

Асимптотическое решение интегрального уравнения для магнитного тока в щелевых излучателях и отверстиях связи

В. А. Катрич, М. В. Нестеренко, Н. А. Хижняк

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,
Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

Статья поступила в редакцию 3 сентября 2001 г.

На основе асимптотического метода усреднения получено приближенное аналитическое решение интегрального уравнения относительно магнитного тока в щелевых излучателях и отверстиях связи электродинамических объемов. Приведены формулы для токов и характеристик рассеяния (излучения) продольной и поперечной щелей в широкой стенке прямоугольного волновода. Проведено сравнение с результатами, полученными численным методом.

На основі асимптотичного методу усереднення отримано приближене аналітичне рішення інтегрального рівняння відносно магнітного струму у щілинних випромінювачах і отворах зв'язку електродинамічних об'єктів. Наведено формули для струмів і характеристик розсіяння (випромінювання) поздовжньої і поперечної щілин у широкій стінці прямокутного хвилеводу. Проведено порівняння з результатами, що отримані числовим методом.

Введение

В антенно-волноводной технике сверхвысоких частот узкие щели находят широкое применение в качестве самостоятельных излучателей, отверстий связи между волноводами и резонаторами, а также как элементы антенных решеток. Исследованию электродинамических систем с такими щелями посвящено большое количество публикаций, в которых использованы численные [1-4], численно-аналитические [5], вариационные [6-8] и аналитические [9-12] методы анализа. Остановимся подробнее на последних, так как они обладают достаточной наглядностью и простотой (особенно для расчета характеристик систем щелей) и являются основой для вариационных методов. Вариационные методы предполагают использование априорной информации о функции распределения тока, полученной другими методами, и ока-

зываются несостоятельными, если это распределение неизвестно хотя бы приближенно.

В [9, 10, 12] получено общее аналитическое решение интегрального уравнения для магнитного тока в узкой щели в бесконечном идеально проводящем экране при произвольном ее возбуждении методом разложения функции распределения тока в ряд по степеням малого параметра α :

$$J(s) = J_0(s) + \alpha J_1(s) + \alpha^2 J_2(s) + \dots, \quad (1)$$

где $J(s)$ – ток в щели; s – продольная координата, связанная со щелью длиной $2L$ и шириной d ;

$\alpha = \frac{1}{2 \ln(kd/4)}$, $|\alpha| \ll 1$; $k = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны в свободном пространстве. Однако, как всегда при решении задач теории колебаний этим методом, получаются разные выражения

для тока в случае настроенной (частота стороннего поля мало отличается от собственной частоты щели) и ненастроенной (когда это условие не выполняется) щелей. В нулевом (для настроенной щели) и первом (для ненастроенной щели) приближениях эти выражения соответственно имеют вид:

$$J_0(s) = C_1 \cos ks + C_2 \sin ks, \tag{2}$$

$$J_1(s) = -\alpha \frac{i\omega/k}{\sin 2kL} \left\{ \sin k(L-s) \int_{-L}^s H_{0s}(s') \sin k(L+s') ds' + \sin k(L+s) \int_s^L H_{0s}(s') \sin k(L-s') ds' \right\}.$$

Здесь ω – круговая частота, $H_{0s}(s)$ – проекция стороннего поля на ось щели. Отметим, что произвольные константы C_1 и C_2 невозможно получить непосредственно из граничных условий для тока $J(\pm L) = 0$, что также является недостатком данного метода.

Попытка распространения классического решения задачи о тонком вибраторе в свободном пространстве [13, 14] на случай произвольно ориентированной щели в широкой стенке прямоугольного волновода проведена в [11]. Результат получен методом итераций в первом приближении по α :

$$J(s) = \alpha J_0 \frac{\cos ks}{\cos kL + \alpha F(\pi/2)}, \tag{3}$$

где $\alpha = \frac{1}{2 \ln(8L/d)}$, J_0 – амплитуда тока, найденная в предположении заданного стороннего поля. Но в отличие от работ [13, 14] в [11] не найдены выражения для следующих приближений, а в функции $F(\pi/2)$, определяющей ближнее реактивное поле щели, сделано допущение $kL = \pi/2$.

В настоящей работе асимптотическим методом усреднения получено общее аналитическое выражение для тока в виде одной формулы, пригодной как для резонансной, так и

для нерезонансной щелей (или отверстий связи) без конкретизации поля сторонних источников и связываемых объемов.

