

Дифракция нестационарной электромагнитной волны на бипериодической решетке

В. А. Ванин, С. Л. Просвирнин

Радиоастрономический институт НАН Украины,
ул. Краснознаменная, 4, г. Харьков, 61002, Украина
E-mail: prosvirn@rian.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 21 июня 2004 г.

На основе потоковой формы уравнений Максвелла построена новая разностная схема решения трехмерной нестационарной задачи дифракции плоской электромагнитной волны на периодической по двум направлениям плоской структуре из металлических ленточных элементов. Для повышения эффективности алгоритма использован принцип монотонизации. Приведены некоторые результаты расчета характеристик поля в задачах дифракции волн на периодических решетках ленточных диполей и С-образных объемных ленточных элементов.

На основі потокової форми рівнянь Максвелла побудована нова різницева схема розв'язку тривимірної нестационарної задачі дифракції плоскої електромагнітної хвилі на періодичній у двох напрямках плоскій структурі з металевих стрічкових елементів. Для підвищення ефективності алгоритму використано принцип монотонізації різницевої схеми. Наведені деякі результати розрахунків характеристик поля в задачах дифракції хвиль на періодичних решітках з стрічкових диполів та об'ємних С-подібних елементів.

Введение

Бипериодические структуры (структуры, периодические по двум направлениям в пространстве) используются в микроволновой технике в качестве частотно-селективных и поляризационно-селективных поверхностей, рассеивающих и поглощающих покрытий, искусственных диэлектриков. Бипериодические структуры являются основой метаматериалов – искусственных сред с электромагнитными свойствами, которые не обнаружены у сред в природе, – со свойствами электромагнитных кристаллов, искусственных магнетиков, сред с отрицательным показателем преломления и др. Использование метаматериалов в микроволновой технике открывает перспективы конструирования устройств с уникальными характеристиками.

Наиболее дешевыми и простыми в изготовлении периодическими структурами являются металлodieлектрические полосковые структуры. В то же время они имеют широкий спектр перспективных для приложений физических свойств. Полосковые периодические структуры (решетки) можно разделить на два большие класса в зависимости от типа элементов, из которых они состоят: структуры из элементов простой формы (диски, прямоугольники и т. п.) и структуры из узких полосок сложной формы. Эти два класса решеток существенно отличаются своими электродинамическими свойствами, прежде всего, характерными для них резонансными частотами. Первый класс решеток имеет резонансы в частотных зависимостях коэффициентов отражения и прохождения на длине волны,

примерно равной удвоенному диаметру элемента, т. е. на длине волны того же порядка, что и размеры периодической ячейки. Второй – может иметь резонансы на длине волны значительно большей, благодаря тому, что длина узкого полоскового элемента сложной формы может существенно превосходить размеры ячейки структуры. Именно это свойство делает периодические решетки из полосок сложной формы (а также дополнительные структуры в виде экранов с узкими щелями) перспективными для использования в качестве элементов новых искусственных материалов для микроволновой техники.

Для численного решения задач рассеяния волн плоскими металлodieлектрическими бипериодическими структурами в частотной области, т. е. стационарных задач, используется метод моментов. Алгоритмы численного анализа дифракции волн на периодических системах из бесконечно тонких плоских металлических элементов, расположенных на диэлектрическом слое, построены в [1, 2]. Анализ электромагнитного поля с помощью метода моментов в периодической системе из неплоских проводящих элементов рассмотрен в [3]. Однако исследование рассеяния волн бипериодическими структурами из полосковых элементов сложной пространственной формы, необходимое для дальнейшего прогресса в области создания метаматериалов, все еще не имеет достаточно эффективной и универсальной, в смысле применимости к структурам из элементов различной формы, базы в виде методов и алгоритмов математического моделирования. Минимальные ограничения на геометрию периодических структур допускают алгоритмы на основе разностных схем во временной области. Решение двумерных задач дифракции волн на однопериодических решетках из элементов со сложной формой поперечного сечения во временной области рассмотрено в [4].

Цель настоящей работы состоит, во-первых, в построении нового эффективного алгоритма решения нестационарных уравнений Максвелла с помощью метода сеток для

анализа свойств электромагнитного поля в трехмерных задачах дифракции волн на бипериодических структурах из металлических полосковых элементов сложной формы; во-вторых, в демонстрации некоторых возможностей этого алгоритма при исследовании характеристик электромагнитного поля на примере задачи дифракции волн на решетке из отрезков металлических лент и на перспективной для приложений в области метаматериалов решетке из С-образных объемных элементов.

Предлагаемый здесь метод решения нестационарной задачи дифракции отличается от широко применяющихся сейчас вариантов метода FDTD [5] “поточковой формой” численного алгоритма на адаптивном разностном шаблоне, обеспечивающем монотонность разностного решения [6], т. е. получение решения без осцилляций, обусловленных алгоритмом. Кроме того, в методе FDTD используются формально две сетки – для векторов напряженности электрического и магнитного поля соответственно – смещенные друг относительно друга вдоль каждой из осей системы координат на одинаковые расстояния. Значения компонент вектора напряженности электрического поля определяются в серединах ребер, а компонент магнитного поля – в серединах соответствующих граней расчетной ячейки разностной сетки. Такой способ построения разностной схемы предполагает использование равномерных сеток для сохранения повышенного порядка аппроксимации. В настоящей работе используется одна разностная сетка, в которой значения векторов напряженности электрического и магнитного поля отнесены к середине расчетной ячейки. “Потоковая форма” уравнений Максвелла дает возможность, при необходимости, использовать криволинейную систему координат, хорошо адаптированную к сложной границе расчетной области. Конечноразностное представление системы уравнений Максвелла в такой форме имеет дивергентный вид, который сохраняется при использовании разностных схем повышенного порядка аппроксимации.

