

Линейные и нелинейные волны (элементарное введение в теорию гамильтоновых переменных с приложениями к физике и астрофизике)

В. М. Конторович

*Радиоастрономический институт НАН Украины,
Украина, 61002, Харьков, ул. Краснознаменная, 4
E-mail: vkont@ira.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 16 июля 2000 г., после переработки 28 августа 2001 г.

На примере волн в объеме и на поверхности жидкости вводятся гамильтоновы переменные для сплошных сред, широко используемые в настоящее время в физике плазмы, гидродинамике и теории поля. Рассмотрены регулярные способы введения таких переменных, в том числе в средах с разрывами, с помощью вариационного принципа и канонических преобразований. Метод обратной задачи рассеяния приведен как нетривиальный пример канонического преобразования к переменным “действие-угол”. Приведены примеры линейных и нелинейных неустойчивостей. Настоящая публикация представляет собой первую часть обзора.

Вторая часть обзора будет посвящена кинетическим уравнениям, используемым при описании слабой турбулентности, в том числе точным методам получения неравновесных потоковых распределений. Описаны применения кинетического уравнения Смолуховского к рассмотрению процессов слияния галактик и формирования их спектра масс. Рассмотрены также нелокальные распределения и частично когерентные системы.

На прикладі хвиль в об'ємі та на поверхні рідини вводяться гамільтонові змінні для суцільних середовищ, широко використовувані в нинішній час у фізиці плазми, гідродинаміці та теорії поля. Розглянуто регулярні засоби введення таких змінних, у тому числі в середовищах з розривами, за допомогою варіаційного принципу та канонічних перетворень. Засіб зворотного розсіяння наведений як нетривіальний зразок канонічного перетворення до змінних “дія-кут”. Наведено приклади лінійних та нелінійних нестійкостей. Ця публікація є першою частиною огляду.

Друга частина огляду буде присвячена кінетичним рівнянням, що використовуються для опису слабкої турбулентності, в тому числі точним засобам отримання нерівноважних потокових розподілів. Описано застосування кінетичного рівняння Смолуховського до розгляду процесів злиття галактик і формування їх спектру мас. Розглянуто також нелокальні розподіли та частково когерентні системи.

Содержание

Часть I. Динамический подход

- 1. Звуковые волны (случай отсутствия дисперсии)*
- 2. Волны на поверхности тяжелой жидкости – пример дисперсии*

3. Волны на поверхности раздела и линейные неустойчивости

- а) Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца*
- б) Ветровая неустойчивость*

4. Гамильтоновы уравнения для движений поверхности жидкости

К внутренней энергии ϵ могут быть добавлены слагаемые, описывающие потенциальные силы, например, силу тяжести, символически выписанную в (6.1), которую ниже мы будем опускать.

Введем канонические переменные, учитывая (неинтегрируемые) связи (6.2), (6.3) методом Лагранжа. Связи вносят в лагранжиан – плотность функции Лагранжа – необходимые временные и пространственные производные

$$L \rightarrow L' = L + \varphi(\dot{\rho} + \text{div}(\rho\mathbf{v})) + \sigma \frac{ds}{dt}, \quad (6.5)$$

Варьируя действие (6.4) с лагранжевой плотностью (6.5) независимо по \mathbf{v} , ρ и s , получаем представление скорости через ГП и уравнения (которые мы выпишем ниже в более общем случае). Варьирование по φ и σ воспроизводит связи (6.2), (6.3). Поскольку действие не содержит ускорения, обобщенный импульс, сопряженный скорости, равен нулю. Варьирование по скорости приводит к явному выражению для скорости, причем для простейшего изэнтропического случая ($\sigma = 0$) приходим к чисто потенциальному течению:

$$\frac{\delta A}{\delta \mathbf{v}} = 0 \rightarrow \mathbf{v} = \nabla \varphi.$$

Лагранжев множитель при связи, выражающей закон сохранения массы, оказался ничем иным, как потенциалом скорости⁷, а это означает, что плотность ρ и потенциал φ являются канонически сопряженными переменными [6а]. Мы используем это обстоятельство ниже в более сложном случае непотенциального движения, вводя объемные векторные потенциалы Клебша, а также поверхностные ГП.