Постановка задачи и решение

Рассмотрим два объема (ограниченных идеально проводящими прямолинейными поверхностями), которые связаны между собой отверстием в общей бесконечно тонкой стенке, например, как показано на рис. 1 для структуры прямоугольный волновод – полупространство (при этом для определенности будем считать, что нормаль \vec{n} направлена во “внешний” объем). Полные поля $\vec{H}^e(\vec{r})$, $\vec{H}^i(\vec{r})$ в каждом из объемов будут определяться как сумма поля сторонних источников $\vec{H}_0^e(\vec{r})$, $\vec{H}_0^i(\vec{r})$ и поля, возбуждаемого тангенциальными составляющими полей на поверхности $S_{\text{отв}}$ отверстия связи [15] (“e”, “i” – индексы, обозначающие внешний и внутренний объемы соответственно, зависимость от времени выбрана в виде $e^{i\omega t}$):

$$\vec{H}^e(\vec{r}) = \vec{H}_0^e(\vec{r}) - \frac{1}{i\omega} (\text{grad div} + k^2) \int_{S_{\text{отв}}} \hat{G}_m^e(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}^m(\vec{r}') d\vec{r}', \tag{4}$$

$$\vec{H}^i(\vec{r}) = \vec{H}_0^i(\vec{r}) + \frac{1}{i\omega} (\text{grad div} + k^2) \int_{S_{\text{отв}}} \hat{G}_m^i(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}^m(\vec{r}') d\vec{r}'.$$

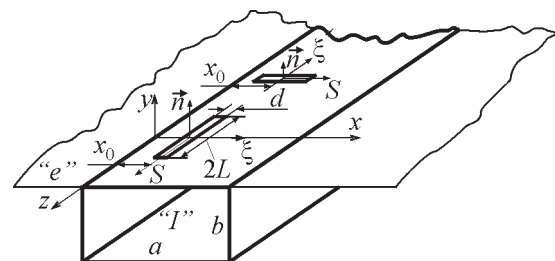


Рис. 1. Геометрия задачи

Здесь \vec{r} – радиус-вектор точки наблюдения с координатами x, y, z ; \vec{r}' – радиус-вектор точки источника с координатами x', y', z' ; $\vec{J}^m(\vec{r}')$ – поверхностная плотность магнитного тока на отверстии; $\hat{G}_m^e(\vec{r}, \vec{r}')$ и $\hat{G}_m^i(\vec{r}, \vec{r}')$ – тензорные функции Грина для векторного потенциала, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца

$$\Delta \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \hat{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (5)$$

и соответствующим условиям на границах связываемых объемов. Здесь $\hat{I} = \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z$ – единичный тензор; $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орты декартовой системы координат; $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ – дельта-функция Дирака.

Общее решение уравнения (5) можно представить следующим образом [1, 12, 15]:

$$\hat{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \hat{I}G(\vec{r}, \vec{r}') + \hat{G}_0(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (6)$$

где $G(\vec{r}, \vec{r}')$ – функция Грина свободного пространства

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (7)$$

а $\hat{G}_0(\vec{r}, \vec{r}')$ – регулярная всюду функция, удовлетворяющая однородному уравнению

$$\Delta \hat{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 \hat{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (8)$$

и обеспечивающая выполнение граничных условий на поверхности замкнутого объема для поля точечного источника, расположенного в точке \vec{r}' [15].

Воспользовавшись граничным условием непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности отверстия

$$\vec{H}_\tau^e(\vec{r})|_{s_m} = \vec{H}_\tau^i(\vec{r})|_{s_m}, \quad (9)$$

получим из (4) следующее интегро-дифференциальное уравнение для магнитного тока:

$$\begin{aligned} & (\text{grad div} + k^2) \int_{s_m} [\hat{G}_m^e(\vec{r}, \vec{r}') + \hat{G}_m^i(\vec{r}, \vec{r}')] \vec{J}^m(\vec{r}') d\vec{r}' = \\ & = -i\omega [-\vec{H}_0^e(\vec{r}) + \vec{H}_0^i(\vec{r})]. \end{aligned} \quad (10)$$

Построение функции $\hat{G}_0(\vec{r}, \vec{r}')$ в замкнутом виде возможно лишь для некоторых простейших случаев (например, полупространство над идеально проводящим бесконечным экраном), однако это обстоятельство не является существенным при выделении особенности ядра интегрального уравнения с учетом суммарных переотражений от более сложных границ. В частности, для бесконечного прямоугольного волновода (см. рис. 1) магнитная функция Грина имеет вид [15]:

$$\begin{aligned} \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}') = 2\pi \sum_{m,n} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{abk_z} e^{-k_z|z-z'|} & \left[(\vec{e}_x \otimes \vec{e}_x) \sin(k_x x) \times \right. \\ & \times \sin(k_x x') \cos(k_y (y+b)) \cos(k_y (y'+b)) + \\ & + (\vec{e}_y \otimes \vec{e}_y) \cos(k_x x) \cos(k_x x') \sin(k_y (y+b)) \times \\ & \times \sin(k_y (y'+b)) + (\vec{e}_z \otimes \vec{e}_z) \cos(k_x x) \times \\ & \left. \cos(k_x x') \cos(k_y (y+b)) \cos(k_y (y'+b)) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где ϵ_m и ϵ_n – множители Неймана ($\epsilon_{m,n} = 1$ при $m, n = 0$; $\epsilon_{m,n} = 2$ при $m, n \neq 0$); a и b – размеры поперечного сечения волновода;

$k_x = \frac{m\pi}{a}$, $k_y = \frac{n\pi}{b}$, $k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$ (m, n – целые числа).

