Радиофизика и радиоастрономия, 2002, т. 7, №1, с. 81-87

УДК 621.371.162; 530.1:51-72

О коэффициентах Клебша-Гордана в комплексной j-плоскости. II. Комплексные значения моментов

А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин

Институт радиофизики и электроники НАН Украины,
Украина, 61085, г. Харьков, ул. Ак. Проскуры, 12

Статья поступила в редакцию 10 июля 2001 г.

Получены достаточно простые точные выражения для коэффициентов Клебша-Гордана с магнитными квантовыми числами 0 и 1 для комплексных значений угловых моментов. На основе этих выражений впервые вычислены асимптотики коэффициентов Клебша-Гордана при комплексных значениях моментов. Результаты имеют значение для исследования асимптотического поведения рассеянного поля в соответствующих задачах электродинамики.

Одержано достатньо прості точні вирази для коефіцієнтів Клебша-Гордана з магнітними квантовими числами 0 та 1 для комплексних значень кутових моментів. На основі цих виразів вперше обчислено асимптотики коефіцієнтів Клебша-Гордана при комплексних значеннях моментів. Результати мають значення для дослідження асимптотичної поведінки розсіянного поля у відповідних задачах електродинаміки.

В настоящей работе результаты, полученные в работе [1] (см. с. 74-80 в этом номере журнала), обобщаются на случай произвольных комплексных значений угловых моментов.

Комплексные значения моментов

Переход к комплексным значениям углового момента в коэффициентах Клебша-Гордана (ККГ) обычно совершается заменой факториалов в степенных суммах, определяющих ККГ, на Г-функции и сведением самих сумм к обобщенным гипергеометрическим рядам ${}_3F_2$. Известно шесть основных форм такого обобщения [2, с. 205, формулы (21)-(26)]. Мы будем пользоваться одной из них [2, с. 205, формула (21)], которая в работе [3] называется Вигнеровской формой для ККГ, хотя в [2] она определена как форма Ван-дер-Вардена [4] и Рака [5]:

$$C(j_1,j_2,j;m_1,m_2,m)=\Delta(j_1,j_2,j)\delta(j_1,j_2,j;m_1,m_2,m)\times$$
$$\times {}_3F_2\begin{bmatrix}-j_1+m_1,-j_2-m_2,-j_1-j_2+j\\ j-j_1-m_2+1,\ j-j_2+m_1+1\end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где

$$\Delta(j_1,j_2,j)=$$
$$=\sqrt{(2j+1)\frac{\Gamma(j_1-j_2+j+1)\Gamma(-j_1+j_2+j+1)}{\Gamma(j_1+j_2-j+1)\Gamma(j_1+j_2+j+2)}}, \qquad (2)$$

$$\delta(j_1,j_2,j;m_1,m_2,m)=$$
$$=\left[\Gamma(j-j_2+m_1+1)\Gamma(j-j_1-m_2+1)\right]^{-1}\times$$
$$\times\sqrt{\Gamma(j-m+1)\Gamma(j+m+1)\frac{\Gamma(j_1+m_1+1)\Gamma(j_2-m_2+1)}{\Gamma(j_1-m_1+1)\Gamma(j_2+m_2+1)}}. \qquad (3)$$

Ниже для краткости мы будем записывать выражения для Δ и δ без указания аргументов.

Формула (1) и свойства Г-функции и рядов ${}_3F_2$ являются исходными данными для дальнейшего исследования. Для случая $m_1 = m_2 = m = 0$:

$$\delta = \Gamma(j+1)\Gamma^{-1}(j-j_2+1)\Gamma^{-1}(j-j_1+1). \qquad (4)$$

Если ввести обозначения

$$a = j - j_1 - j_2, \qquad b = -j_2, \qquad c = -j_1, \qquad (5)$$

то

$$j - j_1 - j_2 = 1 + a - b, \quad j - j_2 + 1 = 1 + a - c, \quad (6)$$

и ${}_3F_2$ из (1) можно записать в виде:

$${}_3F_2\begin{bmatrix} a,b,c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{bmatrix} = \sqrt{\pi}\,2^{-a} \times$$
$$\times\Gamma\begin{bmatrix} 1+a-b, 1+a-c, 1+a/2-b-c \\ (a+1)/2, a/2+1-b, a/2+1-c, a-b-c+1 \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

$\left(\mathrm{Re}(a-2b-2c) > -2\right)$.

