Радиофизика и радиоастрономия, 2002, т. 7, №1, с. 74-80

УДК 621.371.162; 530.1:51-72

О коэффициентах Клебша-Гордана в комплексной j-плоскости. I. Физические значения углового момента

А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин

Институт радиофизики и электроники НАН Украины, Украина, 61085, г. Харьков, ул. Ак. Проскуры, 12

Статья поступила в редакцию 10 июля 2001 г.

Получены достаточно простые точные выражения для коэффициентов Клебша-Гордана с магнитными квантовыми числами 0 и 1 для физических значений угловых моментов. На основе этих выражений вычислены асимптотики коэффициентов Клебша-Гордана и проведено их сравнение с известными в литературе. Результаты имеют значение для исследования асимптотического поведения рассеянного поля в соответствующих сферически симметричных задачах электродинамики.

Одержано достатньо прості точні вирази для коефіцієнтів Клебша-Гордана з магнітними квантовими числами 0 та 1 для фізичних значень кутових моментів. На основі цих виразів обчислені асимптотики коефіцієнтів Клебша-Гордана для великих значень моментів і проведено їх порівняння з існуючими у літературі. Результати мають значення для дослідження асимптотичної поведінки розсіяного поля у відповідних сферично симетричних задачах електродинаміки.

Введение

Коэффициенты Клебша-Гордана (ККГ) группы симметрии SU_2 имеют чрезвычайно важное значение для конкретных расчетов в задачах рассеяния волн и частиц, обладающих сферической симметрией. Поэтому вычислению ККГ и изучению их свойств посвящено большое число работ. Однако в определенном смысле законченной можно считать только классическую теорию ККГ, связанную с разложением произведения представлений группы вращений трехмерного вещественного пространства на неприводимые компоненты.

Особое место в теории ККГ занимает продолжение их на комплексные значения углового момента (j-плоскость) в связи с исследованием асимптотического поведения рассеянного волнового поля при больших значениях углового момента. Для электромагнитного поля такой метод исследования впервые предложил Ватсон [1], и в теории дифракции волн этот метод получил название преобразования Ватсона. В квантовой теории рассеяния его обычно называют методом Ватсона-Редже [2].

Представление векторных полей в форме шаровых векторов (тензорных сферических гармоник) в спиральном базисе [3, с. 186] содержит ККГ вида

$$C(l_1, l_2, l\ ; m_1, m_2, m), \tag{1}$$

где $l_2 = 1$, $m_1 = 0$, $m_2 = 0, \pm 1, \ldots$, $m = m_1 + m_2$, l_i – угловые моменты (веса представлений), m_i – их проекции на полярную ось (магнитные квантовые числа). Здесь и далее мы используем обозначения ККГ, принятые в [4].

Рассеяние электромагнитного поля на случайных неровностях сферы [5] приводит к произвольным целым положительным (физическим) значениям l_2 в (1). Поэтому нас интересовало продолжение ККГ на комплексные значения l_1, l_2, l (которые мы будем обозначать соответственно j_1, j_2, j) прежде всего для двух наборов магнитных квантовых чисел $m_1 = m_2 = 0$ и $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, характеризующих вышеупомянутое рассеяние электромагнитных волн [5].

Продолжение ККГ в комплексную j-плоскость: рекуррентные соотношения и асимптотики для $j_1, j_2, j \gg 1$

Предельный переход в эффективных коэффициентах отражения сферических волн для коротковолнового рассеяния на мелкомасштабных неровностях большой сферы, когда l_1, l_2, $l \gg 1$, показал, что асимптотические выражения ККГ для целых положительных значений углового момента [4] содержат неточности. Такие же неточности, как оказалось, содержатся и в "классическом пределе" Брушара и Толхука [6], воспроизведенном в справочнике [3, с. 224-225].

Для комплексных значений углового момента сведения об асимптотиках ККГ в известной нам литературе [3, 7-9] отсутствуют. Поэтому целью работы является, во-первых, получение точных простых выражений $C(l_1,l_2,l\;;m_1,m_2,m)$ для магнитных квантовых чисел $m_1 = 1$, $m_2 = 0$ и $m_1 = m_2 = 0$ в области целых положительных (физических) значений углового момента и на их основе соответствующих асимптотик при этих значениях; во-вторых, обобщение аналогичных результатов для комплексных значений углового момента j_1, j_2, j.