Уравнение (10) в общем случае достаточно сложно для непосредственного анализа, однако в случае узких щелей оно заметно упрощается.

Пусть отверстие связи двух объемов представляет собой узкую щель (в общем случае криволинейной осевой конфигурации), размеры которой подчиняются следующим неравенствам:

$$\frac{d}{2L} \ll 1, \quad \frac{d}{\lambda} \ll 1. \quad (12)$$

Так как поперечный размер щели мал по сравнению с λ , то напряженность стороннего поля в плоскости щели можно считать независимой от ξ (ξ – поперечная координата, связанная со щелью). Под действием этого поля в щели будет течь только продольный магнитный ток (по крайней мере величина поперечного тока $\sim d/\lambda$), распределенный с некоторой плотностью, которую представим в виде (индекс “ m ” опускаем):

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{e}_s J(s) \chi(\xi), \quad (13)$$

где $\chi(\xi)$ – нормированная функция поперечной координаты,

$$\int_{\xi} \chi(\xi) d\xi = 1; \quad (14)$$

$\vec{e}_s, \vec{e}_{s'}$ (встречается далее) – единичные орты касательных к осевой линии щели в точках s и s' .

Таким образом, задача о нахождении $\vec{J}(\vec{r})$ по заданному полю $\{-\vec{H}_0^e(\vec{r}) + \vec{H}_0^i(\vec{r})\}$ свелась к определению функции распределения тока $J(s)$. Подставляя (13) в (10), после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} & \int_L \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial J(s')}{\partial s'} + k^2 (\vec{e}_s \vec{e}_{s'}) J(s') \right] 2G(s, s') + \right. \\ & \left. + J(s') \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right] \vec{e}_s \left[(\hat{G}_0^e(s, s') \vec{e}_{s'}) + (\hat{G}_0^i(s, s') \vec{e}_{s'}) \right] \right\} ds' = \\ & = -i\omega \left[-H_{0s}^e(s) + H_{0s}^i(s) \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

Здесь

$$G(s, s') = \int_{\xi} G(s, \xi; s', \xi') \chi(\xi') d\xi', \quad (16)$$

$$\hat{G}_0(s, s') = \int_{\xi} \hat{G}_0(s, \xi; s', \xi') \chi(\xi') d\xi'.$$

Уравнение (15) справедливо, когда радиус кривизны средней линии щели велик по сравнению с ее поперечным размером.

Не теряя общности подхода к решению задачи, рассмотрим случай прямолинейной щели $(\vec{e}_s \vec{e}_{s'}) = 1$, когда стороннее поле во внешнем объеме отсутствует $H_{0s}^e(s) = 0$. Тогда из (15) получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{ds^2} + k^2 \right) \int_{-L}^L J(s') \left[G_s^e(s, s') + G_s^i(s, s') \right] ds' = \\ & = -i\omega H_{0s}^i(s). \quad (17) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_s^e(s, s') &= 2 \frac{e^{-ikR(s, s')}}{R(s, s')} + G_{0s}^e(s, s'), \\ G_s^i(s, s') &= 2 \frac{e^{-ikR(s, s')}}{R(s, s')} + G_{0s}^i(s, s'), \quad (18) \end{aligned}$$

$$R(s, s') = \sqrt{(s - s')^2 + (d/4)^2}.$$

Отметим, что в ядре интегрального уравнения (17) использовано приближенное выражение для R , т. е. зависимость от поперечных координат выбрана в виде $(\xi - \xi')^2 \cong (d/4)^2$, как это принято в теории вибраторных [14] и щелевых [9] антенн.

Строгое решение уравнения (17) в замкнутом виде получить не удастся, однако из этого не следует, что истинное распределение тока нельзя достаточно хорошо аппроксимировать приближенным решением. Для нахождения последнего воспользуемся асимптотическим методом усреднения, эффективность которого применительно к краевым задачам электродинамики показана в работах [16, 17].

На поверхности щели ядро интегрального уравнения (17) имеет особенность квазистационарного типа. Выделим ее, используя малость поперечного размера щели по сравне-

нию с ее длиной и длиной волны, для чего перепишем уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{ds^2} + k^2 \right) \int_{-L}^L J(s') 4 \frac{e^{-ikR}}{R} ds' = \\ & = -i\omega H_{0s}(s) - \left(\frac{d^2}{ds^2} + k^2 \right) \int_{-L}^L J(s') [G_{0s}^e + G_{0s}^i] ds'. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & 4 \int_{-L}^L J(s') \frac{e^{-ikR}}{R} ds' = \\ & = 4\Omega(s)J(s) + 4 \int_{-L}^L \frac{J(s')e^{-ikR} - J(s)}{R} ds', \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\Omega(s) = \int_{-L}^L \frac{ds'}{\sqrt{(s-s')^2 + (d/4)^2}}. \quad (21)$$

