

## Моделирование несимметричного вертикального вибратора конечной толщины при осесимметричном возбуждении

В. Н. Кочин

*Радиоастрономический институт НАН Украины,  
61002, Харьков, ул. Краснознаменная, 4  
E-mail: kochin@rian.ira.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 22 мая, после переработки 6 сентября 2001 г.*

С помощью строгого электродинамического подхода рассмотрена задача об излучении несимметричного цилиндрического вибратора произвольного радиуса при осесимметричном возбуждении. Основой предлагаемого подхода является представление поверхностных токов на цилиндрической поверхности и торце вибратора в виде разложения по базисным функциям подобластей. Рассматриваемая задача сведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения токов с матрицей обобщенных импедансов и вектором напряжений в правой части. В работе рассчитаны токи, текущие по цилиндрической поверхности вибратора, и проведено сравнение с результатами, полученными другими авторами. Приведены формулы для расчета поля в дальней зоне и графики частотной зависимости входного импеданса антенны.

За допомогою строгого електродинамічного підходу розглянуто задачу про випромінювання несиметричного циліндричного вібратора довільного радіусу при осесиметричному збудженні. Основою запропонованого підходу є зображення поверхневих струмів на циліндричній поверхні та торці вібратора у вигляді розкладання по базисних функціях підобластей. Рішення розглянутої задачі зведено до рішення нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладання струмів з матрицею узагальнених імпедансів та вектором напруг у правій частині. В роботі розраховані струми, що течуть по циліндричній поверхні вібратора, та проведено порівняння з результатами інших авторів. Наведені формули для розрахунку поля в дальній зоні та графіки частотної залежності вхідного імпедансу антени.

### 1. Введение

Для анализа характеристик вертикальных вибраторов как правило используют интегральные уравнения Халлена или Поклингтона либо обобщенный метод наведенных ЭДС [1]. Линеаризованные интегральные уравнения Халлена и Поклингтона, а также разработанные для них приближенные численные методы решения применяются исключительно к электрически тонким антеннам ( $kb \ll 1$ , где  $k$  – волновое число,  $b$  – радиус вибратора) [2]. Для

таких антенн несущественно, используется ли точное ядро интегрального уравнения или приближенный вид ядра. Если не ограничивать толщину исследуемых вибраторных антенн, то возникают проблемы с решением интегральных уравнений, описывающих токи на поверхности таких вибраторов. На практике антенны с большим поперечным размером моделируются либо “телом вращения без острых кромок” [3], либо полым тонкостенным цилиндром [4]. В первом случае задача сводится к численному решению двух интегро-диффе-

ренциальных уравнений методом моментов с использованием кусочно-непрерывных функций для представления токов на поверхности вибратора. Применимость предлагаемого в [3] подхода к численному решению интегро-дифференциальных уравнений ограничена областью изменения электрического радиуса вибратора  $0.1 \leq kb \leq 0.5$ . Если вибратор моделировать тонкостенным цилиндром, то в такой модели ток у вершины вибратора всегда равен нулю, как у электрически тонкого вибратора. Кроме того, при анализе электрически толстых вибраторов нельзя оперировать свойствами ядра интегрального уравнения, использовавшимися при анализе тонких вибраторов.

Необходимо также упомянуть работу Е. Боха [5], в которой рассмотрена задача о возбуждении цилиндрического вибратора конечного радиуса. Однако решение приведенной в этой работе системы интегро-дифференциальных уравнений получено в предположении, что радиус вибратора мал по сравнению с длиной волны.

При анализе интегрального уравнения Халлена для описания возбуждения используется модель бесконечно тонкого зазора между плечами вибратора. Вместе с тем результаты расчета величины входного импеданса антенны весьма чувствительны к выбору используемой модели участка возбуждения. Поэтому в качестве модели источника, возбуждающего антенну, предпочтительнее использовать плоский кольцевой магнитный ток, хорошо моделирующий возбуждение коаксиальной линией полубесконечного штыря, расположенного на заземленной плоскости [1].

Целью настоящей работы является исследование модели несимметричного вертикального вибратора, в котором ток течет не только по цилиндрической поверхности, но и по диску на его вершине. В работе в строгой электродинамической постановке рассмотрена задача о возбуждении несимметричного вертикального вибратора, образованного круговым металлическим цилиндром с радиусом  $b$  и высотой  $h$  и расположенного на заземленной плоскости. В качестве источника, возбуждающего вибратор, используется раскрыв коаксиальной линии диаметром  $2d$ . Вибратор явля-

ется продолжением внутреннего проводника коаксиальной линии, внешний проводник которой заземлен (рис. 1). При этом никаких ограничений на размеры вибратора не накладывается. Вопросы согласования вибратора с линией питания в работе не обсуждаются.