Целые положительные (физические) значения l_1, l_2, l

Рассмотрим вначале случай физических значений l_1, l_2, l. Известно [3, с. 213, формула (32); 4, с. 185], что в этом случае при $m_1 = m_2 = 0$ ККГ имеет простой вид одночленной формулы

$$C(l_1,l_2,l\;;0,0,0) = \begin{cases} 0 & \text{для полуцелого } g, \\ G & \text{для целого } g, \end{cases} \tag{2}$$

где $g = (l_1 + l_2 + l)/2$,

$$G = (-1)^{g-l}\sqrt{\frac{(2l+1)(2g-2l_1)!(2g-2l_2)!(2g-2l)!}{(2g+1)!}}\times$$

$$\times\frac{g!}{(g-l_1)!(g-l_2)!(g-l)!}.$$

Для магнитных квантовых чисел $m_1 = 1$, $m_2 = 0$ известны выражения ККГ в виде многочленной суммы [3], число слагаемых в которой пропорционально значениям l_1, l_2, l, что не позволяет сделать надлежащие асимптотические оценки.

Ниже мы покажем, что $C(l_1,l_2,l\;;1,0,1)$ можно выразить через $C(l_1,l_2,l\;;0,0,0)$ в случае целого g и через $C(l_1-1,l_2-1,l-1;0,0,0)$ в случае полуцелого g, сведя таким образом задачу к асимптотической оценке $C(l_1,l_2,l;0,0,0)$ либо $C(l_1-1,l_2-1,l-1\;;0,0,0)$.

Для целого g такая процедура относительно просто осуществляется с помощью справедливых для физических значений l_i рекуррентных соотношений [4, с. 190, формулы (5), (6)]:

$$\sqrt{l_1(l_1+1)}\,C(l_1,l_2,l\;;0,0,0) + \sqrt{l_2(l_2+1)}\times$$
$$\times C(l_1,l_2,l\;;1,-1,0) = \sqrt{l(l+1)}\,C(l_1,l_2,l\;;1,0,1), \tag{3}$$

$$\left[l_1(l_1+1) + l_2(l_2+1) - l(l+1)\right]C(l_1,l_2,l\;;0,0,0)+$$
$$+\sqrt{l_1(l_1+1)l_2(l_2+1)}\left[C(l_1,l_2,l\;;1,-1,0)+\right.$$
$$\left.+C(l_1,l_2,l\;;-1,1,0)\right] = 0, \tag{4}$$

и соотношения симметрии [4, с. 182]

$$C(l_1,l_2,l\;;-1,1,0) = (-1)^{l-l_1-l_2}C(l_1,l_2,l\;;1,-1,0). \tag{5}$$

Отсюда при целом g:

$$C(l_1,l_2,l\;;1,0,1) = A_1 C(l_1,l_2,l\;;0,0,0), \tag{6}$$

где

$$A_1=\frac{l(l+1)+l_1(l_1+1)-l_2(l_2+1)}{2\sqrt{l(l+1)l_1(l_1+1)}}. \qquad (7)$$

При полуцелом g аналогичная процедура гораздо более трудоемкая.

Согласно [4, с. 194, формула (12)] можно записать:

$$\begin{aligned}&\alpha(l_1,l_2,l;1,0)C(l_1,l_2,l;1,0,1)=\\&=\alpha(l_1',l_2',l';0,0)C(l_1',l_2',l';0,0,0)-\\&-\alpha(l_1',l_2',l';2,0)C(l_1',l_2',l';2,0,2)+\\&+\alpha(l_1',l_2',l';0,1)C(l_1',l_2',l';0,1,1)-\\&-\alpha(l_1',l_2',l';2,-1)C(l_1',l_2',l';2,-1,1)+\\&+\alpha(l_1',l_2',l';1,1)C(l_1',l_2',l';1,1,2)-\\&-\alpha(l_1',l_2',l';1,-1)C(l_1',l_2',l';1,-1,0),\end{aligned} \qquad (8)$$

где

$$\begin{aligned}&\alpha(l_1,l_2,l;m_1,m_2)=\\&=\left[\frac{(l_1+l_2-l)!(l+l_1-l_2)!}{(2l+1)(l_1+m_1)!(l_1-m_1)!(l_2+m_2)!}\times\right.\\&\left.\times\frac{(l-l_1+l_2)!(l_1+l_2+l+1)!}{(l_2-m_2)!(l+m_1+m_2)!(l-m_1-m_2)!}\right]^{1/2},\end{aligned} \qquad (9)$$

а $l_i'=l_i-1$.

