Lambda_i (i = \overline{1, k})$, $\lambda_i = \alpha \sqrt[3]{a_i^3 - a_{i-1}^3}$ із щільностями розподілу p_i (α – рівномірно розподілена на інтервалі (0,1) випадкова величина):

$$p_i(u) = \begin{cases} \frac{\tau(u)}{P_i}, & u \in \Lambda_i, \\ 0, & u \notin \Lambda_i, \end{cases}$$

де

$$\tau(u) = \Phi'(u) = \begin{cases} 3^3 \frac{u^2}{a^3}, & 0 \leq u < a, \\ 0, & u > a, \end{cases} \quad (18)$$

$p_i = \int d\Phi(\lambda)$; $\Phi(\cdot)$ задано виразом (17*) із параметром $a = 1,5$. При цьому для вибору інтервалу розбиття приймаємо

$$a_k = a, a_i = \frac{a}{k} i, i = 0, 1, \dots, k.$$

2. Визначаємо відповідне для заданої точності наближення $\varepsilon > 0$ значення числа N за допомогою оцінки

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{c}{10}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^6 \left\{ 1 + \frac{(2N+1)^2}{N} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{\pi}{2(N+2)} \left(\frac{N}{2^N}\right)^2 + \frac{N+1}{2^{2(N-1)}} \left(\frac{eN}{2(2N+3)} + \frac{N+1}{2(N+2)} \right) \right] \right\} + \pi^2 \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\left(\frac{2N}{3}\right)^2} \leq \varepsilon. \quad (19)$$

Зазначимо, що $Q = a_k = a = 1,5$; $k = 10$.

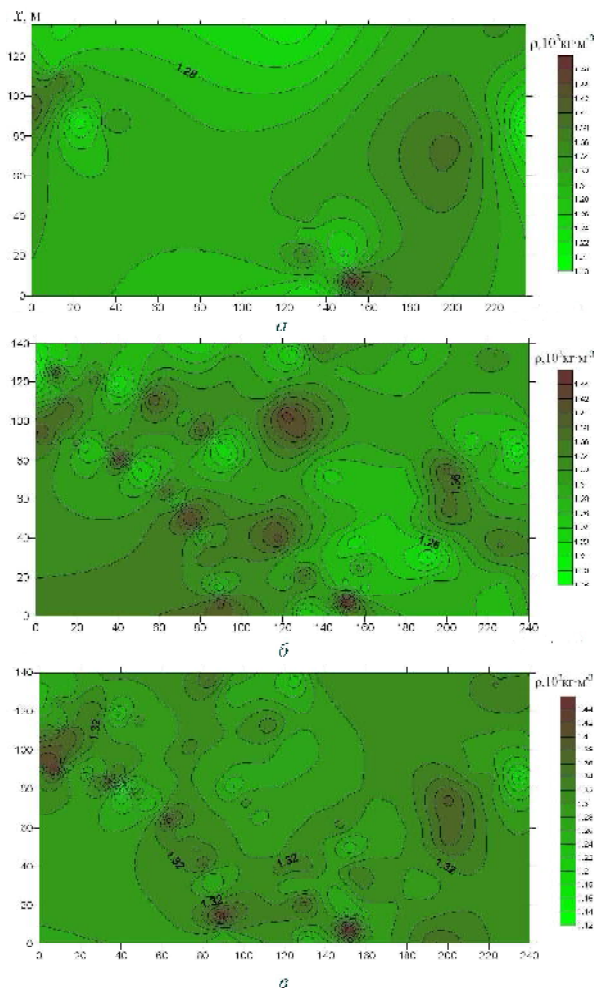


Рис. 3. Приклад розподілу густини крейдяної товщі на промайданчику Рівненської АЕС на площині: *a* – за усередненими даними по спостережних свердловинах за 1984–2003 рр.; *b* – за змодельованими даними, наближеними Бесселевою функцією; *в* – за змодельованими даними методом рандомізації

3. Моделюємо набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин $\{Z_{m,p}^{i,l}\}_{m=0,l=0,i=1}^{N,m,k}$ ($p=1,2$) із нульовим математичним сподіванням та дисперсіями:

$$DZ_{m,p}^{i,l} = \Phi(a_{i-1}) - \Phi(a_i) = \left(\frac{3}{20a}\right)^3 (i - i^2 - 1),$$

$$p = 1, 2; \forall m = 0, 1, \dots, N; l = 0, 1, \dots, m; i = 1, 2, \dots, 10.$$