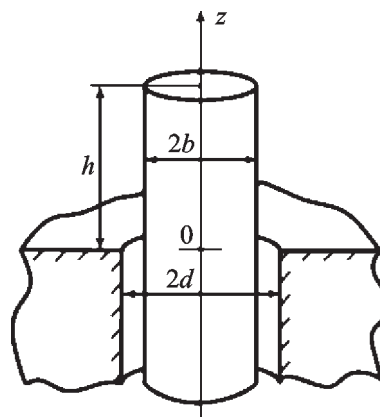


Рис. 1. Схема несимметричного цилиндрического вибратора

## 2. Постановка задачи

С помощью метода зеркальных изображений [6] рассматриваемая задача сводится к анализу вибратора, симметричного относительно плоскости раскрытия коаксиального волновода. При этом поля, возбуждаемые раскрывом коаксиального волновода, вычисляются как поля плоского кольцевого магнитного тока, магнитный векторный потенциал которого в силу осевой симметрии задачи имеет только  $\Phi$ -ю составляющую следующего вида [1]:

$$F_{\Phi}(R) = -\frac{2}{\ln(d/b)} \int_b^d \int_0^{\pi} \cos(\varphi') G(|\vec{R} - \vec{R}'|) d\varphi' dr', \quad (1)$$

где  $G(|\vec{R} - \vec{R}'|)$  – трехмерная функция Грина для свободного пространства [7],

$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{z^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi'}$ ;  $(r, \varphi, z)$  – координаты точки наблюдения;  $(r', \varphi', z')$  – координаты источника. Зависимость от времени выбрана в виде  $\exp(-i\omega t)$ .

В результате распределение тока в несимметричном вибраторе совпадает с распределением тока в одном плече симметричного вибратора, находящегося в свободном пространстве, а входное сопротивление оказывается вдвое меньшим.

Излучаемое вибратором поле удобно представить в виде электрического векторного потенциала [1], который для рассматриваемых структуры и распределения тока на ней должен иметь  $r$ -ю и  $z$ -ю компоненты следующего вида:

$$A_r(r, z) = \int_0^b r' j_r(r') G_r(|\vec{R} - \vec{R}'|) dr', \quad (2)$$

$$A_z(r, z) = b \int_{-h}^h j_z(z') G_z(|\vec{R} - \vec{R}'|) dz'. \quad (3)$$

Здесь компонента  $A_r(r, z)$  описывает поле, которое создает в пространстве ток на торцевой части (диске) излучателя, а  $A_z(r, z)$  – поле тока на вертикальной части излучателя;  $j_r(r')$  и  $j_z(z')$  – плотности токов, текущих по поверхности диска и цилиндра соответственно;  $G_r(|\vec{R} - \vec{R}'|)$  и  $G_z(|\vec{R} - \vec{R}'|)$  – трехмерные функции Грина для свободного пространства, вычисленные с учетом геометрии задачи [7]:

$$G_r(|\vec{R} - \vec{R}'|) = -\frac{1}{8\pi i} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{\gamma} [\exp(i\gamma|z-h|) - \exp(-i\gamma|z+h|)] \times \\ & \quad \times J_1(\xi r) J_1(\xi r'); \\ & -i \int_{-\infty}^\infty d\alpha \exp(i\alpha z) \begin{cases} J_1(\beta r) H_1^{(1)}(\beta r'), & r' > r; \\ J_1(\beta r') H_1^{(1)}(\beta r), & r' < r; \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$G_z(|\vec{R} - \vec{R}'|) = \frac{1}{8\pi i} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{\gamma} \exp(i\gamma|z-z'|) J_0(\xi b) J_0(\xi r); \\ & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty d\alpha \exp[i\alpha(z-z')] \begin{cases} J_0(\beta r) H_0^{(1)}(\beta b), & b > r; \\ J_0(\beta b) H_0^{(1)}(\beta r), & b < r; \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

где  $\gamma = \gamma(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ ,  $\text{Im } \gamma(\xi) \geq 0$ ;  $\beta = \beta(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ ,  $\text{Im } \beta(\alpha) \geq 0$ ;  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $J_n(x)$  – функции Бесселя;  $H_n^{(1)}(x)$  – функции Ханкеля I-го рода.

Для определения величин  $j_r(r)$  и  $j_z(z)$  с помощью граничного условия на поверхности вибратора построим систему интегральных уравнений. Потребовав равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля на поверхности излучателя, получим систему связанных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} & \int_0^b dr' r' j_r(r') \left[ k^2 G_r(|\vec{R} - \vec{R}'|) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r G_r(|\vec{R} - \vec{R}'|)) \right] \right] + \\ & + \int_{-h}^h dz' j_z(z') \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} G_z(|\vec{R} - \vec{R}'|) = i\omega \varepsilon E_r^i(r, z), \\ & 0 < r < b, \quad z = \pm h; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^b dr' r' j_r(r') \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} G_r(|\vec{R} - \vec{R}'|) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} G_r(|\vec{R} - \vec{R}'|) \right] + \\ & + \int_{-h}^h dz' j_z(z') \left[ k^2 G_z(|\vec{R} - \vec{R}'|) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_z(|\vec{R} - \vec{R}'|) \right] = \\ & = i\omega \varepsilon E_z^i(r, z), \\ & r = b, \quad |z| < h, \end{aligned}$$

где  $E_r^i(r, z)$  и  $E_z^i(r, z)$  – компоненты электрического поля кольца магнитного тока в свободном пространстве.