Здесь использована формула (21) из работы [6, с. 535] и формула удвоения аргумента Г-функции. $\Gamma\begin{bmatrix} x,\ldots \\ y,\ldots \end{bmatrix}$ – символическое обозначение для отношения произведения Г-функций от аргументов, расположенных в верхней строке, к произведению Г-функций от аргументов, стоящих в нижней строке.

Подставляя значения a, b, c и используя свойства Г-функций, формулу (7) можно привести к виду:

$${}_3F_2\begin{bmatrix} a,b,c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{bmatrix} = {}_3F_2\begin{bmatrix} -j_1, -j_2, -j_1-j_2+j \\ j-j_1+1, j-j_2+1 \end{bmatrix} =$$
$$= \Gamma^{-1}(j+1)\Gamma(j-j_1+1)\Gamma(j-j_2+1)\times$$
$$\times\Gamma(-j+j_1+j_2+1)\cos\left[\frac{\pi}{2}(-j+j_1+j_2)\right]\times$$
$$\times\Gamma\begin{bmatrix} \dfrac{(j+j_1+j_2+2)}{2} \\ \dfrac{(-j+j_1+j_2+2)}{2}, \dfrac{(j-j_1+j_2+2)}{2}, \dfrac{(j+j_1-j_2+2)}{2} \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Подстановка (8) в (1) приводит к результату:

$$C(j_1, j_2, j; 0,0,0) = \Delta_1(j_1, j_2, j)\cos\left[\frac{\pi}{2}(-j+j_1+j_2)\right]\times$$
$$\times\Gamma\begin{bmatrix} \dfrac{(j+j_1+j_2+2)}{2} \\ \dfrac{(-j+j_1+j_2+2)}{2}, \dfrac{(j-j_1+j_2+2)}{2}, \dfrac{(j+j_1-j_2+2)}{2} \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

где

$$\Delta_1(j_1, j_2, j) =$$
$$= \sqrt{(2j+1)\frac{\Gamma(j_1-j_2+j+1)\Gamma(-j_1+j_2+j+1)\Gamma(-j+j_1+j_2+1)}{\Gamma(j+j_1+j_2+2)}}. \qquad (10)$$

Для целочисленных значений $j_i = l_i$ косинус в (9) принимает значение $(-1)^{g-l}$, если $g = (l_1 + l_2 + l)/2$ – целочисленное, и нуль в противном случае. Г-символ для первого случая приобретает вид:

$$\Gamma\begin{bmatrix} g+1 \\ g-l+1, g-l_1+1, g-l_2+1 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Так как $\Gamma(g+1) = g!$, то для целочисленных значений l_i переход от комплексного обобщения к известной формуле [2, с. 213, формула (32)] для физических значений моментов очевиден.

Замена всех j_i на $j_i - 1$ в (9) приводит к выражению:

$$C(j_1-1,j_2-1,j-1;0,0,0)=$$
$$=\Delta_1(j_1-1,j_2-1,j-1)\sin\left[\frac{\pi}{2}(-j+j_1+j_2)\right]\times$$
$$\times\Gamma\left[\begin{matrix}\frac{(j+j_1+j_2-1)}{2}\\ \frac{(-j+j_1+j_2+1)}{2},\frac{(j-j_1+j_2+1)}{2},\frac{(j+j_1-j_2+1)}{2}\end{matrix}\right]. \qquad (12)$$

Эта формула понадобится нам позже.