Постановка задачи дифракции

Первичное электромагнитное поле, падающее на периодическую структуру, создается движущимися зарядами и токами, сосредоточенными в некоторой области пространства. Для простоты в качестве источника поля рассмотрим нестационарный диполь, расположенный в точке \mathbf{r}_0 , с дипольным моментом

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{P}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(t).$$

Из уравнения непрерывности для зарядов и токов в источнике поля следует, что нестационарному диполю соответствует плотность электрического тока

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{p}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f'(t).$$

Такой источник создает в пространстве электрическое и магнитное поля, которые можно найти, используя тензорную функцию Грина свободного пространства [7]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{inc}(t, \mathbf{r}) = & -\frac{1}{4\pi\tilde{r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left\{ \frac{f''(t - \tilde{r}/c)}{c} \times \right. \\ & \times \left[\mathbf{p}_0 - \frac{\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{p}_0)}{\tilde{r}^2} \right] + \frac{f'(t - \tilde{r}/c)}{\tilde{r}} \left[\mathbf{p}_0 - 3 \frac{\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{p}_0)}{\tilde{r}^2} \right] \Bigg\} - \\ & - \frac{f(t - \tilde{r}/c)}{4\pi\epsilon_0\tilde{r}^3} \left[\mathbf{p}_0 - 3 \frac{\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{p}_0)}{\tilde{r}^2} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{inc}(t, \mathbf{r}) = & -\frac{1}{4\pi\tilde{r}} \frac{[\tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_0]}{\tilde{r}} \times \\ & \times \left[\frac{f''(t - \tilde{r}/c)}{c} + \frac{f'(t - \tilde{r}/c)}{\tilde{r}} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1.26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м – магнитная

проницаемость вакуума, $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2} = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света.

Первые два слагаемых в (1) соответствуют “полю излучения” и “ближнему полю”. Эти поля распространяются от источника со скоростью света в виде импульсной сферической волны. Третье слагаемое, которое может отличаться от нуля и до, и после прохождения импульса поля, соответствует “статическому” полю электрического диполя. Поле излучения в (1) и (2) является поперечным относительно $\tilde{\mathbf{r}}$, убывает с расстоянием как $1/\tilde{r}$ – медленнее, чем ближнее и статическое поле, и пропорционально второй производной функции $f(t)$. Поэтому, каким бы ни был закон изменения дипольного момента во времени, при условии, что плотность тока имеет конечные пределы при $t \rightarrow \pm\infty$, временная зависимость поля излучения представляет собой финитную функцию с нулевым средним значением.

Мы будем предполагать область пространства, в которой локализован источник поля, расположенной настолько далеко от периодической структуры, что в области, где нас интересует дифракционное поле, падающую волну можно считать плоской, а дифракционное поле – созданным бесконечно протяженной периодической структурой.

Таким образом, мы будем рассматривать возбуждение электромагнитного поля в пространстве с периодической структурой плоской нестационарной волной, приходящей из бесконечности нормально к плоскости структуры. Однако задавая ту или иную зависимость первичного поля от времени, будем всегда предполагать, что это функция с нулевым средним значением.

В рассматриваемой области пространства сторонних токов и зарядов нет. Поэтому электромагнитное поле описывается уравнениями:

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \text{rot } \mathcal{H}, \quad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathcal{E}. \quad (3)$$

Слой, вмещающий периодическую структуру, имеет относительную диэлектрическую ϵ и магнитную μ проницаемости, которые предполагаются не зависящими от времени. Материальные уравнения имеют вид:

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}.$$

Алгоритмизацию решения задачи удобно производить, используя уравнения (3) в следующей нормированной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} = \frac{1}{\epsilon} \text{rot} \mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \tau} = -\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{E}, \quad (4)$$

где $\mathbf{H} = Z_0 \mathcal{H}$ – величина, имеющая размерность напряженности электрического поля \mathcal{E} , В/м; $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ – импеданс свободного пространства, Ом; $\mathbf{E} = \mathcal{E}$; $\tau = ct$ – нормированное время, м (“световой метр” соответствует промежутку времени, за который свет в свободном пространстве проходит расстояние, равное одному метру). Мы будем рассматривать систему уравнений (4) с начальными условиями $\mathbf{E}(0, \mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{H}(0, \mathbf{r}) = 0$ и соответствующими граничными условиями.

