

Рассеяние электромагнитных волн на специальных пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер

А. И. Козарь

Харьковский национальный университет радиоэлектроники,

Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14

E-mail: Anatolij.I.Kozar fizika@kture.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 15 апреля 2003 г.

Рассмотрено решение задачи о рассеянии электромагнитных волн на специальных сложных пространственных решетках резонансных сфер, пространственное распределение которых подчинено геометрической прогрессии. Получены выражения для рассеянных полей.

Розглянуто розв'язок задачі про розсіювання електромагнітних хвиль на спеціальних складних просторових ґратках резонансних сфер, просторовий розподіл яких підпорядкований геометричній прогресії. Одержано вирази для розсіяних полів.

Введение

Особый интерес представляют решетки, у которых электромагнитное взаимодействие между рассеивающими элементами и сами рассеивающие элементы обладают резонансными свойствами. Такие характеристики имеют решетки, построенные из резонансных магнитодиэлектрических сфер.

Рассеивающие свойства решеток определяются их топологической структурой и особенностями рассеивающих элементов. Задавая топологическую структуру, можно получить решетки с нужными анизотропными характеристиками. Одним из способов задания топологической структуры может быть подчинение ее различным структурам чисел. Эти решетки будут отличаться от периодических, назовем их специальными. В качестве примера рассмотрим структуру чисел, определяемую геометрической прогрессией, которую представим в виде таблицы чисел (см. таблицу).

Для представленной структуры чисел общий член геометрической прогрессии

Таблица

$ t \backslash s $	0	1	2	3	4	5	6	7	—
0	1	1	1	1	1	1	1	1	—
1	1	2 ¹	3 ¹	4 ¹	5 ¹	6 ¹	7 ¹	8 ¹	—
2	1	2 ²	3 ²	4 ²	5 ²	6 ²	7 ²	8 ²	—
3	1	2 ³	3 ³	4 ³	5 ³	6 ³	7 ³	8 ³	—
4	1	2 ⁴	3 ⁴	4 ⁴	5 ⁴	6 ⁴	7 ⁴	8 ⁴	—
5	1	2 ⁵	3 ⁵	4 ⁵	5 ⁵	6 ⁵	7 ⁵	8 ⁵	—
6	1	2 ⁶	3 ⁶	4 ⁶	5 ⁶	6 ⁶	7 ⁶	8 ⁶	—
7	1	2 ⁷	3 ⁷	4 ⁷	5 ⁷	6 ⁷	7 ⁷	8 ⁷	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

$a_n = a_1 q_0^{n-1}$ для случая, когда $a_1 = 1$, $q_0 = |s| + 1$, $n = |t| + 1$, где $|s| = 0, 1, 2, 3, \dots$; $|t| = 0, 1, 2, 3, \dots$, запишем в виде

$$a_{|t|+1} = (|s| + 1)^{|t|}$$

Каждому значению $|s|$ сопоставляется свой столбец таблицы чисел. Столбцу с $|s| = 0$ соответствует последовательность чисел, состоящая из единиц.

Целью работы является решение задачи о рассеянии электромагнитных волн на специальных сложных пространственных решетках малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сфер, пространственное распределение которых подчинено геометрической прогрессии. В этой задаче длина рассеиваемой волны может быть соизмерима с постоянными решетки, что позволяет изучить влияние решеточных структурных резонансов электромагнитного взаимодействия между сферами на внутренние резонансы сфер решетки и их тонкую структуру. Предлагаемое решение дает возможность исследовать свойства областей аномальной дисперсии решеток.

Постановка и решение задачи

Рассмотрим специальную сложную пространственную решетку, состоящую из C специальных подрешеток c ($c \in C$). Эти специальные подрешетки c порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$x_{c,s} = [s - 0.5\{(-1)^s - 1\}]d - (-1)^{s-1} x_{c,s=0}$$

$$(s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$y_{c,t} = [t - 0.5\{(-1)^t - 1\}]h - (-1)^{t-1} y_{c,t=0}$$

$$(1)$$

$$(t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$z_{c,p} = [p - 0.5\{(-1)^p - 1\}]l - (-1)^{p-1} z_{c,p=0}$$

$$(p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm [(|s| + 1)^{|t|} - 1]),$$

где величины d, h, l определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h; z = 0, z = l$; а $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ – координаты узла, порождающе-