Таким образом, решив систему (6), определим распределение тока по поверхности вибратора, а затем сможем вычислить векторный потенциал поля рассматриваемого излучателя по формулам (2) и (3).

### 3. Численно-аналитическое решение системы интегральных уравнений

Решение системы (6) можно получить с помощью метода Галеркина. Системы базисных функций необходимо выбирать в соответствии с физическими особенностями рассматриваемой задачи. Эффективность решения задачи определяется выбором системы базисных функций. От этого выбора, в конечном счете, зависит трудоемкость решения задачи. Чем точнее первые базисные функции описывают распределение тока на поверхности излучателя, тем ниже порядок редуцированной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Наличие прямоугольного ребра у вершины излучателя приводит к появлению постоянной составляющей тока на его вертикальной части с неизвестной амплитудой  $s_0$ . Поэтому плотность поверхностных токов на излучателе удобно представить в виде:

$$j_r(r) = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} p_n J_n^D(r), \quad (7)$$

$$j_z(z) = \frac{1}{h} \left[ s_0 + \sum_{n=0}^{\infty} q_n I_n^M(z) \right], \quad (8)$$

где  $\{J_n^D(r)\}_0^{\infty}$  и  $\{I_n^M(z)\}_0^{\infty}$  – базисные функции полной области для диска и вибратора соответственно, т. е. функции определенные и не равные нулю во всей области изменения  $r$  и  $z$  на диске и вибраторе, за исключением множества меры нуль;  $p_n$  и  $q_n$  – неизвестные коэффициенты.

Для представления поверхностного тока на диске воспользуемся системой базисных функций, предложенной в [8], дополнив ее функ-

цией, которая учитывает особенности в распределении плотности тока при приближении к прямоугольному ребру:

$$J_0^D(r) = r/b, \quad 0 < r < b, \quad (9)$$

$$J_n^D(r) = \sqrt{8n+2} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2n)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2n+2)} P_{2n}^{(1)}\left(\sqrt{1-\left(\frac{r}{b}\right)^2}\right),$$

$$n \geq 1,$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция,  $P_{2n}^{(1)}(x)$  – присоединенные (шаровые) функции Лежандра I-го рода. Для построения системы базисных функций  $I_n^M(z)$ , описывающих плотность тока на поверхности вибратора, воспользуемся полиномами Чебышева II-го рода  $U_{2n}(z)$  с весовым множителем, обеспечивающим убывание тока при приближении к ребру,

$$I_n^M(z) = \sqrt{1-\left(\frac{z}{h}\right)^2} \frac{U_{2n}\left(\frac{z}{h}\right)}{\sqrt{2n+1}}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (10)$$

Найдем связь между неизвестными коэффициентами  $p_0$  и  $s_0$  в формулах (7) и (8). Для этого запишем условие непрерывности тока на ребре:

$$j_z(h) = -j_r(b). \quad (11)$$

Подставив в (11) выражения (7) и (8), с учетом (9) и (10) получим следующую связь между  $p_0$  и  $s_0$ :

$$s_0 = -p_0 \frac{h}{b}. \quad (12)$$

Подставим (7) и (8) в (6) с учетом (12). Умножим первое уравнение системы на  $J_m^D(r)$ ,  $m=1, 2, \dots$ , второе – на  $I_m^M(z)$ ,  $m=0, 1, 2, \dots$ , и проинтегрируем их по области определения

интегральных уравнений. Полученную СЛАУ дополним результатом интегрирования второго уравнения системы (6) по области его определения с весом 1.0. В результате описанных выше преобразований бесконечная СЛАУ относительно коэффициентов разложения токов будет иметь вид:

$$X_{00}P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_{0n}P_n + \sum_{n=0}^{\infty} Y_{0n}Q_n = Z_0^{(0)};$$

$$X_{m0}^{(1)}P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}^{(1)}P_n + \sum_{n=0}^{\infty} Y_{mn}^{(1)}Q_n = Z_m^{(1)}, \quad (13)$$

$m = 1, 2, \dots;$

$$X_{m0}^{(2)}P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}^{(2)}P_n + \sum_{n=0}^{\infty} Y_{mn}^{(2)}Q_n = Z_m^{(2)},$$