Численный метод

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ таким образом, чтобы периодическая структура располагалась параллельно плоскости xu в слое $0 \leq z \leq h$, координатные оси Ox и Oy выберем вдоль направлений периодичности, ось Oz – в направлении распространения падающей волны, см. рис. 1. Для построения конечномерного аналога уравнений (4) их удобно представить в дивергентной форме во введенной системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}_1(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{F}_2(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{F}_3(\mathbf{U}) = 0, \quad (5)$$

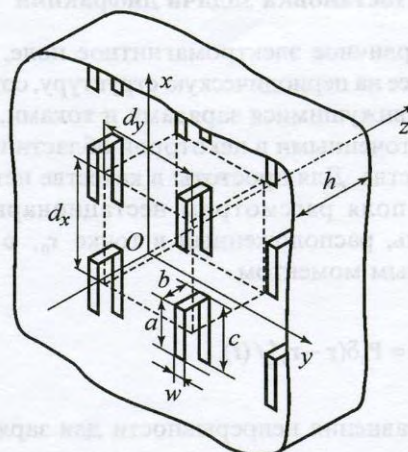


Рис. 1. Периодическая структура из металлических ленточных элементов С-образной формы, расположенных в однородном плоскопараллельном диэлектрическом слое

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon^{-1} H_z \\ -\epsilon^{-1} H_y \\ 0 \\ -\mu^{-1} E_z \\ \mu^{-1} E_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\epsilon^{-1} H_z \\ 0 \\ \epsilon^{-1} H_x \\ \mu^{-1} E_z \\ 0 \\ -\mu^{-1} E_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_3(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1} H_y \\ -\epsilon^{-1} H_x \\ 0 \\ -\mu^{-1} E_y \\ \mu^{-1} E_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Потоковые функции $\mathbf{F}_i(\mathbf{U})$, $i=1, 2, 3$, являются линейными относительно векто-

ра неизвестных \mathbf{U} . При условии, что свойства среды не зависят от напряженности электрического и магнитного поля, времени и координат, их можно записать, используя удобный формализм, принятый в тензорном анализе [8], в виде $\mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}$, где

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{F}_1(\mathbf{U}) = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{F}_2(\mathbf{U}) = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{F}_3(\mathbf{U}) = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} одинаковые и имеют следующие значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -\lambda_5 = -\lambda_6 = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Для дальнейшего использования удобно ввести диагональную матрицу $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$. Компоненты собственных левых векторов запишем в виде строк матриц с соответствующими индексами:

$$\mathbf{L}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & Z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & Z^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -Z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & Z^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ -Z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -Z^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ Z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -Z^{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ Z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & Z^{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -Z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$.

Наряду с дивергентной формой системы уравнений Максвелла введем в рассмотрение недивергентную форму [9] в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{U} + \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{U} = 0. \quad (6)$$

Умножая (6) слева поочередно на матрицы левых собственных векторов матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} , получим характеристические формы уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{L}_A \mathbf{U}) + \Lambda \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{L}_A \mathbf{U}) + (\mathbf{L}_A \mathbf{B}) \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{U} + (\mathbf{L}_A \mathbf{C}) \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{U} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{L}_B \mathbf{U}) + (\mathbf{L}_B \mathbf{A}) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} + \Lambda \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{L}_B \mathbf{U}) + (\mathbf{L}_B \mathbf{C}) \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{U} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{L}_C \mathbf{U}) + (\mathbf{L}_C \mathbf{A}) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} + (\mathbf{L}_C \mathbf{B}) \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{U} + \Lambda \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{L}_C \mathbf{U}) = 0. \quad (9)$$

Из уравнений Максвелла в характеристической форме следует, что векторы $\mathbf{L}_A \mathbf{U}$, $\mathbf{L}_B \mathbf{U}$ и $\mathbf{L}_C \mathbf{U}$ удовлетворяют локально-одномерным уравнениям переноса и, следовательно, являются римановыми параметрами, которые удобно использовать для построения алгоритма численного решения задачи [9]. Римановы параметры, соответствующие системам уравнений (7), (8) и (9), выражаются через компоненты поля следующим образом:

$$\mathbf{R}^x = \begin{pmatrix} E_x \\ H_x \\ H_y - E_z/Z \\ H_z + E_y/Z \\ H_y + E_z/Z \\ H_z - E_x/Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^y = \begin{pmatrix} E_y \\ H_y \\ H_x + E_z/Z \\ H_z - E_x/Z \\ H_x - E_z/Z \\ H_z + E_x/Z \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{R}^z = \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \\ H_x - E_y/Z \\ H_y + E_x/Z \\ H_x + E_y/Z \\ H_y - E_x/Z \end{pmatrix}.$$

Выберем расчетную область для построения разностной схемы, соответствующей уравнениям (4), в виде прямоугольного параллелепипеда, ограниченного

плоскостями $x = \pm d_x/2$, $y = \pm d_y/2$, $z = L_+$ и $z = -L_-$, где $L_+ > h$, $L_- > 0$. Все компоненты поля удовлетворяют условию периодичности в направлениях вдоль осей координат Ox и Oy :

$$\mathbf{U}(\tau, x + d_x, y, z) = \mathbf{U}(\tau, x, y, z), \quad (11)$$

$$\mathbf{U}(\tau, x, y + d_y, z) = \mathbf{U}(\tau, x, y, z).$$

Проинтегрировав уравнения (5) по элементарной пространственно-временной расчетной ячейке и используя формулу Гаусса-Остроградского, а также теорему о среднем, получим выражение для вектора \mathbf{U} в момент времени $\tau_m + \Delta_\tau$ в центре ячейки $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\tau_m + \Delta_\tau, x_i, y_j, z_k)$ через его значение в этой же точке в предыдущий момент времени $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\tau_m, x_i, y_j, z_k)$ и потоковые функции вектора \mathbf{U} на гранях элементарной расчетной ячейки \mathbf{U}^b :