Последовательное применение рекуррентной формулы (4) (при $m_1=1,\ m_2=0$ и $m_1=1,\ m_2=-1$), формулы (5) (при $m_1=m_2=1$ и $m_1=1,\ m_2=0$) и соотношения (6) с использованием результатов [4, с. 190, формула (4)] позволяет получить следующую зависимость:

$$\gamma C(l_1,l_2,l\ ;1,0,1)=\beta C(l_1-1,l_2-1,l-1;0,0,0), \qquad (10)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma=&\frac{1}{l!l_1!l_2!}\left[\frac{(2l+1)(l+l_1+l_2-1)ll_1}{(2l-1)(l_1+1)(l+1)}\times\right.\\&\times(l_1+l_2-l)(l+l_1-l_2)(l-l_1+l_2)\times\\&\left.\times(l+l_1+l_2+1)(l_1+l_2+l)\right]^{1/2},\end{aligned} \qquad (11)$$

$$\beta=\frac{s_1+s_2+s_3}{2(l_1-1)!(l_2-1)!(l-1)!}, \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}s_1=&\frac{l(l-1)}{ll_2}\left[1+\frac{(l_1-1)(l_1+l_2+1)}{(l_1+1)(l+1)}\right]+\\&+\frac{l(l-1)}{ll_1(l_1+1)}\left[l_2-l+1+\frac{(l_2-1)(l_1+l_2+1)}{l+1}-\frac{l(l+1)}{l_2}\right],\end{aligned} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}s_2=&\frac{l_1(l_1-1)-l_2(l_2-1)}{ll_2}\left[-1-\frac{(l_1-1)(l_1+l_2+1)}{(l_1+1)(l+1)}\right]+\\&+\frac{l_1(l_1-1)-l_2(l_2-1)}{ll_1(l_1+1)}\times\\&\times\left[l_2-l+1+\frac{(l_2-1)(l_1+l_2+1)}{l+1}-\frac{l(l+1)}{l_2}\right],\end{aligned} \qquad (14)$$

$$s_3=2\frac{l_1l_2+l_2ll_1+l_1^2-l-l_1}{l_2(l_1+1)}. \qquad (15)$$

В результате достаточно громоздких преобразований для суммы $\sum s_i=s_1+s_2+s_3$ можно получить выражение:

$$\begin{aligned}\sum s_i=&\frac{(l_1+l_2-l)(l+l_1-l_2)(l-l_1+l_2)}{ll_1l_2(l+1)(l_1+1)}\times\\&\times(l+l_1+l_2+1)(l+l_1+l_2-1).\end{aligned} \qquad (16)$$

При этом из (10) для полуцелых g имеем:

$$C(l_1,l_2,l;1,0,1)=A_2C(l_1-1,l_2-1,l-1;0,0,0), \tag{17}$$

где

$$A_2=\frac{1}{2}\left[\frac{2l+1}{2l-1}\times\right.$$
$$\times\frac{(l_1+l_2-l)(l+l_1-l_2)(l-l_1+l_2)}{ll_1(l+1)(l_1+1)}\times$$
$$\left.\times\frac{(l+l_1+l_2+1)(l+l_1+l_2-1)}{(l+l_1+l_2)}\right]^{1/2}.$$

Выражения (6) и (17) означают, что $C(l_1,l_2,l;1,0,1)$ для физических значений моментов l_1, l_2, l тоже сводится к одночленной формуле. Достаточно простые аналитические выражения (2), (12) и (17) позволяют легко получить их асимптотики при $l_1,l_2,l\gg 1$.