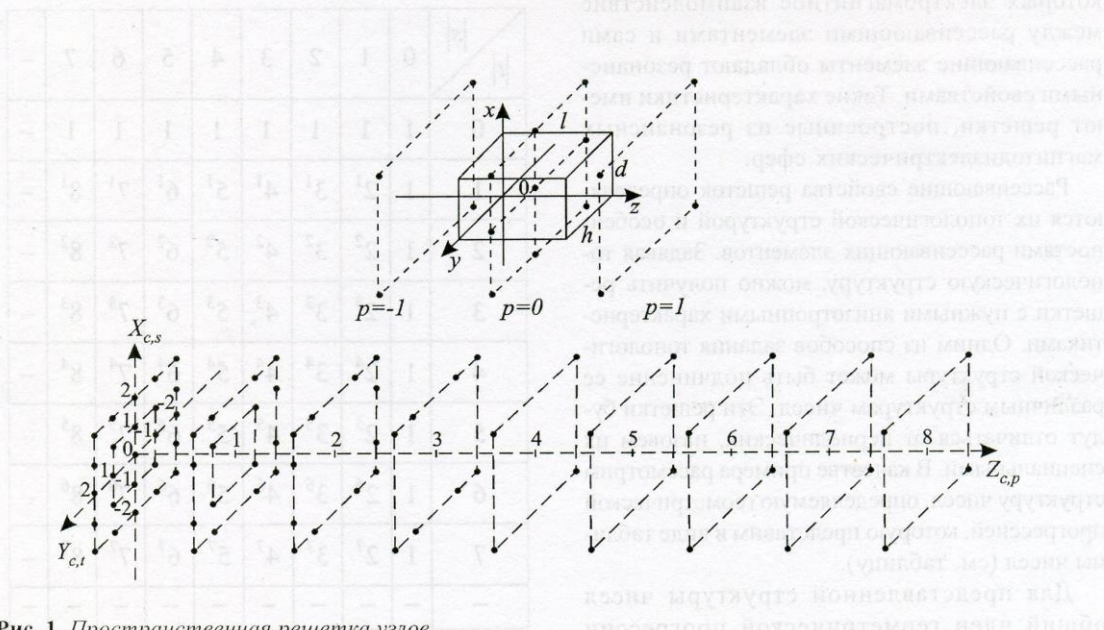


Рис. 1. Пространственная решетка узлов

го специальную подрешетку c и находящегося внутри области (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{c,s=0} \leq d, \\ 0 \leq y_{c,t=0} \leq h, \\ 0 \leq z_{c,p=0} \leq l. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее для краткости термин “специальный” в названии решеток и подрешеток опустим.

Координаты $x_{c,s}$, $y_{c,t}$, $z_{c,p}$ определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (2) и являются функциями координат $x_{c,s=0}$, $y_{c,t=0}$, $z_{c,p=0}$. В координатное представление (1) можно ввести зависимость от времени, если координаты $x_{c,s=0}$, $y_{c,t=0}$, $z_{c,p=0}$ считать некоторыми функциями времени. Каждому узлу пространственной подрешетки c (1) сопоставляется упорядоченная тройка чисел $u = c(p, s, t)$, выделенный узел решетки будем обозначать $u' = c'(p', s', t')$, а узел внутри области (2) – $c(p = 0, s = 0, t = 0)$. Задавая максимальные значения для чисел (p, s, t) в (1), можно рассматривать конечные и бесконечные решетки.

Нужный тип элементарной ячейки решетки (примитивную, объемноцентрированную, гранецентрированную и другие) формируют из C узлов внутри области (2), которую повторит за пределами области (2) координатное представление (1) в виде пространственной решетки определенного вида.

На рис. 1 представлены пространственные распределения узлов решетки, когда порождающий узел решетки находится в центре области (2), для случаев: $p = 0, \pm 1$, $s = 0, \pm 1$, $t = 0, \pm 1$, и $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, $s = 0, \pm 1, \pm 2$, $t = 0, \pm 1, \pm 2$.

Распределение узлов вдоль оси z подчинено таблице чисел (рис. 2). Каждой тройке чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}$, $y_{c,t}$, $z_{c,p=0}$ ставится в соответствие определенное число таблицы, например, точке $(p = 0, s = -3, t = -3)$ соответствует число 4^3 , точке $(p = 0, s = -5, t = 4)$ – число 6^4 , а точке $(p = 0, s = 4, t = 3)$ – число 5^3 . Эти числа и определяют количество узлов вдоль оси z для рассматриваемой точки $(p = 0, s, t)$ (рис. 2). Между тройкой чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}$, $y_{c,t}$, $z_{c,p=0}$ и числом таблицы (рис. 2) существует связь, характеризуемая функцией

$$(|s| + 1)^{|t|}.$$

Отсюда последовательность чисел p , связанная с координатами узлов вдоль оси z , имеет вид:

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm ((|s| + 1)^{|t|} - 1),$$

где $|s|, |t| = 0, 1, 2, 3, \dots$.