Перейдем к определению ККГ с магнитными квантовыми числами $m_1=1$, $m_2=0$, $m=1$. В этом случае для $\delta(j_1,j_2,j;m_1,m_2,m)$ получаем:

$$\delta=\sqrt{j(j+1)j_1(j_1+1)}\,\frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j-j_2+2)\Gamma(j-j_1+1)}. \qquad (13)$$

Наряду с обозначениями (5) для *a*, *b*, *c* введем

$$a'=a-1,\qquad b'=b-1. \qquad (14)$$

Рассмотрим функцию

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c+1\\ a-b+1,a-c+2\end{matrix}\right]={}_3F_2\left[\begin{matrix}a'+1,b'+1,c+1\\ a'-b'+1,a'-c+3\end{matrix}\right]=$$
$$={}_3F_2\left[\begin{matrix}j-j_1-j_2,-j_2,-j_1+1\\ j-j_1+1,j-j_2+2\end{matrix}\right]. \qquad (15)$$

Воспользуемся результатом [6, с. 440, формула (31)] (нижние индексы 3 и 2 для краткости опускаем):

$$\sigma(\sigma+1)b_1\left\{F\left[\begin{matrix}a_1,a_2,a_3\\ b_1,\sigma\end{matrix}\right]-F\left[\begin{matrix}a_1,a_2,a_3\\ b_1,\sigma+1\end{matrix}\right]\right\}=$$
$$=a_1a_2a_3F\left[\begin{matrix}a_1+1,a_2+1,a_3+1\\ b_1+1,\sigma+2\end{matrix}\right], \qquad (16)$$

и положим $a_1=a'$, $a_2=b'$, $a_3=c$, $b_1=a'-b'$, $\sigma=a'-c+1$. Тогда

$$a'b'cF\left[\begin{matrix}a'+1,b'+1,c+1\\ a'-b'+1,a'-c+3\end{matrix}\right]=$$
$$=(a'-c+1)(a'-c+2)(a'-b')\times$$
$$\times\left\{F\left[\begin{matrix}a',b',c\\ a'-b',a'-c+1\end{matrix}\right]-F\left[\begin{matrix}a',b',c\\ a'-b',a'-c+2\end{matrix}\right]\right\}. \qquad (17)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках есть сумма двух Γ-символов [6, с. 535, формула (20)], а второе преобразуем с помощью соотношения [6, с. 440, формула (27)]

$$\sigma F\left[\begin{matrix}a_1,a_2,a_3\\ \rho+1,\sigma\end{matrix}\right]-\rho F\left[\begin{matrix}a_1,a_2,a_3\\ \rho,\sigma+1\end{matrix}\right]=$$
$$=(\sigma-\rho)F\left[\begin{matrix}a_1,a_2,a_3\\ \rho+1,\sigma+1\end{matrix}\right],$$

в котором положим $a_1=a'$, $a_2=b'$, $a_3=c$, $\rho=a'-b'$, $\sigma=a'-c+1$:

$$(a'-c+1)F\left[\begin{matrix}a',b',c\\ a'-b'+1,a'-c+1\end{matrix}\right]-$$
$$-(a'-b')F\left[\begin{matrix}a',b',c\\ a'-b',a'-c+2\end{matrix}\right]=$$
$$=(b'-c+1)F\left[\begin{matrix}a',b',c\\ a'-b'+1,a'-c+2\end{matrix}\right]. \qquad (18)$$

После подстановки (18) в (17) получим:

$$a'b'cF\left[\begin{matrix}a,b,c+1\\ a-b+1,a-c+2\end{matrix}\right]=(a'-c+1)(a'-c+2)\times$$
$$\times(a'-b')\left\{F\left[\begin{matrix}a',b',c\\ a'-b',a'-c+1\end{matrix}\right]+\frac{b'-c+1}{a'-b'}\times\right.$$
$$\times F\left[\begin{matrix}a',b',c\\ a'-b'+1,a'-c+2\end{matrix}\right]-$$
$$\left.-\frac{a'-c+1}{a'-b'}F\left[\begin{matrix}a',b',c\\ a'-b'+1,a'-c+1\end{matrix}\right]\right\}. \qquad (19)$$