4. Обчислюємо при підстановці значень величин, обчислених за пунктами 1, 2, та змодельованих гауссівських випадкових величин за пунктом значення реалізації випадкового поля $\xi(\bar{x})$ за формулою

$$\xi_k^N(r, \theta, \varphi) = \frac{\alpha^{-\frac{1}{6}}}{\sqrt{ra^3}} \times \sum_{i=1}^{10} (a_{i+1}^3 - a_i^3)^{-\frac{1}{12}} \sum_{m=0}^N J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda_i r) \sum_{l=0}^m C_{m,l} P_m^l(\cos \theta) \times [\cos l\varphi Z_{m,1}^{i,l} + \sin l\varphi Z_{m,2}^{i,l}]. \quad (20)$$

5. Проводимо дії, описані вище в пункті 5 алгоритму для методу спектрального розкладу.

Для моделі (17), яку використовували для генерування реалізацій досліджуваного поля у фіксованій точці тривимірного простору, обчислення Бесселевих функцій та функцій Лежандра здійснено за допомогою оригінальної програми та перевірено пакетом програм Mathematica 4.0 та програмою Spectr 3.1.

На рис. 3, *a* показано приклад побудови карти густини крейдяної товщі за даними спостережних свердловин (дані усереднені за всі роки по 30 свердловинах на рівні 30 м) за допомогою програми Surfer 7. Детальність цієї побудови за наявними даними не може забезпечити надійну характеристику стану крейдяної товщі.

На рис. 3, *b* ізолінії рівних значень густини крейдяної товщі побудовані на основі змодельованих даних з урахуванням значень у режимних свердловинах методом спектрального розкладу за допомогою спектральних коефіцієнтів. За додатковими даними (змодельовано 160 значень у проміжках між точками спостережень для певного рівня) отримано надійнішу апроксимацію, що дає можливість більш обґрунтовано приймати рішення про стан крейдяної товщі та визначати місця для перевірки та проведення додаткових досліджень.

На рис. 3, *в* ізолінії рівних значень густини крейдяної товщі побудовані на основі змодельованих даних з урахуванням значень у режимних свердловинах методом рандомізації.

Наступним етапом статистичного аналізу даних є перевірка згенерованих даних на адекватність кореляційної функції (рис. 4, *b*) за допомогою пакету програм Geo-R. За результатами досліджень визначено, що за тривимірного моде-

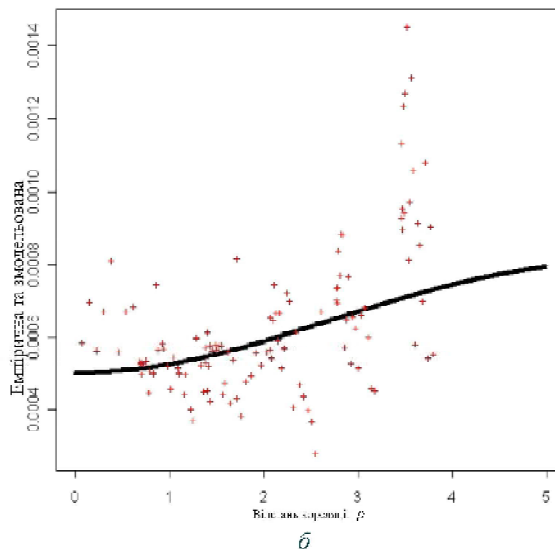
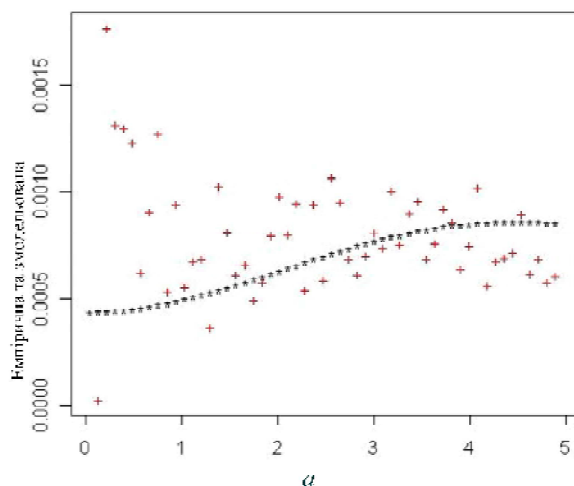


Рис. 4. Емпірична варіограма для кореляційної функції змодельованих даних: *a* – методом “спектральних коефіцієнтів” (*a*) і методом рандомізації (*b*) у вигляді функції Бесселя $B(\rho) = \sqrt{\pi} \frac{J_{3/2}(a\rho)}{(a\rho)^{3/2}}$, $a = 1$, де ρ – вихідні дані; $J_{3/2}$ – функція Бесселя

лювання можливо наблизити таку функцію функцією Бесселя першого роду порядку $3/2$.