Первое слагаемое в правой части (20) логарифмически велико по сравнению со вторым регулярным членом, а функция $\Omega(s)$ отличается от своего среднего значения $\bar{\Omega}(s) = 2\ln(8L/d) - 0.614$ лишь на краях щели, где ток исчезает

$$J(\pm L) = 0. \quad (22)$$

С учетом этого уравнение для тока в узкой щели, связывающей два объема, сводится к интегро-дифференциальному уравнению с малым параметром:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 J(s)}{ds^2} + k^2 J(s) = \alpha \{ i\omega H_{0s}(s) + F[s, J(s)] + \\ & + F_0[s, J(s)] \}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\alpha = \frac{1}{8\ln(d/8L)}$ – логарифмический параметр малости ($|\alpha| \ll 1$), $H_{0s}(s)$ – продольная составляющая поля сторонних источников на оси щели,

$$\begin{aligned} & F[s, J(s)] = 4 \left[J(s) \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) + 2 \frac{dJ(s)}{ds} \frac{1}{R} - \right. \\ & \left. - \frac{dJ(s')}{ds'} \frac{e^{-ikR}}{R} \Big|_{-L}^L \right] + 4 \int_{-L}^L \left[\left[\frac{d^2 J(s')}{ds'^2} + k^2 J(s') \right] \frac{e^{-ikR}}{R} - \right. \\ & \left. - \left[\frac{d^2 J(s)}{ds^2} + k^2 J(s) \right] \right] \frac{1}{R} ds' - \end{aligned} \quad (24)$$

собственное поле щели в бесконечном экране,

$$\begin{aligned} & F_0[s, J(s)] = - \frac{dJ(s')}{ds'} [G_{0s}^e + G_{0s}^i] \Big|_{-L}^L + \\ & + \int_{-L}^L \left[\frac{d^2 J(s')}{ds'^2} + k^2 J(s') \right] [G_{0s}^e + G_{0s}^i] ds' - \end{aligned} \quad (25)$$

собственное поле щели, многократно отраженное от стенок связываемых объемов.

Приближенное решение уравнения (23) будем искать в виде [16]:

$$J(s) = A(s) \cos ks + B(s) \sin ks, \quad (26)$$

где $A(s)$ и $B(s)$ – неизвестные функции. При этом (23) переходит в следующую эквивалентную систему уравнений относительно $A(s)$ и $B(s)$:

$$\frac{dA(s)}{ds} = - \frac{\alpha}{k} \{ i\omega H_{0s}(s) + F_N[s, A(s), B(s)] \} \sin ks, \quad (27)$$

$$\frac{dB(s)}{ds} = + \frac{\alpha}{k} \{ i\omega H_{0s}(s) + F_N[s, A(s), B(s)] \} \cos ks,$$

где $F_N = F + F_0$ – суммарное собственное поле щели.

Произведя в (27) согласно [16] частичное усреднение по переменной s , получим уравнения первого приближения (термин “частичное” в данном случае обозначает воздействие оператором усреднения только на собственное поле щели, что возможно [18] для систем вида (27)):

$$\frac{d\bar{A}(s)}{ds} = -\alpha \left\{ \frac{i\omega}{k} H_{0s}(s) + \bar{F}_N [s, \bar{A}, \bar{B}] \right\} \sin ks, \quad (28)$$

$$\frac{d\bar{B}(s)}{ds} = +\alpha \left\{ \frac{i\omega}{k} H_{0s}(s) + \bar{F}_N [s, \bar{A}, \bar{B}] \right\} \cos ks.$$

Здесь усредненное собственное поле щели \bar{F}_N имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{F}_N [s, \bar{A}, \bar{B}] &= \\ &= [\bar{A}(+L) \sin kL - \bar{B}(+L) \cos kL] G_{\Sigma}(s, L) + \\ &+ [\bar{A}(-L) \sin kL + \bar{B}(-L) \cos kL] G_{\Sigma}(s, -L), \end{aligned} \quad (29)$$

$$G_{\Sigma}(s, s') = G_s^e(s, s') + G_s^i(s, s').$$

Решая систему (28) и подставляя найденные значения $\bar{A}(s)$ и $\bar{B}(s)$ в качестве аппроксимирующих функций для $A(s)$ и $B(s)$ в (26), получим общее асимптотическое выражение для тока в узкой щели при произвольном ее возбуждении:

$$\begin{aligned} J(s) &= \bar{A}(-L) \cos ks + \bar{B}(-L) \sin ks + \\ &+ \alpha \int_{-L}^s \left\{ \frac{i\omega}{k} H_{0s}(s') + \bar{F}_N [s', \bar{A}, \bar{B}] \right\} \sin k(s-s') ds'. \end{aligned} \quad (30)$$

Для определения постоянных $\bar{A}(\pm L)$ и $\bar{B}(\pm L)$ необходимо использовать краевые ус-

ловия (22) и условия симметрии [14], которые связаны как со способом возбуждения щели, так и с ее положением относительно стенок связываемых объемов.