Преобразуем второе слагаемое в фигурных скобках по формуле [6, с. 440, формула (26)]

$$\sigma F\begin{bmatrix} a_1, a_2, \rho \\ b_1, \sigma \end{bmatrix} - \rho F\begin{bmatrix} a_1, a_2, \rho+1 \\ b_1, \sigma+1 \end{bmatrix} =$$

$$= (\sigma-\rho) F\begin{bmatrix} a_1, a_2, \rho \\ b_1, \sigma+1 \end{bmatrix},$$

в которой положим $a_1 = a'$, $a_2 = b'$, $\rho = c-1 = c'$, $b_1 = a'-b'+1$, $\sigma = a'-c+1 = a'-c'$:

$$(a'-c+1)F\begin{bmatrix} a', b', c' \\ a'-b'+1, a'-c' \end{bmatrix} -$$

$$-c'F\begin{bmatrix} a', b', c' \\ a'-b'+1, a'-c+2 \end{bmatrix} =$$

$$= (a'-2c')F\begin{bmatrix} a', b', c' \\ a'-b'+1, a'-c'+1 \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Определив отсюда $F\begin{bmatrix} a', b', c \\ a'-b'+1, a'-c+2 \end{bmatrix}$ и подставив в (18), после некоторых преобразований получим:

$$a'b'c'cF\begin{bmatrix} a, b, c+1 \\ a-b+1, a-c+2 \end{bmatrix} = (a'-c')(a'-c'+1)\times$$

$$\times\left\{(a'-b')c'F\begin{bmatrix} a', b', c \\ a'-b', a'-c+1 \end{bmatrix} -\right.$$

$$-(a'-c')(b'-c')F\begin{bmatrix} a', c', b' \\ a'-c', a'-b'+1 \end{bmatrix} -$$

$$-(a'-2c')(b'-c')F\begin{bmatrix} a', b', c' \\ a'-b'+1, a'-c'+1 \end{bmatrix} -$$

$$\left.-(a'-c')c'F\begin{bmatrix} a', b', c \\ a'-b'+1, a'-c+1 \end{bmatrix}\right\}. \qquad (21)$$

Все четыре функции ${}_3F_2$ в правой части (21) могут быть сведены к Г-функциям по формулам [6, с. 535, формулы (20) и (21)]:

$$F\begin{bmatrix} a, b, c \\ 1+a-b, a-c \end{bmatrix} =$$

$$= F\begin{bmatrix} a, b, c \\ a-c, a-b+1 \end{bmatrix} = \sqrt{\pi}\, 2^{-a}\, \Gamma\begin{bmatrix} a-c, a-b+1 \\ a-b-c+1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times\left\{\Gamma\begin{bmatrix} a/2+1-b-c \\ a/2-c, (a+1)/2, a/2+1-b \end{bmatrix} +\right.$$

$$\left.+\Gamma\begin{bmatrix} (a+1)/2-b-c \\ (a+1)/2-c, a/2, (a+1)/2-b \end{bmatrix}\right\}, \qquad (22)$$

$$\mathrm{Re}(a-2b-2c) > -1;$$

$$F\begin{bmatrix} a, b, c \\ a-b+1, a-c+1 \end{bmatrix} = \sqrt{\pi}\, 2^{-a} \times$$

$$\times\Gamma\begin{bmatrix} a-b+1, a-c+1, a/2-b-c+1 \\ (a+1)/2, a/2-b+1, a/2-c+1, a-b-c+1 \end{bmatrix}, \qquad (23)$$

$$\mathrm{Re}(a-2b-2c) > -2.$$

При этом содержимое фигурных скобок в (21) приводится к виду:

$$\sqrt{\pi}\, 2^{-a'}\, \Gamma\begin{bmatrix} a'-b'+1, a'-c' \\ a'-b'-c' \end{bmatrix} \left\{\left[\frac{c'(a'/2-b'-a'+c')}{a'/2-b'} -\right.\right.$$

$$\left. - \frac{(b'-c')(a'-c')(a'/2-b'-c')}{(a'-b'-c')(a'/2-b')}\right] \times$$

$$\times\Gamma\begin{bmatrix} a'/2-b'-c' \\ (a'+1)/2, a'/2-b', a'/2-c' \end{bmatrix} +$$

$$+\left[\frac{c'\left((a'+1)/2-c'-1\right)}{(a'+1)/2-b'-c'-1} + \frac{(b'-c')(a'-c')}{a'-b'-c'}\right] \times$$

$$\left.\times\Gamma\begin{bmatrix} (a'+1)/2-b'-c' \\ (a'+1)/2-c', a'/2, (a'+1)/2-b' \end{bmatrix}\right\}. \qquad (24)$$