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U} - \alpha \left[\delta_x^+ \mathbf{F}_1(\mathbf{U}^b) S_x + \delta_y^+ \mathbf{F}_2(\mathbf{U}^b) S_y + \delta_z^+ \mathbf{F}_3(\mathbf{U}^b) S_z \right]. \quad (12)$$

Здесь использовано общепринятое обозначение в теории разностных схем [10]:

$$\delta_n^\pm \mathbf{f} = \pm \left[\mathbf{f}(\mathbf{U}(\tau_m, x_i \pm h_x \delta_{nx}, y_j \pm h_y \delta_{ny}, z_k \pm h_z \delta_{nz})) - \mathbf{f}(\mathbf{U}(\tau_m, x_i, y_j, z_k)) \right] -$$

действие разностного оператора на произвольную функцию в направлении n , $n = x, y, z$; δ_{nl} – символ Кронекера; $\alpha = \Delta_\tau/V$; Δ_τ и h_x, h_y, h_z – временной и пространственные шаги интегрирования; m – номер шага по времени; V – объем элементарной расчетной ячейки, (i, j, k) – номер ячейки; S_x, S_y и S_z – площади граней расчетной элементарной ячейки в направлениях, перпендикулярных к соответствующим осям системы координат.

Для того чтобы найти вектор \mathbf{U} на границе элементарной расчетной ячейки, используем волновые характеристические инварианты – римановы параметры (10). В предположении, что поле почти постоянно в пределах грани расчетной ячейки, можно пренебречь слагаемыми с производными в направлениях, не совпадающих с характеристическими направлениями. Тогда, используя на каждой грани расчетной ячейки локально-одномерные характеристические уравнения Максвелла (7), (8) и (9), получим на ней значения параметров электромагнитного поля, которые входят в формулы вычисления граничных потоков в разностной схеме (12). На гранях, перпендикулярных оси Ox , граничные значения поля можно найти по формуле –

$$\mathbf{U}^b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_x^+ + E_x^- \\ \left[(H_z + E_y/Z)^- - (H_z - E_y/Z)^+ \right] Z \\ \left[(H_y + E_z/Z)^+ - (H_y - E_z/Z)^- \right] Z \\ H_x^+ + H_x^- \\ (H_y + E_z/Z)^+ + (H_y - E_z/Z)^- \\ (H_z - E_y/Z)^+ + (H_z + E_y/Z)^- \end{pmatrix}, \quad (13)$$

для граней, перпендикулярных оси Oy , –

$$\mathbf{U}^b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_y^+ + E_y^- \\ \left[(H_z + E_x/Z)^+ - (H_z - E_x/Z)^- \right] Z \\ \left[(H_x + E_z/Z)^- - (H_x - E_z/Z)^+ \right] Z \\ (H_x - E_z/Z)^+ + (H_x + E_z/Z)^- \\ H_y^+ + H_y^- \\ (H_z + E_x/Z)^+ + (H_z - E_x/Z)^- \end{pmatrix} \quad (14)$$

и для граней, перпендикулярных оси Oz , –

$$\mathbf{U}^b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left[(H_y + E_x/Z)^- - (H_y - E_x/Z)^+ \right] Z \\ \left[(H_x + E_y/Z)^+ - (H_x - E_y/Z)^- \right] Z \\ E_z^+ + E_z^- \\ (H_x + E_y/Z)^+ + (H_x - E_y/Z)^- \\ (H_y - E_x/Z)^+ + (H_y + E_x/Z)^- \\ H_z^+ + H_z^- \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Величины с индексами “±” будем вычислять с использованием алгоритма одномерной реконструкции их распределения в пределах элементарной расчетной ячейки. Это дает возможность повысить порядок аппроксимации с сохранением монотонности разностного решения. Алгоритм одномерной реконструкции построен следующим образом. Вычисляются значения восстановленных распределений параметров Римана слева $(\mathbf{R}^n)^-$ и справа $(\mathbf{R}^n)^+$, $n = x, y, z$, на грани ячейки и по ним находятся значения векторного аргумента \mathbf{U}^b потоковых функций $\mathbf{F}_i(\mathbf{U}^b)$ для (12). Схема расчета компонент поля на гранях ячейки с использованием характеристик иллюстрируется рис. 2.

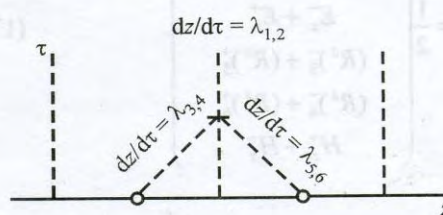


Рис. 2. Иллюстрация способа расчета компонент поля на перпендикулярной к оси Oz границе между соседними элементарными расчетными ячейками по значениям компонент поля в центрах этих ячеек

Вначале находим граничные значения параметров Римана:

$$\begin{aligned} (R^n)_i^+ &= R_i^n + \frac{1}{2}\chi(u_l)\delta_n^+ R_i^n + \frac{1}{2}\Delta_\tau \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} R_i^n \right\rangle, \\ (R^n)_i^- &= R_i^n (+1n) - \frac{1}{2}\chi(1/u_l(+1n))\delta_n^+ R_i^n + \\ &+ \frac{1}{2}\Delta_\tau \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} R_i^n(+1n) \right\rangle, \end{aligned} \quad (16)$$