1. Симметричные условия: $J(s) = J(-s) = J^s(s)$. В этом случае $H_{0s}(s) = H_{0s}^s(s)$ и для постоянных интегрирования выполняются следующие соотношения:

$$\bar{A}(-L) = \bar{A}(+L) = C_1, \quad (31)$$

$$\bar{B}(-L) = -\bar{B}(+L) = C_2.$$

Подставляя (31) в (30), с точностью до членов второго порядка малости получаем

$$\begin{aligned} J^s(s) &= -\alpha \left(\frac{i\omega}{k} \right) \left\{ \frac{\sin k(L-s) \int_{-L}^s H_{0s}^s(s') \sin k(L+s') ds'}{\sin 2kL + \alpha N_s(kd, 2kL)} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sin k(L+s) \int_{-L}^L H_{0s}^s(s') \sin k(L-s') ds'}{\sin 2kL + \alpha N_s(kd, 2kL)} \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} N_s(kd, 2kL) &= \\ &= \int_{-L}^L [G_{\Sigma}(s, -L) + G_{\Sigma}(s, L)] \sin k(L-s) ds - \end{aligned} \quad (33)$$

функция собственного поля щели, определяемая суммой симметричных составляющих (18) (с учетом (29)), взятых на концах интервала $[-L, L]$.

2. Антисимметричные условия: $J(s) = -J(-s) = J^a(s)$. В этом случае $H_{0s}(s) = H_{0s}^a(s)$ и между постоянными интегрирования выполняются следующие соотношения:

$$\bar{A}(-L) = -\bar{A}(+L) = C_1, \quad (34)$$

$$\bar{B}(-L) = \bar{B}(+L) = C_2.$$

Подставляя (34) в (30), с точностью до членов второго порядка малости получаем

$$J^a(s) = -\alpha \left(\frac{i\omega}{k} \right) \left\{ \frac{\sin k(L-s) \int_{-L}^s H_{0s}^a(s') \sin k(L+s') ds'}{\sin 2kL + \alpha N_a(kd, 2kL)} + \frac{\sin k(L+s) \int_s^L H_{0s}^a(s') \sin k(L-s') ds'}{\sin 2kL + \alpha N_a(kd, 2kL)} \right\}, \quad (35)$$

где

$$N_a(kd, 2kL) = \int_{-L}^L [G_\Sigma(s, -L) - G_\Sigma(s, L)] \sin k(L-s) ds - \quad (36)$$

функция собственного поля щели, определяемая разностью антисимметричных составляющих (18) (с учетом (29)), взятых на концах интервала $[-L, L]$.

Следует подчеркнуть, что найденные асимптотические выражения для тока, в отличие от формулы (2), справедливы как для настроенной ($\sin 2kL = 0$), так и для ненастроенной ($\sin 2kL \neq 0$) щелей. Это обусловлено наличием в (32) и (35) функций собственного поля $N_s(kd, 2kL)$ и $N_a(kd, 2kL)$, которые (в отличие от [9, 10, 12]) удалось получить методом усреднения уже в первом приближении.

Продольная щель в широкой стенке прямоугольного волновода

Пусть связываемые объемы представляют собой (рис. 1) полупространство над идеально проводящим бесконечно тонким экраном (внешний объем) и прямоугольный волновод (внутренний объем), в котором может распространяться только волна основного типа ($a < \lambda < 2a$, $a > 2b$; экран является продолжением широкой стенки волновода). Тогда

$$H_{0s}(s) = H_{0s}^s + H_{0s}^a(s) = H_0 \cos \frac{\pi x_0}{a} (\cos \gamma s - i \sin \gamma s). \quad (37)$$

Здесь H_0 – амплитуда падающей из $z = -\infty$ волны, x_0 – расстояние от узкой стенки волновода до осевой линии щели, $\gamma = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}$. Наведенный в щели ток будет равняться сумме симметричной и антисимметричной составляющих $J(s) = J^s(s) + J^a(s)$, которые согласно (32) и (35) имеют вид:

$$J^s(s) = -\alpha H_0 \frac{i\omega \cos \frac{\pi x_0}{a} (\cos ks \cos \gamma L - \cos kL \cos \gamma s)}{(\pi/a)^2 [\cos kL + \alpha N_s(kd, kL)]}, \quad (38)$$

$$J^a(s) = -\alpha H_0 \frac{\omega \cos \frac{\pi x_0}{a} (\sin ks \sin \gamma L - \sin kL \sin \gamma s)}{(\pi/a)^2 [\sin kL + \alpha N_a(kd, kL)]}. \quad (39)$$

В выражениях (38), (39) принято во внимание, что

$$N_s(kd, 2kL) = 2 \sin kL N_s(kd, kL),$$

$$N_a(kd, 2kL) = 2 \cos kL N_a(kd, kL),$$

а функции собственного поля щели:

$$N_s(kd, kL) = 2P_s(kd, kL) + W_s(kd, kL) \text{ и}$$

$$N_a(kd, kL) = 2P_a(kd, kL) + W_a(kd, kL)$$

получены согласно (33) и (36) (для полупространства и прямоугольного волновода соответственно):

$$P_s(kd, kL) = \cos kL [Cc_i(kd, 2kL) - iSc(kd, 2kL)] + \sin kL [Cs(kd, 2kL) - iSs(kd, 2kL)], \quad (40)$$