$m = 0, 1, 2, \dots;$

где

$$X_{00} = \frac{i}{4\pi} \frac{h^3}{b} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \left( \frac{\sin(\alpha h)}{\alpha h} \right)^2 H_0^{(1)}(\beta b) [(\alpha b)^2 \beta \Phi_0(\beta) - \beta^2 b J_0(\beta b)];$$

$$X_{0n} = \frac{1}{2\pi} b h^2 \int_0^{\infty} d\xi \xi^2 \frac{\sin(\gamma h)}{\gamma h} \exp(i\gamma h) J_0(\xi b) \Phi_n(\xi);$$

$$Y_{0n} = \frac{i}{8\pi} b h^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \beta^2 \frac{\sin(\alpha h)}{\alpha h} J_0(\beta b) H_0^{(1)}(\beta b) \Psi_n(\alpha);$$

$$X_{m0}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} b h \int_0^{\infty} d\xi \xi \frac{\sin(\gamma h)}{\gamma h} \exp(i\gamma h) [(\gamma b)^2 \Phi_0(\xi) - \xi b J_0(\xi b)] \Phi_m(\xi);$$

$$X_{mn}^{(1)} = \frac{b^3}{4\pi} \int_0^{\infty} d\xi \xi \gamma \sin(\gamma h) \exp(i\gamma h) \Phi_m(\xi) \Phi_n(\xi);$$

$$Y_{mn}^{(1)} = \frac{b^3}{8\pi} \int_0^{\infty} d\xi \xi^2 J_0(\xi b) \Phi_m(\xi) \Psi_n(\gamma) \exp(i\gamma h);$$

$$X_{m0}^{(2)} = \frac{i}{8\pi} \frac{h^3}{b} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\sin(\alpha h)}{\alpha h} H_0^{(1)}(\beta b) [(\alpha b)^2 \beta \Phi_0(\beta) - \beta^2 b J_0(\beta b)] \Psi_m(\alpha);$$

$$X_{mn}^{(2)} = \frac{b h^2}{4\pi} \int_0^{\infty} d\xi \xi^2 J_0(\xi b) \Psi_m(\gamma) \exp(i\gamma h) \Phi_n(\xi);$$

$$Y_{mn}^{(2)} = \frac{i}{16\pi} b h^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \beta^2 J_0(\beta b) H_0^{(1)}(\beta b) \Psi_m(\alpha) \Psi_n(\alpha);$$

$$Z_0^{(0)} = i\omega \epsilon h \int_{-h}^h dz E_z^i(b, z);$$

$$Z_m^{(1)} = i\omega \epsilon \int_0^b dr r J_m^D(r) E_r^i(r, h);$$

$$Z_m^{(2)} = i\omega \epsilon h \int_{-h}^h dz I_m^M(z) E_z^i(b, z);$$

$$\Phi_n(\xi) = \frac{1}{b^2} \int_0^b dr r J_1(\xi r) J_n^D(r) = \begin{cases} J_2(\xi b) / (\xi b), & n = 0, \\ \frac{\sqrt{4n+1} J_{2n+1/2}(\xi b)}{(\xi b)^{3/2}}, & n > 0; \end{cases}$$

$$\Psi_n(\alpha) = \frac{1}{h} \int_{-h}^h dz \exp(\pm i\alpha z) I_n^M(z) = (-1)^n \pi \sqrt{2n+1} \frac{J_{2n+1}(\alpha h)}{\alpha h}, \quad n \geq 0.$$

Поскольку элементы матрицы системы (13) имеют размерность сопротивления, такая матрица в литературе обычно называется матрицей обобщенных импедансов, а столбец свободных членов системы (13) – вектором напряжений [1].

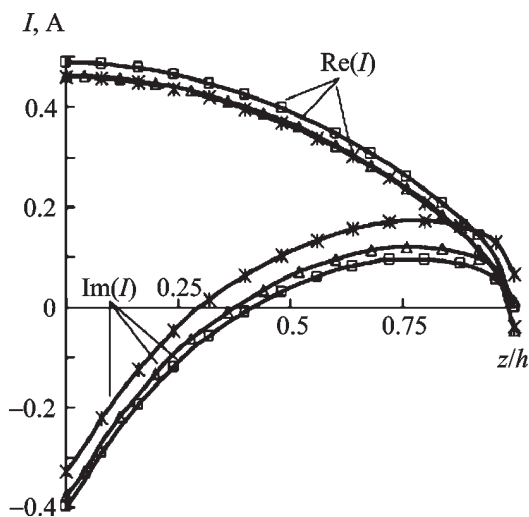
В СЛАУ (13) перейдем к безразмерным переменным интегрирования и выполним ряд преобразований, которые позволят значительно улучшить сходимость несобственных интегралов. Эти преобразования ввиду громоздкости здесь воспроизводить не будем. Их суть

заключается в следующем. Выделяется статическая часть подынтегральных выражений и вычисляется либо полностью, где это возможно, либо частично. Затем там, где это необходимо, используются преобразования, аналогичные преобразованиям Куммера в теории рядов [9]. В результате получим выражения для элементов матрицы обобщенных импедансов, удобные для численного счета, которые приведены в Приложении.

Анализ матричных коэффициентов системы (13) показывает, что они убывают с увеличением номеров  $m$  и  $n$  не хуже, чем  $m^{-(1+\Delta)} n^{-(1+\Delta)}$ , где  $\Delta$  – положительное число. С оценкой матричных коэффициентов  $X_{mn}^{(1)}$  можно ознакомиться, например, в [10]. Бесконечную СЛАУ (13) нетрудно преобразовать в СЛАУ II-го рода аналогично тому, как это было сделано в [10], и для ее решения использовать метод редукции.