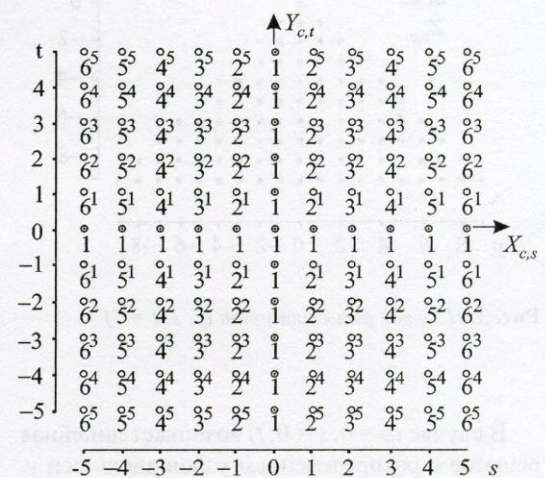


Рис. 2. Таблица чисел на плоскости $X_{c,s}$, $Y_{c,t}$

Если изменять координаты узлов в области (2), то положения узлов вне этой области будут также соответствующим образом смещаться и будет происходить перестройка ячеек и формирование пространственной конфигурации решетки.

Расстояние между узлами определим следующим образом:

$$\begin{aligned} r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)} = \\ = \sqrt{(x_{c',s'} - x_{c,s})^2 + (y_{c',t'} - y_{c,t})^2 + (z_{c',p'} - z_{c,p})^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если в центре области (2) находится один порождающий узел решетки, то для случая $(p, s, t = 1)$ из (1) получим плоскую решетку с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся ряду натуральных чисел (см. рис. 3).

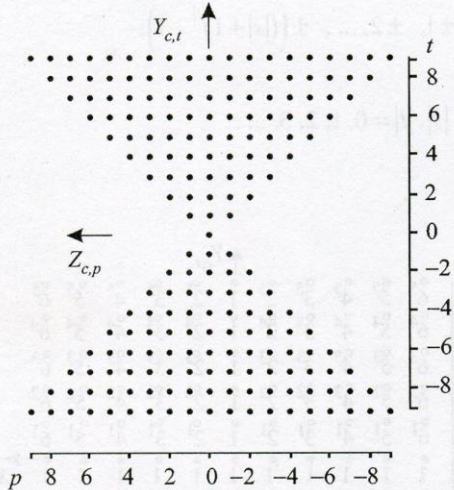


Рис. 3. Плоская решетка узлов $(p, s, t = 1)$

В случае $(p = 0, s = 0, t)$ возникает линейная решетка с распределением узлов вдоль оси z .

При $(p, s = 1, t)$ получается плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся последовательности чисел $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots$ (рис. 4).

Произведя соответствующие сечения распределения узлов (1), можно получить различного вида плоские перестраиваемые решетки.

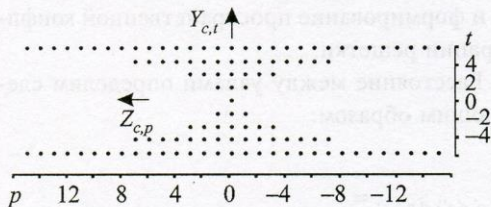


Рис. 4. Плоская решетка узлов $(p, s = 1, t)$

Если в области (2) сформирована элементарная ячейка, то вместо одиночных узлов в решетках (рис. 3, 4) будут находиться ячейки из области (2).

В узлы подрешеток (1) помещаются центры сфер с электрической и магнитной проницаемостями $\epsilon_{c(p,s,t)}$, $\mu_{c(p,s,t)}$ и радиусами $a_{c(p,s,t)}$, которые дальше будем обозначать ϵ_c , μ_c , a_c . Сферы решетки находятся в свободном пространстве. Будем считать, что вне сфер выполняется условие $a_c/\lambda \ll 1$, но внутри сферы возможен резонансный случай $a_c/\lambda_g \sim 1$, где λ – длина волны вне сфер, а λ_g – длина волны в сфере [1].