$$P_a(kd, kL) = \sin kL [Cc_i(kd, 2kL) - iSc(kd, 2kL)] - \cos kL [Cs(kd, 2kL) - iSs(kd, 2kL)], \quad (41)$$

$$W_s(kd, kL) = \frac{4\pi}{ab} \sum_{m,n} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{k_z (k_x^2 + k_y^2)} \cos k_x x_0 \times \\ \times \cos k_x \left(x_0 + \frac{d}{4} \right) e^{-k_z L} [k_z \cos kL \text{sh} k_z L + k \sin kL \text{ch} k_z L], \quad (42)$$

$$W_a(kd, kL) = \frac{4\pi}{ab} \sum_{m,n} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{k_z (k_x^2 + k_y^2)} \cos k_x x_0 \times \\ \times \cos k_x \left(x_0 + \frac{d}{4} \right) e^{-k_z L} [k_z \sin kL \text{ch} k_z L - k \cos kL \text{sh} k_z L]. \quad (43)$$

Здесь C_s, S_c, C_s, S_s – обобщенные интегральные функции [14], связь которых с интегральными синусом и косинусом приведена в Приложении.

Выражения для коэффициентов отражения S_{11} , прохождения S_{12} и излучения $|S_\Sigma|^2$ основной волны находятся согласно (4) и имеют следующий вид:

$$S_{11} = -e^{2i\gamma c} \alpha \frac{4\pi \cos^2 \frac{\pi x_0}{a}}{iabk\gamma} \times \\ \times \left\{ \frac{f_s(kL, \gamma L)}{\cos kL + \alpha N_s(kd, kL)} + \frac{f_a(kL, \gamma L)}{\sin kL + \alpha N_a(kd, kL)} \right\}, \quad (44)$$

$$S_{12} = 1 - \alpha \frac{4\pi \cos^2 \frac{\pi x_0}{a}}{iabk\gamma} \times \\ \times \left\{ \frac{f_s(kL, \gamma L)}{\cos kL + \alpha N_s(kd, kL)} - \frac{f_a(kL, \gamma L)}{\sin kL + \alpha N_a(kd, kL)} \right\}, \quad (45)$$

$$|S_\Sigma|^2 = 1 - |S_{11}|^2 - |S_{12}|^2, \quad (46)$$

где

$$f_s(kL, \gamma L) = 2 \cos \gamma L \frac{\sin kL \cos \gamma L - (\gamma/k) \cos kL \sin \gamma L}{1 - (\gamma/k)^2} - \\ - \frac{\cos kL}{2(\gamma/k)} (\sin 2\gamma L + 2\gamma L), \quad (47)$$

$$f_a(kL, \gamma L) = 2 \sin \gamma L \frac{\cos kL \sin \gamma L - (\gamma/k) \sin kL \cos \gamma L}{1 - (\gamma/k)^2} - \\ - \frac{\sin kL}{2(\gamma/k)} (\sin 2\gamma L - 2\gamma L). \quad (48)$$

Отметим, что если внешний объем представляет собой прямоугольный волновод (или резонатор), то в выражениях (38), (39) следует произвести замены $2P_s \rightarrow W_s$, $2P_a \rightarrow W_a$, где W_s , W_a – функции собственного поля щели во внешнем волноводе, который в общем случае может иметь другие поперечные размеры или соединяться с внутренним волноводом по узкой стенке.

Поперечная щель в широкой стенке прямоугольного волновода

В этом случае проекция стороннего поля на ось щели

$$H_{0s}(s) = H_0 \sin \frac{\pi}{a} (x_0 + s), \quad (49)$$

где x_0 – смещение центра щели от узкой стенки волновода (рис. 1). Тогда выражение для тока с учетом как симметричной, так и антисимметричной составляющих приобретает вид:

$$J(s) = -\alpha H_0 \frac{2i\omega/\gamma^2}{\sin 2kL + \alpha [2P_0(kd, 2kL) + W_0(kd, 2kL)]} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\sin \frac{\pi x_0}{a} \sin kL \left(\cos ks \cos \frac{\pi L}{a} - \cos kL \cos \frac{\pi s}{a} \right) + \right. \\ & \left. + \cos \frac{\pi x_0}{a} \cos kL \left(\sin ks \sin \frac{\pi L}{a} - \sin kL \sin \frac{\pi s}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_0(kd, 2kL) = & \sin 2kL [Cc_i(kd, 2kL) - iSc(kd, 2kL)] + \\ & + 2\sin^2 kL [Cs(kd, 2kL) - iSs(kd, 2kL)], \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} W_0(kd, 2kL) = & \frac{8\pi}{ab} \sum_{m,n} \frac{\epsilon_n}{k_z(k^2 - k_x^2)} e^{-k_z d/4} \cos k_x L \times \\ & \times \left[2\sin kL \sin^2 k_x x_0 (k \sin kL \cos k_x L - k_x \cos kL \sin k_x L) + \right. \\ & \left. + \cos kL \sin 2k_x x_0 (k \cos kL \sin k_x L - k_x \sin kL \cos k_x L) \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