#### 4. Численные результаты

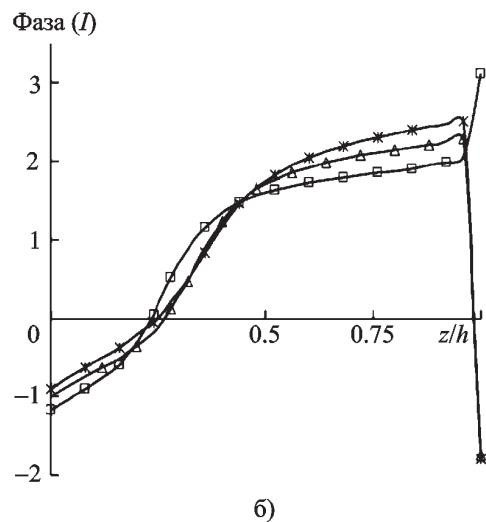
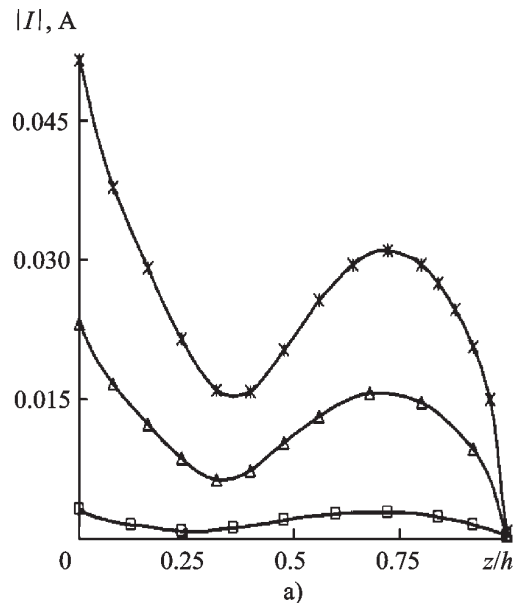
После того, как решение СЛАУ (13) получено, нетрудно определить распределение тока на поверхности вибратора с помощью формул (8) и (9). На рис. 2 приведено распределение вещественной и мнимой частей полного тока на



**Рис. 2.** Распределения вещественной и мнимой частей полного тока на цилиндрической поверхности вибратора при учете различного числа гармоник тока на его вершине (диске):  $h/\lambda = 0.25$ ,  $b/\lambda = 0.25$ ,  $d/b = 1.219$  ( $\square$  –  $N_{disk} = 1$ ,  $\triangle$  –  $N_{disk} = 3$ ,  $\ast$  –  $N_{disk} = 11$ )

цилиндрической поверхности вибратора при учете различного числа  $N_{disk}$  базисных функций для описания поверхностного тока на вершине (диске) вибратора. При численных расчетах здесь и ниже выбирались такие размеры коаксиального волновода, при которых в нем может распространяться только основная волна.

На рис. 3 приведены распределения модуля и фазы полного тока  $I(z) = 2\pi b j_z(z)$  на вер-



**Рис. 3.** Распределение модуля (а) и фазы (б) полного тока на вертикальной части вибраторов различной электрической толщины:  $\square$  –  $kb = 0.1$ ,  $\triangle$  –  $kb = 0.3$ ,  $\ast$  –  $kb = 0.5$ ;  $h/\lambda = 0.625$ ,  $d/b = 1.219$

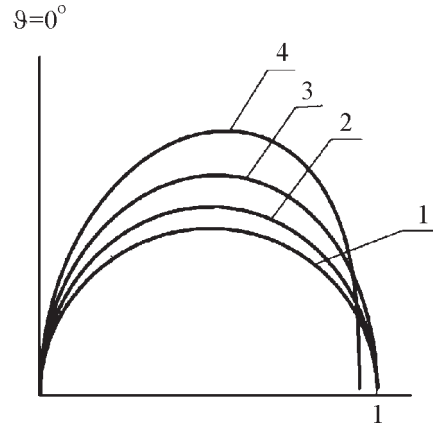
тикальной части вибратора для различных значений  $b$  и  $h$ . Кривые для модуля тока качественно согласуются с кривыми, приведенными в [3] для таких же значений параметров, по всей длине рассматриваемых вибраторов. Кривые для фазы тока также хорошо совпадают с кривыми, приведенными в [3], для вертикальной части вибратора. Но поскольку в рассматриваемой модели вибратора у вершины происходит резкое изменение направления тока на  $\pi/2$ , фаза тока при  $z = h$  тоже резко меняется в отличие от [3].