⁷Ограничение чисто потенциальным движением возникло потому, что мы не использовали в качестве дополнительных связей законы сохранения, отражающие наличие вихревой компоненты, например, сохранение циркуляции скорости.

Канонические переменные

Нетрудно записать теперь уравнения (6.1) – (6.3) (для рассматриваемого случая) в гамильтоновом виде:

$$\frac{\delta A}{\delta \varphi} = 0 \rightarrow \dot{\rho} = \frac{\delta H}{\delta \varphi}, \quad \frac{\delta A}{\delta \rho} = 0 \rightarrow \dot{\varphi} = -\frac{\delta H}{\delta \rho}; \quad (6.6)$$

$$H = \int d\mathbf{r} H, \quad H = p\dot{q} - L = \varphi\dot{\rho} - L. \quad (6.7)$$

При этом обобщенные координаты q и импульсы p равны: $q = (\rho, \mathbf{v})$, $p = (\varphi, 0)$, а H – плотность функции Гамильтона, переход к которой чувствителен к наличию в лагранжиане производной по времени от обобщенной координаты. В дальнейшем вырожденную пару $(\mathbf{v}, 0)$ будем опускать, а скорость выражать через остальные ГП.

Векторный потенциал

Попытаемся ввести векторные канонические переменные аналогично тому, как выше был введен скалярный потенциал, но используя в качестве дополнительной связи сохранение импульса [6h]:

$$L' = L + \varphi(\dot{\rho} + \text{div} \rho\mathbf{v}) + A_l(\partial_l \rho v_l + \partial_m \Pi_{lm}), \quad (6.8)$$

$$\Pi_{lm} = \rho v_l v_m + p \delta_{lm}.$$

Варьирование по \mathbf{v} приводит к

$$\delta \mathbf{v}: \quad v_l = A_l + (\mathbf{v}\nabla)A_l + v_m \partial_l A_m + \partial_l \varphi.$$

Или, разрешая полученное соотношение относительно скорости, имеем:

$$K_{lm} v_m = \partial_l \varphi + A_l, \quad (6.9)$$

$$K_{lm} \equiv \delta_{lm} - \partial_m A_l - \partial_l A_m.$$

Таким образом, множитель Лагранжа при связи, выражающей сохранение импульса, оказался векторным потенциалом скорости. Его роль в гидродинамике в силу нелинейности уравнений, однако, несравненно менее значительна, чем в электродинамике. Для данного случая обобщенные координаты и импульсы равны: $(\rho, \rho \mathbf{v})$ – координата, (ϕ, \mathbf{A}) – импульс.

Векторные переменные Клебша

Для того чтобы ввести в лагранжиан необходимую производную по времени, представим скорость естественным образом как полную производную смещения:

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\xi}} + (\mathbf{v}\nabla)\boldsymbol{\xi}. \quad (6.10)$$

В качестве одной из обобщенных координат выберем плотность импульса $\boldsymbol{\pi} \equiv \rho \mathbf{v}$, а (6.10) используем в качестве дополнительного условия (связи) с лагранжевым множителем \mathbf{Q} :

$$L' = L + \phi(\dot{\rho} + \text{div } \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{Q}(\rho\dot{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{\pi}\nabla)\boldsymbol{\xi}). \quad (6.11)$$

Аналогично предыдущему, варьирование по $\boldsymbol{\pi}$ дает нам выражение для скорости через ГП. В результате варьирования получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\pi}}: \quad \mathbf{v} &= \nabla \phi + \mathbf{Q} - Q_m \nabla \xi_m, \\ \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\xi}}: \quad \partial_t(\rho Q_t) + \partial_m(Q_t \pi_m) &= 0, \\ \frac{\delta}{\delta \mathbf{Q}}: \quad \rho \dot{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{\pi}\nabla)\boldsymbol{\xi} &= 0, \quad (6.12) \\ \frac{\delta}{\delta \rho}: \quad \dot{\phi} - \left(\frac{\pi^2}{2\rho} + w \right) + \mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\xi}} &= 0, \\ \frac{\delta}{\delta \phi}: \quad \dot{\rho} + \text{div } \boldsymbol{\pi} &= 0. \end{aligned}$$