Для решения задачи используем интегральные уравнения [2] и решать её будем в два этапа. На первом этапе найдем внутреннее поле рассеивающих сфер, а на втором – поле, рассеянное пространственной решеткой сфер. Поля представим в виде $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$, $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$.

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^3$ и магнитный $\vec{\Pi}^M$ потенциалы Герца:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{расс}} &= (\nabla\nabla + k^2\epsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^3 - ik\mu_0[\nabla, \vec{\Pi}^M], \\ \vec{H}_{\text{расс}} &= (\nabla\nabla + k^2\epsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^M + ik\epsilon_0[\nabla, \vec{\Pi}^3]. \end{aligned} \quad (4)$$

Потенциалы Герца рассеянного поля имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^3 &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \vec{E}^0(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) dV, \\ \vec{\Pi}^M &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}^0(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) dV, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\vec{E}^0(\vec{r}')$, $\vec{H}^0(\vec{r}')$ – внутренние поля рассеивателя; V – объем рассеивателя; ϵ_0, μ_0 – электрическая и магнитная проницаемости заполнения пространства вне сфер; функция $f(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ является решением уравнения

$$\Delta f(|\vec{r} - \vec{r}'|) + k^2 \epsilon_0 \mu_0 f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -4\pi \delta(|\vec{r} - \vec{r}'|),$$

удовлетворяющего условию излучения на бесконечности, и имеет вид

$$f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{e^{-ki\sqrt{\epsilon_0\mu_0}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6)$$

Можно показать, что для точек вне сферы ($r > r'$) интеграл по объему сферы от функции Грина для свободного пространства (6) имеет вид

$$W(\vec{r}) = \int_V \frac{e^{-ik\sqrt{\epsilon_0\mu_0}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \frac{e^{-ik_1 r}}{r}, \quad (7)$$

где $k_1 = k\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, $k = 2\pi/\lambda$, r – расстояние от центра до точек вне сферы.

Внутреннее поле малой однородной магнитоэлектрической сферы с центром в $c'(p', s', t')$ найдем из системы неоднородных уравнений, которые построим, опираясь на интегральные уравнения [2] и результаты работы [3]. Входящие в эту систему неоднородные уравнения для произвольной выделенной сферы имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}',t) = & \left(\frac{(\epsilon_{c'\phi} + 2\epsilon_0) + \theta_{1c'}^2 \epsilon_{c'\phi} + i\theta_{1c'}(\epsilon_{c'\phi} + 2\epsilon_0)}{3\epsilon_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{E}_{c'(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) - \right. \\ & - \sum_{\substack{p \\ c'(p,s,t) \neq c'(p',s',t')}} \sum_{\substack{s \\ c'(p,s,t) \neq c'(p',s',t')}} \sum_{\substack{t \\ c'(p,s,t) \neq c'(p',s',t')}} \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \epsilon_0 \mu_0) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon_{c'\phi} - 1}{\epsilon_0} \right) W_{c'(p,s,t)}^3(\vec{r}) \vec{E}_{c'(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) - \right. \\ & \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'\phi} - 1}{\mu_0} \right) W_{c'(p,s,t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c'(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) \right] \right\} - \\ & - \sum_{\substack{c=1 \\ (c \neq c')}}^C \left(\sum_{\substack{p \\ c \neq c'}} \sum_{\substack{s \\ c \neq c'}} \sum_{\substack{t \\ c \neq c'}} \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \epsilon_0 \mu_0) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon_{c\phi} - 1}{\epsilon_0} \right) W_{c(p,s,t)}^3(\vec{r}) \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\phi} - 1}{\mu_0} \right) W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) \right] \right\} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}',t) = & \left(\frac{(\mu_{c'\phi} + 2\mu_0) + \theta_{1c'}^2 \mu_{c'\phi} + i\theta_{1c'}(\mu_{c'\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{H}_{c'(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) - \right. \\ & - \sum_{\substack{p \\ c'(p,s,t) \neq c'(p',s',t')}} \sum_{\substack{s \\ c'(p,s,t) \neq c'(p',s',t')}} \sum_{\substack{t \\ c'(p,s,t) \neq c'(p',s',t')}} \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \epsilon_0 \mu_0) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'\phi} - 1}{\mu_0} \right) W_{c'(p,s,t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c'(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) + \right. \\ & \left. + ik\epsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon_{c'\phi} - 1}{\epsilon_0} \right) W_{c'(p,s,t)}^3(\vec{r}) \vec{E}_{c'(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) \right] \right\} - \\ & - \sum_{\substack{c=1 \\ (c \neq c')}}^C \left(\sum_{\substack{p \\ c \neq c'}} \sum_{\substack{s \\ c \neq c'}} \sum_{\substack{t \\ c \neq c'}} \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \epsilon_0 \mu_0) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\phi} - 1}{\mu_0} \right) W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + ik\epsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon_{c\phi} - 1}{\epsilon_0} \right) W_{c(p,s,t)}^3(\vec{r}) \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) \right] \right\} \right), \end{aligned}$$