Если выразить факториалы через Г-функцию и воспользоваться формулой Стирлинга [10, с. 62]

$$\Gamma(z)\cong\sqrt{2\pi}e^{-z}z^{z-1/2},\qquad |\arg z|<\pi, \tag{18}$$

то для входящих в формулу (2) сомножителей получим асимптотические выражения:

$$\frac{g!}{\sqrt{(2g+1)!}}=\frac{\Gamma(g+1)}{\sqrt{\Gamma(2g+2)}}\cong\left(\frac{\pi}{g}\right)^{1/4}2^{-g-1/2},$$

$$\frac{\sqrt{(2g-2l_1)!(2g-2l_2)!(2g-2l)!}}{(g-l_1)!(g-l_2)!(g-l)!}\cong$$
$$\cong\frac{2^{3g-(l_1+l_2+l)}}{\left[\pi(g-l_1)\pi(g-l_2)\pi(g-l)\right]^{1/4}}.$$

Подстановка их в формулу (2) приводит к следующему результату:

$$C(l_1,l_2,l;0,0,0)=\begin{cases}0 & \text{для полуцелого } g,\\ (-1)^{g-l}\sqrt{\dfrac{l}{\pi S}} & \text{для целого } g.\end{cases} \tag{19}$$

Величина S, входящая в формулу (19), может быть записана в одной из следующих пяти форм:

$$S=\tfrac{1}{4}\sqrt{(l_1+l_2+l)(l_1+l_2-l)(l-l_1+l_2)(l+l_1-l_2)}=$$
$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{\left[(l+l_1)^2-l^2\right]\left[l^2-(l_1-l_2)^2\right]}=$$
$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{\left[2l_1l_2-\left(l^2-l_1^2-l_2^2\right)\right]\left[2l_1l_2+\left(l^2-l_1^2-l_2^2\right)\right]}=$$
$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{\left[4l_1^2l_2^2-\left(l^2-l_1^2-l_2^2\right)^2\right]}=$$
$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{-l^4-l_1^4-l_2^4+2\left(l_1^2l_2^2+l_1^2l_3^2+l_2^2l_3^2\right)}. \tag{20}$$

У разных авторов эта величина может присутствовать в одной из вышеприведенных форм, тождественность которых, на первый взгляд, не очевидна.

Исходя из (19), нетрудно записать асимптотику для $C(l_1-1,l_2-1,l-1;0,0,0)$ при полуцелых g:

$$C(l_1-1,l_2-1,l-1;0,0,0)\cong(-1)^{g-l-1/2}\sqrt{\frac{l}{\pi S}}, \tag{21}$$
$$(l_1,l_2,l\gg 1).$$

Асимптотики (19) и (21) являются исходными для асимптотической оценки формул (6) и (17). Для оценки (6) получим при целом g:

$$C(l_1,l_2,l;1,0,1)\cong A_1C(l_1,l_2,l;0,0,0), \tag{22}$$
$$(l_1,l_2,l\gg 1),$$

где $C(l_1,l_2,l;0,0,0)$ определяется нижней частью формулы (19), а A_1 – есть асимптотическое приближение для (7):

$$A_1 \approx \frac{l^2+l_1^2-l_2^2}{2ll_1}. \qquad (23)$$

Для полуцелых g из (17) аналогичным образом получим:

$$C(l_1,l_2,l;1,0,1) \approx A_2 C(l_1-1,l_2-1,l-1;0,0,0), \qquad (24)$$

$$l_1,l_2,l \gg 1,$$

где $C(l_1-1,l_2-1,l-1;0,0,0)$ определяется формулой (21), а

$$A_2 \approx \frac{2S}{ll_1}. \qquad (25)$$

Сравнение с известными асимптотиками

Сравним полученные асимптотики с имеющимися в литературе. В монографии [4, с. 229] приведено асимптотическое выражение, которое в наших обозначениях выглядит следующим образом (формула Виленкина):

$$C(l_1,l_2,l;0,0,0) \approx \begin{cases} \dfrac{(-1)^{g-l}\sqrt{2l/\pi}}{\left[4l_1^2l_2^2-\left(ll_1^2-l_2^2\right)^2\right]^{1/4}}, \\ \quad \text{если} \quad |l_1-l_2|<l<l_1+l_2; \\ 0, \text{ в противном случае;} \end{cases} \qquad (26)$$

и не зависит от магнитных квантовых чисел m_1, m_2. Если учесть, что в знаменателе (26) стоит выражение для $2\sqrt{S}$ (см. (20)), то (26) отличается от (19) или (21) в $\sqrt{2}$ раз. Для полуцелых g оценка (26) принципиально неверна, в этом случае $C(l_1,l_2,l;0,0,0) \equiv 0$. Для магнитных квантовых чисел $m_1=1$, $m_2=0$, отличие (26) от (22) или (24) еще больше: в $\sqrt{2}A_1$ или $\sqrt{2}A_2$ раз соответственно.