где $u_l = \delta_n^- R_i^n / \delta_n^+ R_i^n$, $n = x, y, z$, $l = 1, 2, \dots, 6$; $\chi(u_l)$ – монотонизирующая функция [11]; $\langle \partial R_i^n / \partial \tau \rangle$ – некоторая разностная аппроксимация производной $\partial R_i^n / \partial \tau$; обозначение $+1n$ в аргументе функции показывает, что ее значение берется в центре соседней расчетной ячейки в направлении оси n по отношению к рассматриваемой ячейке. Для численных расчетов производные по времени $\langle \partial R_i^n / \partial \tau \rangle$, $l = 1, 2, \dots, 6$, заменялись производными по координатам с использованием (7), (8), (9) с соответствующей аппроксимацией их разностными соотношениями. Затем, используя (15), находим значение U на границе расчетной ячейки, перпендикулярной к оси Oz :

$$U^b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [(R^z)_4^- - (R^z)_6^+] Z \\ -[(R^z)_3^- - (R^z)_5^+] Z \\ E_z^- + E_z^+ \\ (R^z)_3^- + (R^z)_5^+ \\ (R^z)_4^- + (R^z)_6^+ \\ H_z^+ + H_z^- \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Для остальных граней расчетные формулы легко получить из (13), (14), (17). Использование симметричных и несимметричных операторов одного порядка аппроксимации в адаптивном, динамически перестраиваемом под “гладкость” разностного решения

шаблоне в монотонизирующей функции дает возможность согласовать повышенный порядок аппроксимации разностной схемы с устойчивостью решения [12]. Приведенные ниже численные результаты получены с использованием в (16) монотонизирующей функции вида

$$\chi(u_l) = \begin{cases} 0, & u_l \in (-\infty, 0); \\ u_l, & u_l \in [0, 1]; \\ 1, & u_l \in (1, \infty). \end{cases} \quad (18)$$

Для решения задачи необходимо сформулировать условия на границе расчетной области, которые определяют поле внутри нее. Пусть на периодическую структуру нормально к ее поверхности вдоль оси Oz из области $z < -L_-$ падает плоская электромагнитная волна, которая в плоскости $z = -L_-$ имеет напряженность электрического поля

$$E^{inc}(\tau, \mathbf{r}) = e_x E_x^{inc}(\tau) + e_y E_y^{inc}(\tau). \quad (19)$$

Соответствующая напряженность магнитного поля имеет вид:

$$H^{inc}(\tau, \mathbf{r}) = [-e_x E_y^{inc}(\tau) + e_y E_x^{inc}(\tau)] / Z. \quad (20)$$

Электромагнитное поле с такими компонентами в плоскости $z = -L_-$ может распространяться только в положительном направлении оси Oz . В начальный момент, как уже отмечалось выше, поле предполагается равным нулю. Фактически (19) и (20) представляют собой граничные условия, которые обеспечивают перенос компонент поля падающей волны через границу расчетной области, причем только в направлении оси Oz . Электромагнитная волна распространяется в расчетной области, достигает плоскости периодической структуры, взаимодействует с ее элементами и частично или полностью отражается. Для бес-

печения выхода отраженной волны из расчетной области, когда ее передний фронт достигает границы $z = -L_-$, производится смена граничных условий. Условия (19) и (20), которые инициируют в расчетной области поле падающей волны, заменяются соотношениями:

$$\begin{cases} [H_x - E_y/Z]^- = f_3(\tau, \mathbf{r}), \\ [H_x + E_y/Z]^+ = f_5(\tau, \mathbf{r}); \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} [H_y + E_x/Z]^- = f_4(\tau, \mathbf{r}), \\ [H_y - E_x/Z]^+ = f_6(\tau, \mathbf{r}); \end{cases}$$

где функции $f_3(\tau, \mathbf{r})$ и $f_4(\tau, \mathbf{r})$ полагаются равными нулю, а $f_5^+(\tau, \mathbf{r})$, $f_6^+(\tau, \mathbf{r})$ вычисляются по значениям параметров поля справа от рассматриваемой границы, индекс функции $f_i(\tau, \mathbf{r})$ соответствует номеру компоненты параметра Римана \mathbf{R}^z . Фактически падающее поле “выключается” начиная с некоторого момента, предшествующего достижению отраженным полем границы расчетной области $z = -L_-$. С этого момента функции $E_x^{inc}(\tau)$ и $E_y^{inc}(\tau)$ полагаются равными нулю.

На границах расчетной области, перпендикулярных плоскости периодической структуры, задаются условия периодичности (11).

На границе $z = L_+$ значения тангенциальных к ней компонент электрического и магнитного поля для вычисления потоков находятся из соотношений (21). Функции $f_3(\tau, \mathbf{r})$ и $f_4(\tau, \mathbf{r})$ вычисляются по значениям поля в ячейках, примыкающих слева к границе расчетной области, а $f_5^+(\tau, \mathbf{r})$ и $f_6^+(\tau, \mathbf{r})$ вычисляются по данным об электромагнитном поле в области справа от границы расчетной области, т. е. их необходимо положить равными нулю, если справа от границы нет внешних источников поля.