где $\bar{E}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$, $\bar{H}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$ и $\bar{E}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}',t)$, $\bar{H}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}',t)$ – соответственно поля падающей волны и внутренние поля сферы; $\bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r},t)$, $\bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r},t)$ – внутренние поля остальных сфер; $\theta_{1c}^2 = k^2 a_c^2 \epsilon_0 \mu_0$.

Величины $W_{c(p,s,t)}^3(\vec{r}')$, $W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}')$ имеют вид:

$$W_{c(p,s,t)}^3(\vec{r}') = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \times \frac{e^{-ik_1 r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}},$$

$$W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}') = -\frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \times \frac{e^{-ik_1 r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}$$

а величины $\epsilon_{cэф}$, $\mu_{cэф}$ запишем как [1, 3, 4]

$$\epsilon_{cэф} = \epsilon_c F(k a_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}),$$

$$\mu_{cэф} = \mu_c F(k a_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}),$$

(9)

где

$$F(k a_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}) = \frac{2(\sin k a_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} - k a_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} \cos k a_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c})}{(k^2 a_c^2 \epsilon_c \mu_c - 1) \sin k a_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} + k a_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} \cos k a_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}}$$

Первые слагаемые справа в уравнениях (8) связаны с внутренним полем сферы без учета влияния всех остальных сфер, оставшиеся слагаемые учитывают влияние на сферу – рассеиватель с центром в $c'(p',s',t')$ – всех ос-

тальных сфер. Основная матрица системы уравнений (8) содержит информацию об особенностях электромагнитного взаимодействия между сферами рассматриваемого типа решеток.

Система уравнений (8) является алгебраической системой, состоящей из $2N = 2 \sum_{c=1}^C N_c$ векторных неоднородных уравнений, где N – общее число сфер решетки, а N_c – число сфер подрешетки c . Решение этой системы для выделенной сферы имеет вид:

$$\bar{E}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u [\hat{g}_u^{эм} \bar{E}_{0c(p,s,t)}(\vec{r},t) + \hat{\beta}_u^{эм} \bar{H}_{0c(p,s,t)}(\vec{r},t)] \right) \quad (10)$$

$$\bar{H}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u [\hat{\beta}_u^{эм} \bar{H}_{0c(p,s,t)}(\vec{r},t) + \hat{g}_u^{эм} \bar{E}_{0c(p,s,t)}(\vec{r},t)] \right)$$

$$\hat{g}_u^{эм} = \begin{bmatrix} g_{xxu}^{эм} & g_{xyu}^{эм} & g_{xzu}^{эм} \\ g_{yxu}^{эм} & g_{yyu}^{эм} & g_{yzu}^{эм} \\ g_{zxu}^{эм} & g_{zyu}^{эм} & g_{zzu}^{эм} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\beta}_u^{эм} = \begin{bmatrix} \beta_{xxu}^{эм} & \beta_{xyu}^{эм} & \beta_{xzu}^{эм} \\ \beta_{yxu}^{эм} & \beta_{yyu}^{эм} & \beta_{yzu}^{эм} \\ \beta_{zxu}^{эм} & \beta_{zyu}^{эм} & \beta_{zzu}^{эм} \end{bmatrix};$$

$$\hat{g}_u^{ми} = \begin{bmatrix} g_{xxu}^{ми} & g_{xyu}^{ми} & g_{xzu}^{ми} \\ g_{yxu}^{ми} & g_{yyu}^{ми} & g_{yzu}^{ми} \\ g_{zxu}^{ми} & g_{zyu}^{ми} & g_{zzu}^{ми} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\beta}_u^{ми} = \begin{bmatrix} \beta_{xxu}^{ми} & \beta_{xyu}^{ми} & \beta_{xzu}^{ми} \\ \beta_{yxu}^{ми} & \beta_{yyu}^{ми} & \beta_{yzu}^{ми} \\ \beta_{zxu}^{ми} & \beta_{zyu}^{ми} & \beta_{zzu}^{ми} \end{bmatrix};$$

$\Delta^{эм}$ – детерминант основной матрицы системы уравнений (8).