Видно, что $(\rho, \boldsymbol{\xi})$ – обобщенная координата, $(\phi, \rho \mathbf{Q})$ – сопряженный импульс. Теперь легко строится гамильтониан

$$H = \phi \dot{\rho} + \rho \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\xi}} - L' \quad (6.13)$$

и выписываются канонические уравнения:

$$\dot{\rho} = \frac{\delta H}{\delta \phi}, \quad \dot{\phi} = -\frac{\delta H}{\delta \rho}; \quad (6.14)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\delta H}{\delta(\rho \mathbf{Q})}, \quad \partial_t(\rho \mathbf{Q}) = -\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{\xi}}. \quad (6.15)$$

Произведем теперь сдвиг на радиус-вектор (каноническое преобразование), введя новую координату $\boldsymbol{\mu}$, которая соответствует сохраняющейся лагранжевой координате частицы как функции ее текущей координаты,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}, \\ \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu}, t), t), \quad (6.16) \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu}, 0) = \boldsymbol{\mu}.$$

Полученное представление соответствует векторному⁸ представлению Клебша [6с, h]

$$\mathbf{v} = \left. \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \right|_{\boldsymbol{\mu}} = \partial_t \mathbf{r} \Big|_{\boldsymbol{\mu}} = \dot{\boldsymbol{\xi}} \Big|_r + (\mathbf{v}\nabla)\boldsymbol{\xi}. \quad (6.17)$$

⁸Хотя объемные ГП в обычной гидродинамике известны давно, способ их введения, особенно для непотенциального течения, как правило, оставался до самого последнего времени чисто директивным. В связи с этим, время от времени возникали вопросы, сколько должно быть пар переменных Клебша, входит ли энтропия в их число и т. п. В том, что касается представления скорости для непотенциального движения, используемый подход, по-видимому, соответствует вариационному принципу Линя [6с], и однозначно приводит к векторным потенциалам Клебша, исключая произвол в выборе их числа.

Теперь нетрудно выписать гамильтоновы уравнения в векторных переменных Клебша $q = (\rho, \boldsymbol{\mu}, s)$, $p = (\varphi, \boldsymbol{\lambda}, \sigma)$, где $\boldsymbol{\mu}$ – лагранжева координата, $\boldsymbol{\lambda}/\rho$ – лагранжев импульс. (Обсуждение см. в [2f, 6h]). Здесь приведем гамильтониан $H = \sum p\dot{q} - L'$, $p = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}}$ и представление скорости:

$$L' = L + \varphi(\dot{\rho} + \text{div}(\rho\mathbf{v})) + \boldsymbol{\lambda} \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} + \sigma \frac{ds}{dt}, \quad (6.18)$$

$$H = \rho\mathbf{v} \left(\nabla\varphi - \frac{\lambda_m}{\rho} \nabla\mu_m - \frac{\sigma}{\rho} \nabla s \right) - L - \text{div}(\rho\mathbf{v}\varphi) = \\ = \tilde{H} - \text{div}(\rho\mathbf{v}\varphi), \quad (6.19)$$

$$\tilde{H}(\rho, s, \boldsymbol{\lambda}, \sigma, \nabla\varphi, \nabla\mu_m, \nabla s) = \frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon,$$

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi - \frac{\lambda_m}{\rho} \nabla\mu_m - \frac{\sigma}{\rho} \nabla s.$$

Переход к скалярным переменным Клебша реализуется в том частном случае, когда $\boldsymbol{\lambda}/\rho$ и $\boldsymbol{\mu}$ пропорциональны одному и тому же постоянному по направлению вектору.

Гамильтоновы переменные в магнитной гидродинамике

Проведенные рассуждения непосредственно обобщаются на магнитную гидродинамику (и другие родственные системы). В случае МГД вариационный принцип принимает вид

$$A = \int dt L \leftarrow \min,$$

$$L = \int d\mathbf{r} L, \quad (6.20)$$

$$L = \frac{\rho v^2}{2} - \rho\varepsilon - \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}.$$

Связи включают условие вмерзности поля $\dot{\mathbf{H}} - \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = 0$ и условие $\text{div} \mathbf{H} = 0$. В итоге лагранжиан со связями принимает вид $L \rightarrow L' = L + F$, где

$$F = \varphi(\dot{\rho} + \text{div} \rho\mathbf{v}) + \sigma \frac{ds}{dt} + \boldsymbol{\lambda} \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} + \\ + \phi \text{div} \mathbf{H} + \mathbf{S}(\dot{\mathbf{H}} - \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]) + \text{div} \mathbf{G}. \quad (6.21)$$