Множитель перед Г-символом в первом слагаемом в фигурных скобках (24) сводится к виду

$$-\frac{a'b'}{a'-b'-c'},$$

а перед вторым к

$$b'\frac{b'c'-a'b'-a'c'+c'^2+c'+a'(a'-1)/2}{\left((a'+1)/2-b'-c'-1\right)(a'-b'-c')}.$$

С учетом этого из (21) получаем:

$$F\begin{bmatrix} a,b,c+1 \\ a-b+1,a-c+2 \end{bmatrix}=\frac{\sqrt{\pi}2^{-a+1}}{c(c-1)}\Gamma\begin{bmatrix} a-b+1,a-c+2 \\ a-b-c+2 \end{bmatrix}\times$$
$$\times\left\{-\Gamma\begin{bmatrix} (a+1)/2-b-c+1 \\ a/2,(a+1)/2-b,(a+1)/2-c \end{bmatrix}+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\left[a(a+1)/2-ab+bc-ac+c(c-1)\right]\times$$
$$\left.\times\Gamma\begin{bmatrix} a/2-b-c+1 \\ (a+1)/2,a/2-b+1,a/2-c+1 \end{bmatrix}\right\}. \qquad (25)$$

Напомним, что $a=j-j_1-j_2$, $b=-j_2$, $c=-j_1$, $c'=-j_1-1$. Тогда (25) будет выглядеть следующим образом:

$$ {}_3F_2\begin{bmatrix} j-j_1-j_2,-j_2,-j_1+1 \\ j-j_1+1,j-j_2+2 \end{bmatrix}=$$
$$=\frac{2\sqrt{\pi}2^{-j+j_1+j_2}}{j_1(j_1+1)}\Gamma\begin{bmatrix} j-j_1+1,j-j_2+2 \\ j+2 \end{bmatrix}\times$$
$$\times\left\{-\Gamma\begin{bmatrix} (j+j_1+j_2+3)/2 \\ \frac{(j-j_1-j_2)}{2},\frac{(j-j_1+j_2+1)}{2},\frac{(j+j_1-j_2+1)}{2} \end{bmatrix}+\right.$$
$$+\frac{1}{4}\left[j(j+1)+j_1(j_1+1)-j_2(j_2+1)\right]\times$$
$$\left.\times\Gamma\begin{bmatrix} \frac{(j+j_1+j_2+2)}{2} \\ \frac{(j-j_1-j_2+1)}{2},\frac{(j-j_1+j_2+2)}{2},\frac{(j+j_1-j_2+2)}{2} \end{bmatrix}\right\}. \qquad (26)$$

Воспользуемся основными функциональными соотношениями для Г-функции [7, с. 17-19] и приведем (26) к виду:

$$ {}_3F_2\begin{bmatrix} j-j_1-j_2,-j_2,-j_1+1 \\ j-j_1+1,j-j_2+2 \end{bmatrix}=\frac{2\sqrt{\pi}2^{-j+j_1+j_2}}{\pi j_1(j_1+1)}\times$$
$$\times\Gamma\begin{bmatrix} j-j_1+1,j-j_2+2 \\ j+2 \end{bmatrix}\left\{-\sin\left[\frac{\pi}{2}(j-j_1-j_2)\right]\times\right.$$
$$\times\Gamma\begin{bmatrix} (j+j_1+j_2+3)/2,(-j+j_1+j_2+2)/2 \\ (j-j_1+j_2+1)/2,(j+j_1-j_2+1)/2 \end{bmatrix}+$$
$$+\frac{1}{4}\cos\left[\frac{\pi}{2}(j-j_1-j_2)\right]\left[j(j+1)+j_1(j_1+1)-j_2(j_2+1)\right]\times$$
$$\left.\times\Gamma\begin{bmatrix} (j+j_1+j_2+2)/2,(-j+j_1+j_2+1)/2 \\ (j-j_1+j_2+2)/2,(j+j_1-j_2+2)/2 \end{bmatrix}\right\}. \qquad (27)$$