За допомогою пакета Geo-R для змодельованих даних, зображених на рис. 3, *б*, *в*, побудовано відповідні варіограми (рис. 4). Показано, що обидва методи дають подібні згенеровані результати. Після застосування методу було перевірено згенеровані дані на гауссовість і зроблено висновок, що отриманий розподіл усереднених значень густини крейдяної товщі має вигляд, наближений до нормального.

Висновки. Одержані результати засвідчують, що модель для вхідних даних спостережень підібрана адекватно, а розроблена програма Srectr3.1 працює з достатньою точністю. Побудова кореляційних функцій та моделей показала, що метод рандомізації дає можливість уникнути складнощів у зв'язку з обчисленням спектральних коефіцієнтів, але він є менш точним.

1. *Abrahamsen P.A.* Review of Gaussian Random Field and Correlation Functions: 2nd ed. – Oslo: (Norway), Norw. Comp. Center, 1997. – 64 p.
2. *Armstrong M., Jabin R.* Variogram models must be positive-definite // *Mathem. Geology.* – 1981. – 13 (5). – P. 455–459.
3. *Chiles J.P., Delfiner P.* Discrete exact simulation by the Fourier method // *Geostatistics Wollongong'96* / Eds. E.Y. Baafi, N.A. Schofield. Kluwer, Dordrecht (Netherlands), 1997. – Vol. 1. – P.258–269.
4. *Mantoglou A., Wilson John L.* Simulation of random fields with turning bands method // *MIT Ralph M. Parsons Lab. Hydrol. and Water Syst. Rept.* – 1981. – № 264. – 199 p.
5. *Matheron G.* Les Variables Regionalisees et leur Estimation. – Paris: Masson, 1965. – 259 p.
6. *Oliver M.A., Webster R.* Semi-variograms for modeling the spatial pattern of landform and soil properties // *Earth Surface Processes and Landforms.* – 1986. – № 11. – P.491–504.
7. *Shinozuka M, Jan C.M.* Digital simulation of random

processes and its applications // *J. Sound and Vibration.* – 1972. – 25, №1. – P. 111–128.

8. *Vyzhva Z.O.* About Approximation of 3-D Random Fields and Statistical Simulation // *Rand. Oper. and Stoch. Equation.* – 2003. – 4, № 3. – P.255–266.
9. *Вижва З.О.* Статистичне моделювання випадкових процесів та полів у науках про Землю // *Математичні моделі в природознавстві: Навч. посібник.* – К.: ВГЛ “Обрії”, 2007. – 164 с.
10. *Вижва С.А.* Геофізичний моніторинг небезпечних геологічних процесів. – К.:ВГЛ “Обрії”, 2004. – 236 с.
11. *Вижва С.А., Вишва З.О.* Про застосування статистичного моделювання випадкових полів з нерівномірною решіткою інтерполяції до задач геофізики // *Геоінформатика.* – 2002. – № 4. – С. 35–40.
12. *Вижва С.А., Вишва З.О.* Про застосування статистичного моделювання тривимірних випадкових полів у задачах геофізичного моніторингу екологічного стану території // *Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Геологія.* – 2003. – Вип. 26. – С. 7–10.
13. *Вижва С.А., Вишва З.О., Демидов В.К.* Статистичне моделювання карстово-суфозійних процесів на території потенційно небезпечних об'єктів // *Геоінформатика.* – 2004. – № 2. – С. 78–86.
14. *Вижва С.А., Вишва З.О., Демидов В.К.* Застосування статистичного моделювання в геофізичному моніторингу стану верхньої частини розрізу промислових об'єктів: Тези доп. IV Міжнар. наук. конф. “Моніторинг небезпечних геологічних процесів та екологічного стану середовища”. – К.: ВГЛ “Обрії”, 2003.
15. *Ядренко М.И.* Спектральная теория случайных полей. – К.: Вища шк., 1980. – 208 с.
16. *Вижва С.А., Вишва З.О., Демидов В.К.* Статистичне моделювання тривимірних випадкових полів у задачах моніторингу геологічного середовища // *Теоретичні та прикладні аспекти геоінформатики.* – К., 2006. – С. 173–184.

Надійшла до редакції 15.01.2008 р.