В формулах Брушара и Толхука [6] (см. также [3, с. 225]) зависимость от магнитных квантовых чисел m_1 и m_2 содержится в несущественных $\sim O(l^{-2})$ членах разложения. При $m_1=m_2=0$ формула для $C(l_1,l_2,l;0,0,0)$, полученная в [3, с. 225, формула (20)], отличается от формулы Виленкина (26) несущественным $\sim O(l^{-1})$ членом в асимптотике (величина $2l+1$ вместо $2l$), и этой разницей можно пренебречь. Поэтому неточность будет того же порядка, что и у формулы (26).

Полуклассическая формула Понзано и Редже* [11], приведенная в [3, с. 223] имеет вид:

$$C(l_1,l_2,l;m_1,m_2,m) \approx (-1)^{2l_2+l+m+1}\sqrt{\frac{2l+1}{\pi S}}\times$$
$$\times\cos\left[j_1\theta_1+j_2\theta_2+j_3\theta_3-m_2\varphi_1+m_1\varphi_2+\pi/4\right], \qquad (27)$$

где $j_1 \equiv l_1+1/2$, $j_2 \equiv l_2+1/2$, $j_3 \equiv l+1/2$, $m_3=-m$,

$$S=\frac{1}{4}\Big[-j_1^4-j_2^4-j_3^4+2\left(j_1^2j_2^2+j_1^2j_3^2+j_2^2j_3^2\right)+$$
$$+4\left(j_1^2m_2m_3+j_2^2m_1m_3+j_3^2m_1m_2\right)\Big]^{1/2}, \qquad (28)$$

$$\cos\theta_i=\frac{2j_i^2m_l+m_i\left(j_i^2-j_k^2+j_l^2\right)}{\sqrt{\left(j_i^2-m_i^2\right)\left[4j_i^2j_l^2-\left(j_i^2-j_k^2+j_l^2\right)\right]}},$$

*Не имея возможности ознакомиться с работой [11], мы пользовались ее результатами, изложенными в [3].

$$\cos\varphi_i = \frac{1}{2}\frac{j_i^2 - j_k^2 - j_l^2 - 2m_k m_l}{\sqrt{\left(j_k^2 - m_k^2\right)\left(j_i^2 - m_l^2\right)}},$$

а индексы j, k, l образуют циклическую перестановку из 1, 2, 3.

Заметим, что выражение (28) с точностью до несущественных для асимптотики членов $\sim O\left(|j|^{-1}\right)$ совпадает с одной из форм (20). Для $m_1 = m_2 = m = 0$ выражение для S^2 [3, с. 224, формула 45] содержит опечатку: в первой скобке должно быть 3/2 вместо 5/2. Тогда это выражение переходит в первую форму соотношения (20). При этом

$$\cos\theta_i \sim O\left(|j|^{-1}\right), \qquad \theta_i \sim \pi/2 + O\left(|j|^{-1}\right),$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{j_2^2 - j_3^2 - j_1^2}{2\sqrt{\left(j_3^2 - 1\right)\left(j_1^2 - 1\right)}} \approx -\frac{j_3^2 + j_1^2 - j_2^2}{2 j_3 j_1} O(1).$$

В результате для $m_1 = m_2 = 0$ аргумент косинуса в формуле (27)

$$\Phi = j_1\theta_1 + j_2\theta_2 + j_3\theta_3 + \pi/4 = (l_1 + l_2 + l_3 + 1/2)\pi/2,$$

$$\cos\Phi = -\cos\frac{l_1 + l_2 + l}{2}\text{p} = (-1)^{g+1}\frac{1 + (-1)^{2g}}{2},$$

а ККГ соответственно имеет вид [3, с. 224, формула (18)]:

$$C(l_1, l_2, l; 0,0,0) \approx (-1)^{g-l}\sqrt{\frac{2l+1}{2\pi S}}\,\frac{1 + (-1)^{2g-2l}}{2}, \tag{29}$$

и отличается от (19) асимптотически несущественными членами.