Подстановка (27) в (1) (при $m_1=1,\ m_2=0$) после некоторых преобразований приводит к результату:

$$C(j_1,j_2,j;1,0,1)=\frac{2^{1-j+j_1+j_2}\Delta(j_1,j_2,j)}{\sqrt{\pi j(j+1)j_1(j_1+1)}}\times$$
$$\times\left\{-\sin\left[\frac{\pi}{2}(j-j_1-j_2)\right]\times\right.$$
$$\times\Gamma\begin{bmatrix} \frac{(j+j_1+j_2+3)}{2},\frac{(-j+j_1+j_2+2)}{2} \\ \frac{(j-j_1+j_2+1)}{2},\frac{(j+j_1-j_2+1)}{2} \end{bmatrix}+$$
$$+\frac{1}{4}\cos\left[\frac{\pi}{2}(j-j_1-j_2)\right]\left[j(j+1)+j_1(j_1+1)-j_2(j_2+1)\right]\times$$
$$\left.\times\Gamma\begin{bmatrix} (j+j_1+j_2+2)/2,(-j+j_1+j_2+1)/2 \\ (j-j_1+j_2+2)/2,(j+j_1-j_2+2)/2 \end{bmatrix}\right\}, \qquad (28)$$

где $\Delta(j_1,j_2,j)$ определяется формулой (2), а j_1, j_2, j – комплексные числа.

Видно, что (28) представляет собой двухчленную формулу, которую следует преобразовать к виду, облегчающему сопоставление с результатами для физических значений моментов. Для этого второй Г-символ в (28) следует домножить и разделить на $\Gamma\left[(-j+j_1+j_2+2)/2\right]\Gamma\left[-j+j_1+j_2+1\right]$ и воспользоваться формулой удвоения аргумента Г-функции, а первое слагаемое привести к аргументам $j_1-1,\ \ j_2-1,\ \ j-1$. В результате (28) преобразуется к виду:

$$C(j_1,j_2,j;1,0,1)=\frac{j(j+1)+j_1(j_1+1)-j_2(j_2+1)}{2\sqrt{j(j+1)j_1(j_1+1)}}\times$$

$$\times C(j_1,j_2,j;0,0,0)+\frac{1}{2}\left\{\frac{(2j+1)(j+j_1-j_2)(j-j_1+j_2)}{(2j-1)j(j+1)j_1(j_1+1)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(-j+j_1+j_2)(j+j_1+j_2+1)(j+j_1+j_2-1)}{(j+j_1+j_2)}\right\}^{1/2}\times$$

$$\times C(j_1-1,j_2-1,j-1;0,0,0). \qquad (29)$$

Переход к физическим значениям $j_i=l_i$ в формулах (28) и (29) очевиден. Для целых g величина $\sin\left[\pi(l_1+l_2-l)/2\right]$, а следовательно и $C(l_1-1,l_2-1,l-1;0,0,0)$, обращаются в нуль. При этом формула (29) переходит в формулу (6) из работы [1]. Для полуцелых g обращается в нуль $\cos\left[\pi(l-l_1-l_2)/2\right]$, а вследствие этого и $C(l_1,l_2,l;0,0,0)$. При этом формула (29) переходит в полученную ранее в [1] формулу (17).