При $x_0 = a/2$ антисимметричная составляющая исчезает и формулы (50)-(52) заметно упрощаются:

$$J(s) = -\alpha H_0 \frac{i\omega \left(\cos ks \cos \frac{\pi L}{a} - \cos kL \cos \frac{\pi s}{a} \right)}{\gamma^2 [\cos kL + \alpha N_s(kd, kL)]}, \quad (53)$$

$$N_s(kd, kL) = 2P_s(kd, kL) + W_s(kd, kL), \quad (54)$$

$$\begin{aligned} W_s(kd, kL) = & \frac{8\pi}{ab} \sum_{m,n} \frac{\epsilon_n}{k_z(k^2 - k_x^2)} e^{-k_z d/4} \cos k_x L \times \\ & \times \sin^2 \frac{m\pi}{2} (k \sin kL \cos k_x L - k_x \cos kL \sin k_x L), \end{aligned} \quad (55)$$

а выражение для $P_s(kd, kL)$ тождественно совпадает с (40).

Для коэффициентов отражения и прохождения в данном случае получаются следующие выражения:

$$S_{11} = -e^{2i\gamma z} \alpha \frac{4\pi f_s \left(kL, \frac{\pi L}{a} \right)}{iabk\gamma [\cos kL + \alpha N_s(kd, kL)]}, \quad (56)$$

$$S_{12} = 1 - \alpha \frac{4\pi f_s \left(kL, \frac{\pi L}{a} \right)}{iabk\gamma [\cos kL + \alpha N_s(kd, kL)]}, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} f_s \left(kL, \frac{\pi L}{a} \right) = & \\ = 2\cos \frac{\pi L}{a} \frac{\sin kL \cos \frac{\pi L}{a} - \frac{\pi}{ka} \cos kL \sin \frac{\pi L}{a}}{1 - (\pi/ka)^2} - & \\ - \frac{\cos kL}{(2\pi/ka)} \left(\sin \frac{2\pi L}{a} + \frac{2\pi L}{a} \right), & \end{aligned} \quad (58)$$

и $|S_\Sigma|^2$ определяется согласно (46).

Численные результаты

С целью проверки достоверности полученных аналитических выражений для тока на их основе были рассчитаны зависимости коэффициентов излучения $|S_\Sigma|^2$ продольной (рис. 2) и поперечной (рис. 3) щелей от их длины (сплошные кривые) в прямоугольном волноводе при следующих параметрах: $a = 22.86$ мм, $b = 10.16$ мм, $d = 1.5$ мм, $\lambda = 30$ мм. Здесь же приведены значения, полученные численным методом моментов (пунктирные кривые) согласно работе [2]. Как видно, совпадение кривых для определенных длин щелей достаточно хорошее, особенно вблизи резонанса ($kL \cong \pi/2$). В этом случае $\cos kL \cong 0$ и основной вклад в амплитуду тока вносят функции собственного поля щели $P(kd, kL)$ и $W(kd, kL)$, учитывающие нело-

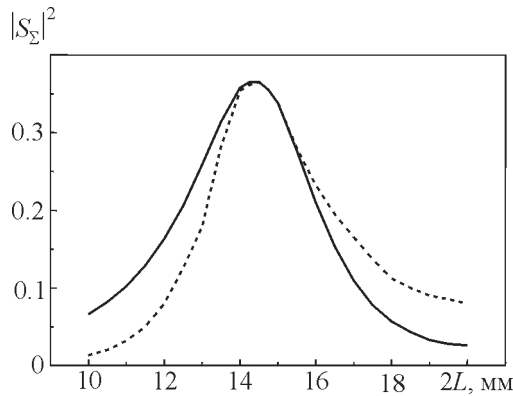


Рис. 2. Коэффициент излучения продольной щели в широкой стенке прямоугольного волновода при $x_0 = 2.0$ мм: — метод усреднения, --- метод моментов [2]

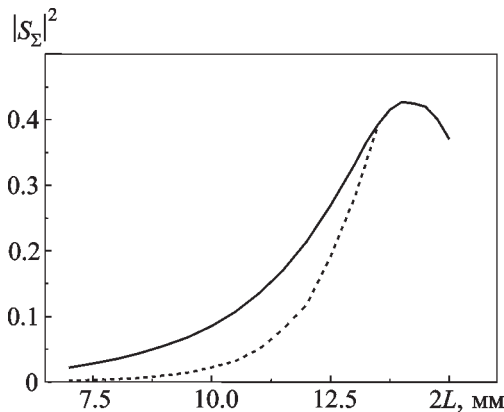


Рис. 3. Коэффициент излучения поперечной щели в широкой стенке прямоугольного волновода при $x_0 = a/2$: — метод усреднения, --- метод моментов [2]

кальные эффекты, связанные с рассеянием (излучением) электромагнитных волн. Различия в значениях $|S_Σ|^2$ для коротких щелей объясняется, очевидно, уменьшением отношения $2L/d$ и соответственно возрастанием параметра α .