Для магнитных квантовых чисел $m_1 = 1,\ m_2 = 0$

$$\Phi \approx \left[\frac{\pi}{2}(l_1 + l_2 + l) + \pi + \varphi_2\right] + O\left(|j|^{-2}\right). \tag{30}$$

В случае целых g: $\cos\Phi = (-1)^g \cos\varphi_2$. При этом ($m$ = 1)

$$C(l_1, l_2, l; 1,0,1) = (-1)^{2l_2+l+2}\sqrt{\frac{2l+1}{2\pi s}}(-1)^{g+1}\cos\varphi_2 =$$

$$= -\cos\varphi_2 C(l_1, l_2, l; 0,0,0). \tag{31}$$

Здесь

$$-\cos\varphi_2 \approx \frac{l^2 + l_1^2 - l_2^2}{2ll_1}. \tag{32}$$

Совпадение (32) с A_1 из (23) очевидно, а следовательно, (31) совпадает с асимптотикой точного выражения (22). Для полуцелых значений g

$$\cos\Phi = -\cos\left[\frac{\pi}{2}(l_1 + l_2 + l) + \varphi_2\right] =$$

$$= (-1)^{(l_1+l_2+l-1)/2}\sin\varphi_2, \tag{33}$$

при этом

$$\sin\varphi_2 \simeq \frac{2S}{ll_1}. \tag{34}$$

Тогда из (27)

$$C(l_1, l_2, l; 1,0,1) \simeq (-1)^{2l_2+l+2}\sqrt{\frac{2l+1}{2\pi S}}(-1)^{g-1/2}\sin\varphi_2 =$$

$$= (-1)^{g-l-1/2}\sqrt{\frac{l}{\pi S}}\sin\varphi_2 \simeq \frac{2S}{ll_1}C(l_1 - 1, l_2 - 1, l - 1; 0,0,0). \tag{35}$$

Сравнение (35) с формулой (24) с учетом (25) показывает полное совпадение основных членов асимптотических значений $C(l_1, l_2, l; 1,0,1)$, даваемых полуклассической формулой Понзано и Редже, и значений, полученных нами из точных формул (6) и (17).

Литература

1. G. N. Watson. Proc. Roy. Soc. 1918, **A95,** pp. 83-99.
2. T. Regge. Nuovo Cimento. 1959, **14**, No. 5, pp. 951-976.
3. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. Квантовая теория углового момента. Ленинград, Наука, 1975, 439 с.
4. Н. Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. Москва, Наука, 1991, 588 с.
5. A. S. Bryukhovetski, L. A. Pazynin. J. Electromagn. Waves Appl. (JEWA). 1991, **5**, No. 8, pp. 897-907.
6. P. J. Brussard, H. A. Tolhoek. Physica. 1957, **23**, No. 10, pp. 955-971.
7. Я. А. Смородинский, Л. А. Шелепин. УФН. 1972, **106**, №1, с. 3-45.
8. Л. А. Шелепин. Труды ФИАН СССР им. П. Н. Лебедева. Москва, Наука, 1973, **70**, с. 3-119.
9. А. У. Климык. Матричные элементы и коэффициенты Клебша-Гордана представлений групп. Киев, Наукова думка, 1979, 304 с.
10. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 1. Москва, Наука, 1973, 296 с.
11. G. Ponzano, T. Regge. Spectrogcopic and group theoretical methods in physics. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1968, pp. 1-58.

On Clebsch-Gordan Coefficients in Complex j-Plane. I. Physical Values of an Angular Momentum

A. S. Bryukhovetski, L. A. Pazynin

Sufficiently simple exact expressions are obtained for the Clebsch-Gordan coefficients with magnetic numbers 0 and 1 for the physical angular momentum values. On the basis of these expressions the asymptotics of such coefficients are calculated and a comparison with the results available from literature is performed. The results are of importance for the analysis of asymptotic behaviour of scattered fields in relevant electromagnetic problems having spherical symmetry.