Граничное условие на поверхности идеально проводящего бесконечно тонкого элемента периодической структуры пред-

ставляет собой требование равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля. Для краткости приведем здесь эти условия только для идеально проводящей плоскости, расположенной перпендикулярно к оси Oz :

$$E_x^\pm = 0, \quad E_y^\pm = 0 \quad \text{при} \quad z = z_0 \pm 0, \quad (22)$$

где z_0 – координата проводящей плоскости. Следствием условий (22) являются формулы, которые дают возможность найти тангенциальные компоненты магнитного поля по обе стороны в плоскости $z = z_0$:

$$H_x^- = R_3^z(x_i, y_j, z_k) + \frac{1}{2} \chi(u_3) \delta_z^+ R_3^z + \frac{\Delta_\tau}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} R_3^z \right\rangle,$$

$$H_y^- = R_4^z(x_i, y_j, z_k) + \frac{1}{2} \chi(u_4) \delta_z^+ R_4^z + \frac{\Delta_\tau}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} R_4^z \right\rangle$$

при $z = z_0 - 0$ и

$$H_x^+ = R_5^z(x_i, y_j, z_{k+1}) - \frac{1}{2} \chi(u_5(+1z)) \delta_z^+ R_5^z + \frac{\Delta_\tau}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} R_5^z \right\rangle,$$

$$H_y^+ = R_6^z(x_i, y_j, z_{k+1}) - \frac{1}{2} \chi(u_6(+1z)) \delta_z^+ R_6^z + \frac{\Delta_\tau}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} R_6^z \right\rangle$$

при $z = z_0 + 0$.

Численные результаты

Поле падающей волны было выбрано линейно поляризованным вдоль оси Ox , т. е. в (19) и (20) полагалось $E_y^{inc}(\tau) \equiv 0$. Рассматривались, в основном, два вида зависимости поля от времени: импульс Неймана

$$E_x^{inc}(\tau) = 2 \frac{\tau - \tau_0}{\Delta^2} \exp\left[-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{\Delta^2}\right] \quad (23)$$

и импульс с синусоидальной зависимостью от времени и прямоугольной огибающей

$$E_x^{inc}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0; \\ \sin \varpi \tau, & 0 \leq \tau \leq (2\pi/\varpi)N; \\ 0, & \tau \geq (2\pi/\varpi)N; \end{cases} \quad (24)$$

где N – число полных периодов в импульсе (ниже результаты расчетов приведены для случая $N \geq 4$), ϖ – нормированная круговая частота, связанная с обычной круговой частотой следующим образом: $\varpi = \omega/c$.

Тестирование алгоритма первоначально было выполнено на элементарных примерах. С его помощью моделировалось распространение бегущей волны вида (23) в свободном пространстве. Далее, физически очевидные результаты были получены в задаче об отражении плоской импульсной волны идеально проводящей плоскостью, плоской границей раздела свободного и диэлектрического полупространств и плоскопараллельным диэлектрическим слоем. Полученные в результате тестирования алгоритма данные позволили подобрать число Куранта $\Delta\tau/\max(h_x, h_y, h_z) = 0.4$, т. е. выбрать параметры алгоритма, близкие к оптимуму по критерию минимального времени расчета при точности результатов порядка нескольких процентов.

Тестовые примеры дали возможность убедиться в устойчивости алгоритма при моделировании распространения нестационарных волн в плоскостной среде. Предложенная разностная схема хорошо моделирует распространение плоской волны с синусоидальной зависимостью от времени (24) с числом периодов, достаточно большим для того, чтобы поле такого узкополосного импульса можно было в задачах дифракции с хорошей степенью точности рассматривать, как соответствующее полю монохроматической волны.

Задача дифракции плоской нестационарной волны рассмотрена для двух типов би-периодических решеток: для решетки из прямых отрезков металлических лент и решетки из объемных металлических ленточных элементов С-образной формы. Ленты предполагались идеально проводящими и бесконечно тонкими. Решетка из отрезков металлических лент – ленточных диполей, представляет собой частный случай структуры из объемных С-образных элементов, показанных на рис. 1, при $b = c = 0$.

На рис. 3 показана частотная зависимость коэффициента отражения решетки ленточных диполей для случая нормального падения плоской монохроматической волны, поляризованной вдоль диполей ($d_x = d_y = 10.0$ мм, $a = 8.5$ мм, $w = 2.5$ мм, элементы решетки расположены в свободном пространстве). Сплошной кривой показана зависимость, полученная путем численного решения задачи дифракции в частотной области с помощью метода, описанного в [2]. Для этого численно методом моментов решалось интегральное уравнение отно-

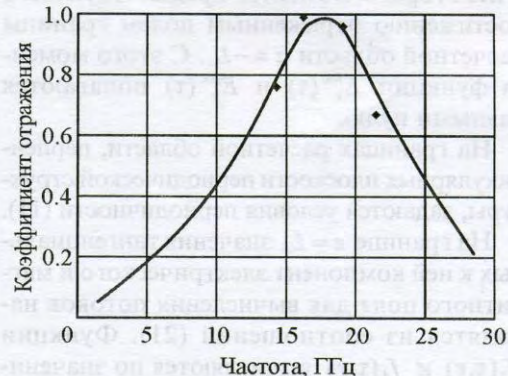


Рис. 3. Зависимость от частоты коэффициента отражения решетки ленточных диполей ($d_x = d_y = 10$ мм, $a = 8.5$ мм, $w = 2.5$ мм, элементы решетки расположены в свободном пространстве): сплошная линия – зависимость, полученная с помощью алгоритма [2] в частотной области; отдельные точки – результаты, найденные с использованием представленного в настоящей статье алгоритма во временной области

сительно плотности поверхностного тока на лентах решетки при падении на нее монохроматической волны. Отдельные точки на рис. 3 соответствуют значениям коэффициента отражения, найденного с помощью предложенного в настоящей статье алгоритма. Рассматривался импульс (24) длительностью 4 и более целых периодов синусоиды. Параметры алгоритма были выбраны следующими: элементарная расчетная ячейка – куб с ребром 0.25 мм; число Куранта 0.4; размер расчетной области $40 \times 40 \times 200$ элементарных пространственных ячеек, что соответствует ее линейным размерам, равным вдоль осей Ox и Oy периоду решетки, а вдоль оси Oz – 50 мм; $L_- = 46.25$ мм; $L_+ = 3.75$ мм.