Если коэффициенты  $\{p_n\}_0^\infty$  и  $\{q_n\}_0^\infty$  известны, нетрудно рассчитать поле в любой точке пространства, используя формулы для векторного потенциала. Напряженность магнитного поля для рассматриваемого излучателя в сферической системе координат  $(R, \vartheta, \varphi)$  в дальней зоне ( $kR \gg 1$ ) имеет вид:

$$H_\varphi(R, \vartheta, \varphi) \approx \frac{\exp(ikR)}{R} \left\{ \frac{1}{2Z_0 \ln(d/b)} \times \frac{J_0(kd \sin \vartheta) - J_0(kb \sin \vartheta)}{\sin \vartheta} - ikb \cos \vartheta \sin(kh \cos \vartheta) \times \sum_{n=0}^{\infty} p_n \varphi_n(kb \sin \vartheta) + i \frac{kb}{4\pi} \sin \vartheta J_0(kb \sin \vartheta) \times \left[ -2 \frac{h}{b} \frac{\sin(kh \cos \vartheta)}{kh \cos \vartheta} p_0 - \sum_{n=0}^{\infty} q_n \psi_n(kh \cos \vartheta) \right] \right\},$$

где функции  $\varphi_n(x)$  и  $\psi_n(x)$  определены в (13). На рис. 4 приведены сечения нормированных диаграмм направленности четвертьволнового несимметричного вертикального вибратора в азимутальной плоскости для различных значений величины  $b/h$  (угол  $\vartheta$  отсчитывается от вертикали). Поскольку диаграммы направленности рассматриваемого вибратора осесимметричны, графики построены только для  $\varphi = \text{const}$ . Из графиков видно, что при уменьшении радиуса вибратора его диаграмма направленности стремится к диаграмме направленности бесконечно тонкого вибратора.

Как отмечалось выше, результаты точного расчета входного сопротивления весьма чув-



**Рис. 4.** Диаграммы направленности несимметричного четвертьволнового вертикального вибратора для различных значений величины  $h/b$ :

1 –  $h/b = 25.0$ , 2 –  $h/b = 1.67$ , 3 –  $h/b = 1.25$ , 4 –  $h/b = 1.0$ ;  $d/b = 1.219$

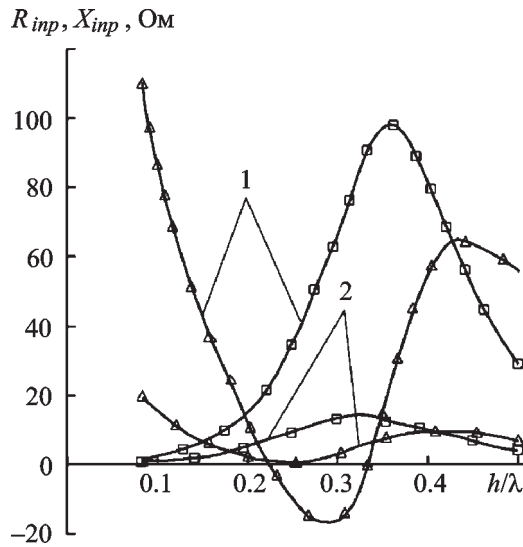
ствительны к используемой модели возбуждения антенны. Так как плоский кольцевой магнитный ток хорошо моделирует реальный участок возбуждения, такая модель позволяет с хорошей точностью рассчитать входное сопротивление вибратора. Поскольку распределение плоского кольцевого магнитного тока совпадает с распределением электрического поля в раскрытии коаксиальной линии, при учете только основной волны поле в раскрытии имеет вид [2]:

$$E_r(r, 0) = \frac{V}{2r \ln(d/b)},$$

где  $V$  – приложенное напряжение. В результате выражение для входного сопротивления несимметричного вибратора будет иметь вид (при единичном возбуждающем напряжении):

$$Z_{inp} = \frac{1}{2I_0},$$

где  $I_0 = 2\pi b j_z(0)$  – значение тока на участке возбуждения. На рис. 5 приведены зависимости реальной и мнимой части входного сопро-



**Рис. 5.** Зависимости вещественной и мнимой частей входного сопротивления от величины  $h/\lambda$ : 1 –  $b/h = 0.636$ , 2 –  $b/h = 0.188$ ;  $d/b = 1.219$  ( $\square$  –  $R_{inp}$ ,  $\triangle$  –  $X_{inp}$ )

тивления вибраторов различной толщины от отношения  $h/\lambda$ . Необходимо отметить, что входное сопротивление  $Z_{inp} = R_{inp} + iX_{inp}$  на

низких частотах имеет емкостной характер. Знак  $X_{inp}$  определяется выбранной в работе зависимостью от времени в виде  $\exp(-i\omega t)$ . Если перейти к зависимости от времени в виде  $\exp(i\omega t)$ , которая обычно используется в теории переменных токов, то знак  $X_{inp}$  изменится на противоположный.

### 5. Заключение

В работе предложен численно-аналитический подход к исследованию характеристик несимметричного цилиндрического вибратора произвольного радиуса при осесимметричном возбуждении. Основой предлагаемого подхода является представление поверхностных токов на вибраторе в виде разложения по базисным функциям подобластей. Эти наборы функций не зависят от вида возбуждения и определяются только формой и размерами излучателя. В результате путем выделения и вычисления статической части операторов задачи удалось существенно улучшить сходимость несобственных интегралов, описывающих матрицу обобщенных импедансов.