В заключение отметим, что учет конечной толщины стенки между связываемыми объемами можно произвести согласно [8], вводя

понятие эффективной ширины щели $d_{\text{эфф}}$, справедливое при $(h/d) \geq 1$ и $(h/\lambda) \ll 1$:

$$d_{\text{эфф}} = d \left(\frac{8}{\pi e} e^{-\frac{\pi h}{2d}} \right), \quad (59)$$

где h – толщина стенки.

Выводы

1. Найденное асимптотическое решение интегрального уравнения относительно магнитного тока в щелевых излучателях и отверстиях связи позволяет уже в первом приближении получить аналитические выражения для тока, справедливые (в отличие от известных решений) при любых соотношениях между длиной волны и продольным размером щели.

2. Приведенные численные результаты показывают достоверность и эффективность данного решения.

3. Полученное решение без особых принципиальных трудностей может быть распространено на щели, расположенные под углом к стенкам волновода, криволинейные щели, а также систему щелей.

Приложение.

Обобщенные интегральные функции

$$Cc_i(A, u) = \int_0^u \frac{\cos W}{W} \cos u du = \ln \frac{W+u}{A} -$$

$$-\frac{1}{2} [\text{Cin}(W+u) - \text{Cin}(W-u)].$$

$$Sc(A, u) = \int_0^u \frac{\sin W}{W} \cos u du =$$

$$= \frac{1}{2} [\text{Si}(W+u) - \text{Si}(W-u)].$$

$$\begin{aligned} \text{Cs}(A, u) &= \int_0^u \frac{\cos W}{W} \sin u \, du = \\ &= \frac{1}{2} [\text{Si}(W + u) + \text{Si}(W - u)] - \text{Si} A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ss}(A, u) &= \int_0^u \frac{\sin W}{W} \sin u \, du = \\ &= \frac{1}{2} [\text{Cin}(W + u) + \text{Cin}(W - u)] - \text{Cin} A. \end{aligned}$$

Здесь $W = \sqrt{u^2 + A^2}$, $\text{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin u}{u} \, du$,

$$\text{Cin}(u) = \int_0^u \frac{1 - \cos u}{u} \, du.$$

Литература

1. В. М. Репин. ЖВММФ. 1971, **11**, №1, с. 152-163.
2. R. W. Lyon, A. J. Sangster. IEE Proc. 1981, **128**, ртН, No. 4, pp. 197-205.
3. V. A. Katrich. Telecommunications and Radio Engineering. 1999, **53**, No. 4-5, pp. 83-87.
4. А. И. Жакин, В. А. Катрич, С. А. Мартыненко. Вісник Дніпропетровського університету. Фізика. Радіоелектроніка. 2000, Вип. 6, с. 89-99.
5. Н. Н. Горобец, А. В. Жиронкина, В. А. Катрич, В. А. Лященко, Л. П. Яцук. В сб. Научно-метод. статьи по прикладной электродинамике. 1983, Вып. 5, с. 150-188.
6. A. A. Oliner. IRE Trans. Antennas Propag. 1957, **AP-5**, No. 1, pp. 4-20.
7. И. Б. Левинсон, П. Ш. Фридберг. Радиотехника и электроника. 1965, **10**, №2, с. 260-268.
8. X. Л. Гарб, И. Б. Левинсон, П. Ш. Фридберг. Радиотехника и электроника. 1968, **13**, №12, с. 2152-2161.
9. М. Леонтович. ЖЭТФ. 1946, **16**, Вып. 6, с. 474-479.
10. Я. Н. Фельд. ЖТФ. 1947, **17**, Вып. 9, с. 1051-1065.
11. A. F. Stevenson. J. of Appl. Phys. 1948, **19**, No. 1, pp. 24-38.
12. М. Н. Левин. ЖТФ. 1951, **21**, Вып. 7, с. 787-794.
13. E. Hallen. Nova Acta Reg. Soc. Sci. Ups. 1938, ser. IV, **2**, No. 4, pp. 1-44.
14. R. W. P. King. The Theory of Linear Antennas. Cambr.-Mass., Harv. Univ. Press, 1956, 944 p.
15. Н. А. Хижняк. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев, Наукова думка, 1986, 280 с.
16. Н. Н. Горобец, В. А. Петленко, Н. А. Хижняк. В сб.: Научно-метод. статьи по прикладной электродинамике. 1983, Вып. 6, с. 84-110.
17. М. В. Нестеренко, В. А. Петленко. Изв. вузов. Радиофизика. 1984, **27**, №3, с. 356-362.
18. А. Н. Филатов. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент, ФАН, 1974, 216 с.

Asymptotic Solution of Integral Equation for Magnetic Current in Radiating Slots and in Coupling Apertures

V. A. Katrich, M. V. Nesterenko, N. A. Khizhnyak

On the basis of the asymptotic method of averaging the approximate analytical solution of the integral equation relatively to the magnetic current in radiating slots and in coupling apertures of electromagnetic volumes was obtained. The expressions are presented for currents and characteristics of scattering (radiation) of the longitudinal and transverse slots in the broad wall of a rectangular waveguide. The comparison with results obtained by numerical method was carried out.