На рис. 4 показаны линии уровня распределений компонент напряженности электрического поля в плоскости перед решеткой со стороны падающего поля на расстоянии половины размера элементарной расчетной ячейки, т. е. на расстоянии 0.125 мм. Границы картин распределений соответствуют одному периоду решетки и выбраны симметрично относительно диполя. Картины ближнего поля соответствуют параметру $\varpi = 3.4 \text{ см}^{-1}$ в (24) и моменту времени, при котором $\tau = 118.75$ мм. Падающее поле было “выключено” непосредственно перед тем, как передний фронт отраженного импульса достиг границы расчетной области $z = -L_-$.

Расчеты распределения поля при дифракции синусоидальной волны (24) на периодической структуре объемных С-образных металлических ленточных элементов (см. рис. 1) показали, что низший по частоте максимум резонансного отражения соответствует длине волны, примерно равной длине металлической ленты, образующей элемент. Это соответствует резонансным свойствам периодических структур из плоских С-образных элементов, установленным в [13]. На рис. 5 показано распределение компонент электромагнитного поля в слое расчетных ячеек, непосредственно примыкающих к поверхности элемента снаружи и изнутри. Величины компонент поля представлены в зависимости от номера расчетной

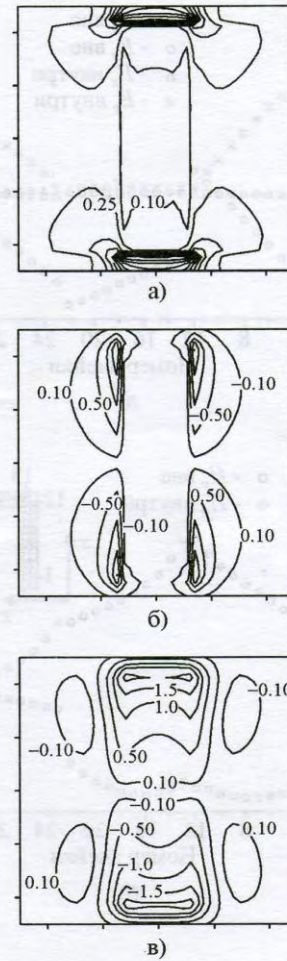


Рис. 4. Линии уровня распределений компонент напряженности электрического поля в плоскости $z = -0.125$ мм при дифракции на решетке ленточных диполей синусоидального импульса: а) – распределение E_x -компоненты поля, б) – E_y , в) – E_z

ячейки (номера указаны на вставке рис. 5). Ячейки внутреннего и внешнего слоев пронумерованы в одинаковом порядке, причем двум внутренним угловым ячейкам соответствуют номера 12, 13 и 22, 23. По ширине ленты, образующей элемент, укладывается 10 ячеек. Графики построены для значений поля в средней (5-й от края ленты) полосе ячеек вдоль ленты. Распределение компонент поля и его эволюция во времени по-

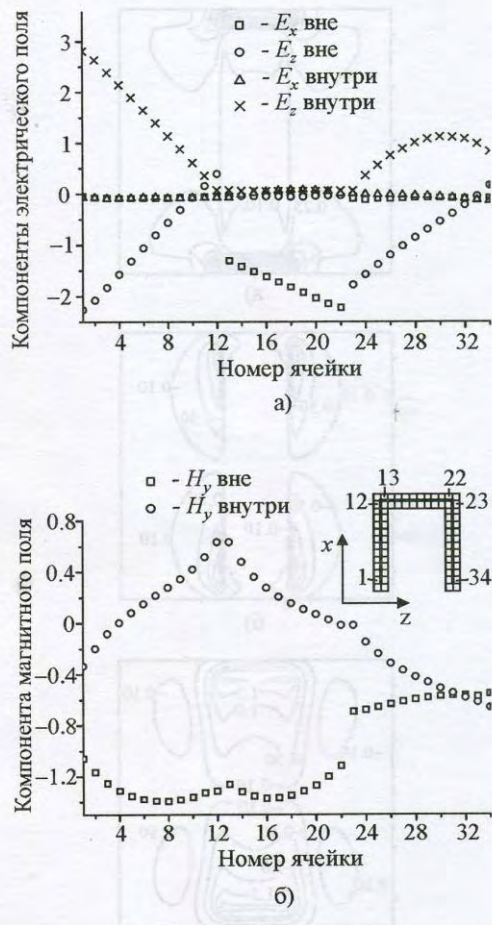


Рис. 5. Распределение компонент электрического (а) и магнитного (б) полей в непосредственной близости к элементу решетки в момент времени, соответствующий установившемуся синусоидальному волновому процессу ($\tau = 108$ нс, $\omega = 3.4$ см⁻¹). Значения компонент поля вычислены в средних точках элементарных расчетных ячеек, прилегающих к проводящему элементу (т. е. на расстоянии 0.125 мм от его поверхности) и расположенных вдоль средней линии металлической ленты, образующей объемный С-образный элемент. Размеры решетки: $d_x = d_y = 10$ мм, $a = c = 3$ мм, $b = 2.5$ мм, $w = 2.5$ мм; элементы решетки расположены в свободном пространстве

казывают, что по элементу решетки благодаря поверхностному току происходит перераспределение заряда такое же, как в обычном прямолинейном диполе.