Компоненту внутреннего электрического поля сферы (10) представим как

$$E_{\lambda\mu'}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta_{\text{ЭМ}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_{\mu} \left[g_{\lambda\mu\mu'}^{\text{ЭМ}} \bar{E}_{0\lambda\mu}(\vec{r}', t) + g_{\lambda\mu\mu'}^{\text{ЭМ}} E_{0\lambda\mu}(\vec{r}', t) + g_{\lambda\mu\mu'}^{\text{ЭМ}} E_{0\lambda\mu}(\vec{r}', t) + \beta_{\lambda\mu\mu'}^{\text{ЭМ}} H_{0\lambda\mu}(\vec{r}', t) + \beta_{\lambda\mu\mu'}^{\text{ЭМ}} H_{0\lambda\mu}(\vec{r}', t) + \beta_{\lambda\mu\mu'}^{\text{ЭМ}} H_{0\lambda\mu}(\vec{r}', t) \right] \right)$$

Остальные компоненты внутренних полей сферы получают аналогично из (10).

Если электромагнитным взаимодействием между сферами решетки пренебречь, то выражения (10) для внутреннего поля произвольной сферы решетки будут иметь вид:

$$\bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) = \bar{E}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}', t) \times \frac{3\epsilon_0 e^{i\theta_{1c}}}{(\epsilon_{\text{сэф}} + 2\epsilon_0) + \theta_{1c}^2 \epsilon_{\text{сэф}} + i\theta_{1c}(\epsilon_{\text{сэф}} + 2\epsilon_0)}, \quad (10a)$$

$$\bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) = \bar{H}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}', t) \times \frac{3\mu_0 e^{i\theta_{1c}}}{(\mu_{\text{сэф}} + 2\mu_0) + \theta_{1c}^2 \mu_{\text{сэф}} + i\theta_{1c}(\mu_{\text{сэф}} + 2\mu_0)}$$

На рис. 5 представлены зависимости модуля $|\eta^3|$ и аргумента φ^3 , реальной и мнимой частей выражения для внутреннего электрического поля сферы (10a) от изменения длины падающей волны λ в области первого внутреннего резонанса электрического типа сферы для случая, когда $a_c = 0.1145$ см, $\epsilon_c = 174$, тангенс угла диэлектрических потерь $\text{tg} \delta_\epsilon = 0$, $\mu = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$.

Потенциалы Герца (5) рассеянного сферями решетки поля можно представить, учиты-

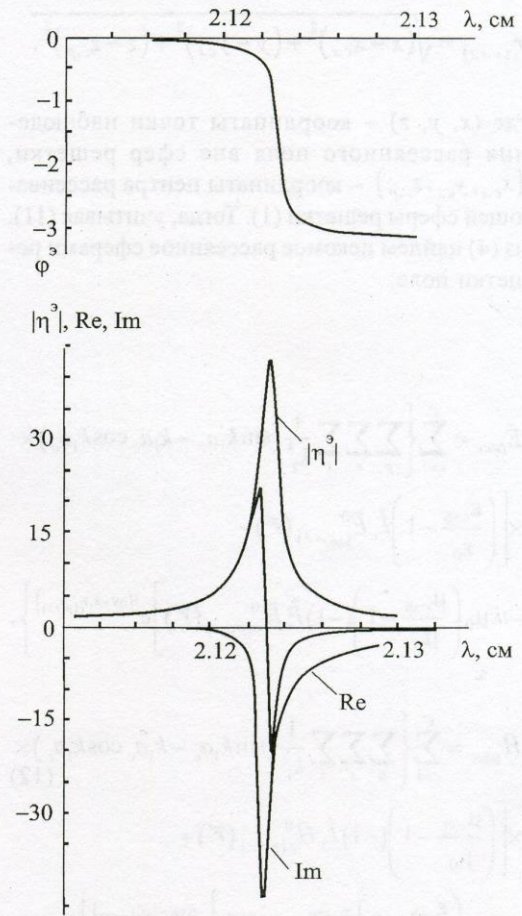


Рис. 5. Первый внутренний резонанс электрического типа сферы

вая (10), в виде суперпозиции потенциалов Герца отдельных сфер решетки:

$$\bar{P}^0(\vec{r}, t) = \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \times \left(\frac{\epsilon_{\text{сэф}} - 1}{\epsilon_0} \right) \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} \right], \quad (11)$$

$$\bar{P}^M(\vec{r}, t) = - \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \times \left(\frac{\mu_{\text{сэф}} - 1}{\mu_0} \right) \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} \right]$$

$$r_{c(p,s,t)} = \sqrt{(x - x_{c,s})^2 + (y - y_{c,t})^2 + (z - z_{c,p})^2},$$

где (x, y, z) – координаты точки наблюдения рассеянного поля вне сфер решетки, $(x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p})$ – координаты центра рассеивающей сферы решетки (1). Тогда, учитывая (11), из (4) найдем искомое рассеянное сферами решетки поле:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{расс}} = \sum_{c=1}^C \left\{ \sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{\epsilon_{c\text{эф}}}{\epsilon_0} - 1 \right) \hat{L}_c \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') - \right. \right. \\ \left. \left. - ik_1 \mu_0 \left(\frac{\mu_{c\text{эф}}}{\mu_0} - 1 \right) (-1) \hat{P}_c \vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') \right] e^{i(\omega - k_1 r_{c(p,s,t)})} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{расс}} = \sum_{c=1}^C \left\{ \sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{\mu_{c\text{эф}}}{\mu_0} - 1 \right) (-1) \hat{L}_c \vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') + \right. \right. \\ \left. \left. + ik_1 \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_{c\text{эф}}}{\epsilon_0} - 1 \right) \hat{P}_c \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') \right] e^{i(\omega - k_1 r_{c(p,s,t)})} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где \hat{L}_c и \hat{P}_c функциональные матрицы вида

$$\hat{L}_c = \begin{bmatrix} \Psi_{xxc} & \Psi_{xyc} & \Psi_{zxc} \\ \Psi_{yxc} & \Psi_{yyc} & \Psi_{yzc} \\ \Psi_{zxc} & \Psi_{zyc} & \Psi_{zcc} \end{bmatrix},$$

$$\hat{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_{zc} & \Psi_{yc}^0 \\ \Psi_{zc}^0 & 0 & \Psi_{xc} \\ \Psi_{yc} & \Psi_{xc}^0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (12), имеют вид:

$$\begin{aligned} \Psi_{xxc} = \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k^2 \epsilon_0 \mu_0 + \frac{3(x - x_{c,s})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^5} - \\ - \frac{k_1^2 (x - x_{c,s})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x - x_{c,s})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{xye} = \Psi_{yx} = \frac{3(x - x_{c,s})(y - y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^5} - \\ - k_1^2 \frac{(x - x_{c,s})(y - y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x - x_{c,s})(y - y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{zxc} = \Psi_{zxc} = \frac{3(x - x_{c,s})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^5} - \\ - k_1^2 \frac{(x - x_{c,s})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x - x_{c,s})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{xye} = \Psi_{zyc} = \frac{3(y - y_{c,t})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^5} - \\ - k_1^2 \frac{(y - y_{c,t})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(y - y_{c,t})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^4}, \end{aligned}$$

$$\Psi_{xc} = \frac{(x - x_{c,s})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(x - x_{c,s})}{r_{c(p,s,t)}^2},$$

$$\Psi_{xc}^0 = -\Psi_{xc}, \quad \Psi_{yc}^0 = -\Psi_{yc}, \quad \Psi_{zc}^0 = -\Psi_{zc}.$$

Компоненты Ψ_{xye} , Ψ_{zxc} и Ψ_{yc} , Ψ_{zc} матриц \hat{L}_c и \hat{P}_c можно получить из записи компонент Ψ_{xyc} и Ψ_{xc} , заменив в них $x, x_{c,s}$ соответственно на $y, y_{c,t}$ и $z, z_{c,p}$.

Поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер, представим как

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) + \vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}, t),$$

где $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$ – невозмущенное поле падающей волны.