Асимптотики при комплексных значениях j_1, j_2, j

Полученные выражения (9) и (12) позволяют достаточно легко найти их асимптотики для больших $|j_1|$, $|j_2|$, $|j|$ с помощью формулы Стирлинга для Г-функции в комплексной плоскости. Для $C(j_1,j_2,j;0,0,0)$ ассимптотика выглядит следующим образом:

$$C(j_1,j_2,j;0,0,0)\approx\sqrt{\frac{j}{\pi S}}\cos\left[\frac{\pi}{2}(-j+j_1+j_2)\right], \qquad (30)$$

$|j_1|,|j_2|,|j|\gg 1,$

где

$$S=\frac{1}{2}\left[(j+j_1+j_2)(j-j_1+j_2)\times\right.$$
$$\left.\times(j+j_1-j_2)(-j+j_1+j_2)\right]^{1/4}.$$

Аналогично

$$C(j_1-1,j_2-1,j-1;0,0,0)\approx\sqrt{\frac{j}{\pi S}}\sin\left[\frac{\pi}{2}(-j+j_1+j_2)\right], \qquad (31)$$

$|j_1|,|j_2|,|j|\gg 1.$

Тогда с учетом равенства (29)

$$C(j_1,j_2,j;1,0,1)\approx\sqrt{\frac{j}{\pi s}}\left\{\cos\varphi_2\cos\left[\frac{\pi}{2}(-j+j_1+j_2)\right]+\right.$$
$$\left.+\sin\varphi_2\sin\left[\frac{\pi}{2}(-j+j_1+j_2)\right]\right\}, \qquad (32)$$

где $\cos\varphi_2=\dfrac{j^2+j_1^2-j_2^2}{2jj_1}$, $\quad\sin\varphi_2=$

$$=\frac{\sqrt{(j+j_1+j_2)(j-j_1+j_2)(j+j_1-j_2)(-j+j_1+j_2)}}{2jj_1}.$$

Переход от асимптотик в комплексной j-плоскости к асимптотикам при физических значениях моментов [1, формула (19), (22), (24)] очевиден и не требует комментариев. Заметим, что выражение (32) может быть записано в форме

$$C(j_1,j_2,j;1,0,1)\approx\sqrt{\frac{j}{\pi S}}\cos\left[\frac{\pi}{2}(-j+j_1+j_2)-\varphi_2\right], \qquad (33)$$

$|j_1|,|j_2|,|j|\gg 1,$

которая позволяет легко перейти к соответствующим формулам для физических значений моментов [1, формулы (31) и (35)].

Выводы

В настоящей работе для исходных бесконечных рядов, определяющих коэффициенты Клебша-Гордана в комплексной j-плоскости, найдены конечные выражения достаточно простого вида для случая магнитных квантовых чисел 0 и 1, который имеет место в задачах рассеяния электромагнитных волн, обладающих симметрией вращения сферы.

Простота математических выражений позволяет получить надежные асимптотические выражения в комплексной j-плоскости и сравнить их с имеющимися в литературе для вещественных физических значений угловых моментов. Полученные зависимости могут найти применение в исследованиях асимптотического поведения решения задач рассеяния волн с помощью преобразования Ватсона.

Хотя магнитные квантовые числа предполагаются равными 1 и 0, это ограничение не является принципиальным для предложенного подхода.

Литература

1. А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин. Радиофизика и радиоастрономия. 2002, **7**, №1, с. 74-80.
2. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. Квантовая теория углового момента. Ленинград, Наука, 1975, 439 с.
3. M. Andrews, J. Gunson. J. Math. Phys. 1964, **5,** No. 10, pp. 1391-1400.
4. Van der Waerden. Die gruppentheoretisehe Methode in den Qunatenmechanik. Berlin, Springer, 1932.
5. G. Racah. Phys. Rev. 1942, **62**, No. 9, pp. 438-462.
6. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. Москва, Наука, 1986, 800 с.
7. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 1. Москва, Наука, 1973, 296 с.

On Clebsch-Gordan Coefficients in Complex j-Plane. II. Complex Values of an Angular Momentum

A. S. Bryukhovetski, L. A. Pazynin

Sufficiently simple exact expressions are obtained for the Clebsch-Gordan coefficients with magnetic numbers 0 and 1 for the complex angular momentum values. On the basis of these expressions the asymptotics of such coefficients are calculated for first time. The results are of importance for the analysis of asymptotic behaviour of scattered fields in relevant electromagnetic problems.