Выполненные расчеты в своей совокупности свидетельствуют о применимости предлагаемого алгоритма для решения задач дифракции нестационарных электромагнитных волн на периодических по двум направлениям решетках из элементов сложной формы.

Заключение

Таким образом, с помощью построенного алгоритма удается получить численное решение трехмерных задач дифракции на бипериодических решетках из металлических ленточных элементов плоской нестационарной электромагнитной волны, спектр которой имеет максимум в окрестности нижней резонансной частоты элемента решетки. Используемая разностная схема менее громоздка, чем традиционные алгоритмы FDTD. Этот результат достигнут благодаря применению потоковой формы численного алгоритма на адаптивном разностном шаблоне, обеспечивающем монотонность решения, и использованию единой разностной сетки для векторов напряженности электрического и магнитного полей. Конечноразностное представление системы уравнений Максвелла в такой форме имеет дивергентный вид, который сохраняется при использовании разностных схем повышенного порядка аппроксимации.

Отметим проблемы, решение которых позволит повысить эффективность алгоритма. В предлагаемом алгоритме использованы неасимптотические принципы монотонизации. Они широко применяются в задачах газовой динамики для построения конечномерных моделей, аппроксимирующих нелинейные системы уравнений в частных производных. Их применение к решению систем линейных дифференциальных уравнений приводит к некоторому нарушению принципа суперпозиции, причем погрешность находится на уровне погрешности аппроксимации разностной схемы. Поэтому для таких линейных систем, в частности для системы уравнений Максвелла, необходима разработка монотонизирующих ограничителей, не нарушающих принцип суперпозиции на

разностном уровне или сводящих эту погрешность к величине более высокого порядка малости по параметру дискретизации.

Важными для численного решения систем линейных уравнений являются дисперсионные и диссипативные свойства используемых разностных схем, привносящие фазовую и амплитудную погрешности в разностное решение. Для их исследования разработан соответствующий математический аппарат – метод дифференциальных приближений. Однако для систем уравнений Максвелла и их разностных аналогов такое исследование не проведено. Не выяснен вопрос о влиянии монотонизирующих функций на вид дифференциального приближения соответствующей разностной схемы.

Отметим также возможность применения неявных разностных схем, т. е. таких, которые на каждом шаге по времени используют информацию о поле не только в предыдущие моменты времени, как в явной схеме, но и в расчетный момент. Неявные схемы снимают необходимое в явной схеме жесткое ограничение на величину шага интегрирования по времени, не связанное со скоростью изменения параметров электромагнитного поля.

Литература

1. J. P. Montgomery. IEEE Trans. Antennas Propag. 1975, **AP-23**, No. 1, pp. 70-75.
2. С. Л. Просвирнин. Радиотехника и электроника. 1999, **44**, вып. 6, с. 681-686.
3. Н. К. Schuman, D. R. Pflug, L. D. Thompson. IEEE Trans. Antennas Propag. 1984, **AP-32**, No. 4, pp. 364-377.
4. Ю. К. Сиренко. Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических, волноводных и компактных резонаторах. Харьков, ЭДЕНА, 2003, 363 с.
5. A. Hoorfar, V. Jamnejad. IEEE Microwave Magazine. 2003, **4**, No. 1, pp. 51-67.
6. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Москва, Наука, 1978, 688 с.
7. Л. Фелсен, Н. Маркувец. Излучение и рассеяние волн. Том 1. Москва, Мир, 1978, 548 с.
8. А. А. Борисенко, И. Е. Тарапов. Векторный

анализ и начала тензорного исчисления. Харьков, Вища школа, 1986, 216 с.

9. С. К. Годунов. Уравнения математической физики. Москва, Наука, 1971, 416 с.
10. А. А. Самарский. Теория разностных схем. Москва, Наука, 1977, 656 с.
11. В. А. Ванин. Труды IX межд. симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". Орел, Россия, 2000, с. 101-104.
12. В. А. Ванин. 36. наукових праць Інституту математики НАНУ. 1998, вип. 1(17), с. 44-49.
13. S. L. Prosvirnin, S. A. Tretyakov, T. D. Vasilyeva, A. Fourier-Lamer, S. Zouhdi. Journal of Electromagnetic Waves and Applications. 2000, **14**, No. 6, pp. 807-826.

Time-Dependent Electromagnetic Wave Diffraction by Double Periodic Array

V. A. Vanin and S. L. Prosvirnin

A new difference scheme for the solution of a three-dimensional time-dependent problem of plane electromagnetic wave diffraction by a planar two-direction periodic structure of metal strip elements is constructed with the flow form of the Maxwell equations. The monotonicity principle is applied to upgrade the algorithm efficiency. Some calculated field characteristics in the problems of wave diffraction by periodic arrays of strip dipoles and C-shaped volumetric strip elements are demonstrated.