Для частного случая ($c = 1, p = 0, s, t = 0$) одинаковых сфер (рис. 2), когда рассеивается волна

$$\vec{E}_{0x}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_1 z)}, \quad \vec{H}_{0y}(z, t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - k_1 z)}$$

и можно пренебречь электромагнитным взаимодействием между сферами, компонента рассеянного поля $E_{x \text{ расc}}(\vec{r}, t)$ для дальней зоны ($r_{c(p,s,t)} = r_s, x_{c,s} = x_s$) имеет вид:

$$\begin{aligned} E_{x \text{ расc}}(\vec{r}, t) &= \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \times \\ &\times \left[k_1^2 \frac{(\epsilon_{\text{эф}} - \epsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\epsilon_{\text{эф}} + 2\epsilon_0) + \theta_1^2 \epsilon_{\text{эф}} + i\theta_1 (\epsilon_{\text{эф}} + 2\epsilon_0)} \times \right. \\ &\times E_0 \sum_{-s}^s \left(\frac{1}{r_s} + \left| -\frac{(x - x_s)^2}{r_s^3} \right| \right) e^{-ik_1 r_s} - \\ &- k_1 k \mu_0 \frac{(\mu_{\text{эф}} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1 (\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)} \times \\ &\left. \times H_0 \sum_{-s}^s z \frac{e^{-ik_1 r_s}}{r_s^2} \right] e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

а для ближней зоны ($e^{-ik_1 r_s} \approx 1$) –

$$\begin{aligned} E_{x \text{ расc}}(\vec{r}, t) &= \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \times \\ &\times \left[\frac{(\epsilon_{\text{эф}} - \epsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\epsilon_{\text{эф}} + 2\epsilon_0) + \theta_1^2 \epsilon_{\text{эф}} + i\theta_1 (\epsilon_{\text{эф}} + 2\epsilon_0)} \times \right. \\ &\times E_0 \sum_{-s}^s \left[3(x - x_s)^2 - r_s^2 \left(\frac{1}{r_s} + ik_1 \frac{1}{r_s^4} \right) + \right. \\ &\left. \left. + ik \mu_0 \frac{(\mu_{\text{эф}} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1 (\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)} H_0 \sum_{-s}^s \frac{z}{r_s^3} \right] \right] e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Из детерминанта системы уравнений (8) определяются резонансные условия. Когда проицаемости ϵ_c, μ_c одинаковых сфер решетки действительны и $a_c/\lambda_g \sim 1$, резонансные условия можно получить из уравнения

$$\det \text{Re} \|\alpha_{sj}\| = 0, \quad (13)$$

разрешая его относительно функции $F(\theta_c)$ (9). Здесь $\|\alpha_{sj}\|$ – основная матрица системы уравнений (8) [3]. Если пренебречь электромагнитным взаимодействием сфер в уравнении (13) и разрешить его относительно функции $F(\theta_c)$, то условие для внутренних резонансов электрического типа сферы с центром в узле $c(p, s, t)$ можно представить в виде:

$$F(\theta_c) = -\frac{2\epsilon_0 (\cos \theta_{1c} + \theta_{1c} \sin \theta_{1c})}{\epsilon_c [(1 + \theta_{1c}^2) \cos \theta_{1c} + \theta_{1c} \sin \theta_{1c}]},$$

где $\theta_c = ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}, \theta_{1c} = ka_c \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

Заключение

Впервые рассмотрено рассеяние электромагнитных волн на специальных пространственных решетках резонансных магнитоэлектрических сфер, топологическая структура которых задается структурой чисел, определяемой геометрической прогрессией. Найдены выражения для внутреннего и рассеянного полей, которые описывают структурные резонансы электромагнитного взаимодействия между сферами решеток и внутренние резонансы сфер, и влияние этих резонансов друг на друга. Полученное решение для изучаемого типа решеток с анизотропной топологической структурой, задаваемой геометрической прогрессией, может быть полезно при разработке устройств для управления полем излучения электромагнитных излучателей, а так-

же создания композиционных материалов с сильной дисперсией с использованием областей аномальной дисперсии решеток.

Литература

1. А. И. Козарь, Н. А. Хижняк. Укр. физ. журн. 1970, 15, с. 847-849.
2. Н. А. Хижняк. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев, Наукова думка, 1986, с. 279.
3. А. И. Козарь. Радиопизика и электроника. 2002, 7, Спец. выпуск, с. 183-189.
4. Л. Левин. Современная теория волноводов. Москва, Изд-во ИЛ, 1954, с. 216.

Scattering Electromagnetic Waves by Special Spatial Lattices Composed of Resonant Magnetodielectric Spheres

A. I. Kozar

Solution of the problem of electromagnetic wave scattering by special composite spatial lattices of resonant spheres has been considered, their spatial distribution following the geometric progression. The expressions for the scattered waves have been derived.