### Приложение.

#### Элементы матрицы обобщенных импедансов

$$X_{00} = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{h}{b}\right)^3 \left\{ -\frac{2i}{\pi} \left[ \frac{\pi b}{2h} + \int_0^\infty dx \left( \frac{\sin\left(\frac{h}{b}x\right)}{\frac{h}{b}x} \right)^2 [2xI_1(x)K_0(x) - 1] \right] + \int_0^\infty dx \left( \frac{\sin\left(\frac{h}{b}x\right)}{\frac{h}{b}x} \right)^2 \left\{ H_0^{(1)}(\beta b) \left[ 2x^2 \frac{J_1(\beta b)}{\beta b} - (kb)^2 J_0(\beta b) \right] + \frac{4i}{\pi} xI_1(x)K_0(x) \right\} \right\};$$

$$X_{0n} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \sqrt{4n+1} \left\{ \frac{b}{2h} \left[ \frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{2}\Gamma(n+1)} {}_2F_1(n+1/2, -n; 1; 1) - \right. \right.$$



$$-\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-2\frac{h}{b}x} J_0(x) J_{2n+1/2}(x) \left. + \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} J_0(x) J_{2n+1/2}(x) \left[ x \frac{\sin(\gamma h)}{\gamma h} e^{i\gamma h} - \frac{b}{2h} \left( 1 - e^{-2\frac{h}{b}x} \right) \right] \right\};$$

$$Y_{0n} = (-1)^n \frac{i}{4} \sqrt{2n+1} \left\{ \frac{i}{\pi} \left[ \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{h}{b} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin\left(\frac{h}{b}x\right)}{\frac{h}{b}x} J_{2n+1}\left(\frac{h}{b}x\right) \right] [2xI_0(x)K_0(x) - 1] + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{h}{b}\right)^2 \int_0^{\infty} dx \frac{\sin\left(\frac{h}{b}x\right)}{\frac{h}{b}x} \frac{J_{2n+1}\left(\frac{h}{b}x\right)}{\frac{h}{b}x} \left[ (\beta b)^2 J_0(\beta b) H_0^{(1)}(\beta b) - \frac{2i}{\pi} x^2 I_0(x) K_0(x) \right] \right\};$$

$$Z_0^{(0)} = -\frac{kh}{2\pi Z_0 \ln\left(\frac{d}{b}\right)} \frac{h}{b} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin\left(\frac{h}{b}x\right)}{\frac{h}{b}x} J_0(\beta b) \left[ H_0^{(1)}(\beta b) - H_0^{(1)}(\beta d) \right];$$

$$X_{m0}^{(1)} = \frac{\sqrt{4m+1}}{4\pi} \left\{ -\left[ \frac{\Gamma(m+1/2)}{2^{3/2}\Gamma(m+1)} {}_2F_1(m+1/2, -m; 2; 1) - \frac{h}{b} \int_0^{\infty} dx e^{-2\frac{h}{b}x} J_1(x) \frac{J_{2m+1/2}(x)}{x^{3/2}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{b} \int_0^{\infty} dx \frac{J_{2m+1/2}(x)}{x^{3/2}} \left[ \left[ (kb)^2 J_2(x) - 2xJ_1(x) \right] \frac{\sin(\gamma h)}{\gamma h} e^{i\gamma h} + \frac{b}{h} \left( 1 - e^{-2\frac{h}{b}x} \right) J_1(x) \right] \right\};$$

$$X_{mn}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi} \left\{ \delta_{mn} - i\sqrt{(4m+1)(4n+1)} \int_0^{\infty} dx \left[ x + i\gamma b \left( 1 - e^{2i\gamma h} \right) \frac{J_{2m+1/2}(x) J_{2n+1/2}(x)}{x^2} \right] \right\};$$

$$Y_{mn}^{(1)} = \frac{(-1)^n}{8} \sqrt{(4m+1)(2n+1)} \left\{ \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{b}{h}\right)^{3/2} \left[ \frac{\Gamma(m+1/4)}{2\Gamma(m+1+1/4)} {}_2F_1(m+1/4, -m-1/4; 1; 1) + \right. \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} J_0(x) J_{2m+1/2}(x) \left( \sqrt{2\pi} \frac{h}{b} x I_{2n+1}\left(\frac{h}{b}x\right) e^{\frac{h}{b}x} - 1 \right) \right\} +$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} J_0(x) J_{2m+1/2}(x) \left[ x \frac{J_{2n+1}(\gamma h)}{\gamma h} e^{i\gamma h} - (-1)^n \frac{b}{h} I_{2n+1}\left(\frac{h}{b}x\right) e^{-\frac{h}{b}x} \right];$$

$$Z_m^{(1)} = \frac{ikb}{4\pi Z_0 \ln\left(\frac{d}{b}\right)} \sqrt{4m+1} \int_0^{\infty} dx e^{i\gamma h} \frac{J_{2m+1/2}(x)}{x} \left[ J_0(x) - J_0\left(\frac{d}{b}x\right) \right];$$

$$X_{m0}^{(2)} = \frac{i}{8} (-1)^m \sqrt{2m+1} \left(\frac{h}{b}\right)^3 \left\{ -\frac{2i}{\pi} \left[ \delta_{m0} \frac{\pi b}{4h} + \int_0^{\infty} dx \frac{\sin\left(\frac{h}{b}x\right) J_{2m+1}\left(\frac{h}{b}x\right)}{\frac{h}{b}x} \frac{1}{\frac{h}{b}x} (2xI_1(x)K_0(x) - 1) \right] + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} dx \frac{\sin\left(\frac{h}{b}x\right) J_{2m+1}\left(\frac{h}{b}x\right)}{\frac{h}{b}x} \frac{1}{\frac{h}{b}x} \left[ H_0^{(1)}(\beta b) \left( 2x^2 \frac{J_1(\beta b)}{\beta b} - (kb)^2 J_0(\beta b) \right) + \frac{4i}{\pi} x I_1(x) K_0(x) \right] \right\};$$

$$X_{mn}^{(2)} = 2 \left(\frac{b}{h}\right)^2 Y_{mn}^{(1)};$$

$$Y_{mn}^{(2)} = \frac{(-1)^{m+n}}{8} \sqrt{(2m+1)(2n+1)} \left\{ -\left[ \frac{\delta_{mn}}{2(2m+1)} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} J_{2m+1}\left(\frac{h}{b}x\right) J_{2n+1}\left(\frac{h}{b}x\right) (2xI_0(x)K_0(x) - 1) \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{h}{b}\right)^2 \int_0^{\infty} dx \frac{J_{2m+1}\left(\frac{h}{b}x\right) J_{2n+1}\left(\frac{h}{b}x\right)}{\frac{h}{b}x} \frac{1}{\frac{h}{b}x} \left[ (\beta b)^2 J_0(\beta b) H_0^{(1)}(\beta b) - \frac{2i}{\pi} x^2 I_0(x) K_0(x) \right] \right\};$$

$$Z_m^{(2)} = -\frac{(-1)^m kh}{4Z_0 \ln\left(\frac{d}{b}\right)} \sqrt{2m+1} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} J_{2m+1}\left(\frac{h}{b}x\right) J_0(\beta b) \left[ H_0^{(1)}(\beta b) - H_0^{(1)}\left(\frac{d}{b}\beta b\right) \right];$$

$\delta_{mn}$  – символ Кронекера;  $\beta b = \sqrt{(kb)^2 - x^2}$ ;  $\gamma b = \sqrt{(kb)^2 - x^2}$ ;  $\gamma h = \frac{h}{b} \sqrt{(kb)^2 - x^2}$ ;  $I_n(x)$  – модифицированная функция Бесселя [11];  $K_n(x)$  – модифицированная функция Ханкеля [11];  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$  – гипергеометрическая функция Гаусса [11];  $Z_0 = 120\pi$  – волновое сопротивление свободного пространства. В приведенных выражениях гипергеометрические функции Гаусса имеют такой набор параметров, при котором ряды, описывающие их, являются обрывающимися.

## Литература

1. Вычислительные методы в электродинамике. Под ред. Р. Миттры. Москва, Мир, 1974, 488 с.
2. Р. В. Р. Кинг. ТИИЭР. 1967, **55**, №1, с. 6-19.
3. Е. Н. Васильев, В. Г. Малушков. Изв. вузов. Радиоп физика. 1967, **Х**, №4, с. 530-536.
4. S. H. Tan. International Journal of Numerical Modelling: Electric Networks, Devices and Fields. 1990, **3**, pp. 195-206.
5. E. V. Bohn. IRE Trans. 1957, **AP-5**, No. 4, pp. 343-348.
6. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. Москва, Изд. иностранной литературы, 1958, т. I, 930 с.
7. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин. Возбуждение электромагнитных волн. Москва, Радио и связь, 1983, 296 с.
8. Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин, А. Н. Хижняк. Препринт РИ НАН Украины, Харьков. 1988, №19, 31 с.
9. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. Москва, Наука, 1974, 832 с.
10. А. А. Гридин, В. Н. Кочин, Ю. Б. Нечаев, С. Л. Просвирнин. Радиотехника и электроника. 1994, вып. 8-9, с. 1285-1293.
11. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. Москва, Наука, 1979, 832 с.

## Modeling Non-Symmetrical Vertical Vibrator of Finite Thickness upon Axially Symmetric Excitation

V. N. Kochin

The problem of radiation of a non-symmetrical cylindrical vibrator of an arbitrary radius upon axially symmetric excitation is investigated by a rigorous method. The ground of the suggested approach is a representation of surface currents flowing on the vibrator as an expansion in basic functions of subdomains on the vibrator surface. The solution of the mentioned problem is reduced to an infinite set of algebraic equations for unknown coefficients of the current expansion with a matrix consisting of generalized impedances and voltage vector in a right part of the system. The currents flowing on the cylindrical surface were calculated and the comparison of results obtained with known ones was carried out. The formula for field calculation in far zone and the dependences of antenna input impedance versus frequency are given as well.