Дивергентный член, как и в (6.19), существен при получении поверхностных переменных (см. [6h,i]). Гамильтониан $H = \sum p\dot{q} - L'$ строится с помощью обобщенных переменных $q = (\rho, s, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{H})$, $p = (\varphi, \sigma, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{S})$, где канонические импульсы определены согласно

$$\varphi = \frac{\delta A}{\delta \rho}, \quad \sigma = \frac{\delta A}{\delta s}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \frac{\delta A}{\delta \boldsymbol{\mu}}, \quad \mathbf{S} = \frac{\delta A}{\delta \dot{\mathbf{H}}}. \quad (6.22)$$

Гамильтоновы уравнения $\dot{q} = \frac{\delta H}{\delta p}$, $\dot{p} = -\frac{\delta H}{\delta q}$, где $H = \int d\mathbf{r} H$, соответственно совпадают с результатами варьирования действия:

$$\delta\mathbf{v}: \quad \rho\mathbf{v} - \rho\nabla\varphi + \boldsymbol{\lambda}\nabla\boldsymbol{\mu} + \sigma\nabla s - [\mathbf{H}\text{rot}\mathbf{S}] = 0,$$

$$\delta\varphi: \quad \dot{\rho} + \text{div} \rho\mathbf{v} = 0,$$

$$\delta\boldsymbol{\lambda}: \quad d\boldsymbol{\mu}/dt = 0,$$

$$\delta\sigma: \quad ds/dt = 0,$$

$$\delta\rho: \quad v^2/2 - w - d\varphi/dt = 0, \quad w = \varepsilon + p/\rho, \quad (6.23)$$

$$\delta\boldsymbol{\mu}: \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} + \nabla_m(\boldsymbol{\lambda}v_m) = 0,$$

$$\delta s: \quad \dot{\sigma} + \text{div} \sigma\mathbf{v} + \rho T = 0,$$

$$\delta\phi: \quad \text{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\delta\mathbf{S}: \quad \dot{\mathbf{H}} - \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = 0,$$

$$\delta\mathbf{H}: \quad \dot{\mathbf{S}} - \text{rot}[\mathbf{S}, \mathbf{H}] + \nabla\phi + \frac{\mathbf{H}}{4\pi} = 0.$$

Они соответствуют гамильтоновым переменным Захарова и Кузнецова [2f], отличаюсь векторным характером переменных Клебша.

Гамильтоново описание движения поверхностей разрыва

В случае, если имеется свободная граница

$$z = \zeta(\mathbf{r}_\perp, t), \quad \mathbf{r}_\perp = (x, y), \quad (6.24)$$

можно ввести “двумерные” канонические переменные Захарова: $\zeta(\mathbf{r}_\perp, t)$, $\Psi(\mathbf{r}_\perp, t) = \phi|_\zeta$, ($\rho = 1$). Эти гамильтоновы переменные⁹ использовались при исследовании волнения на поверхности жидкости. В связи с рассмотрением внутренних волн в работе [6] получено (довольно очевидное, но, как мы увидим, весьма важное для нас) обобщение переменной Захарова на случай границы двух сред (см. ссылки в [6]):

$$\zeta, \Psi = (\rho_1 \phi_1 - \rho_2 \phi_2) \equiv [\rho \phi]. \quad (6.25)$$

Покажем, как можно ввести поверхностные ГП, используя вариационный принцип со связями [6h]. Пусть уравнение поверхности разрыва (любого типа) имеет вид: $R(\mathbf{r}, t) = 0$, где функция R либо задана (определяя форму фиксированной жесткой границы), либо подлежит определению (например, на свободной границе) при решении гидродинамической задачи. При очевидных ограничениях локально его можно представить в разрешенной форме:

⁹При их введении использовалось объемное уравнение для потенциала скорости (уравнение Лапласа) и то, что сопряженная ему координата в рассматриваемом случае несжимаемой жидкости является константой. Ввиду последнего, потенциал может быть в принципе исключен из гамильтониана; существенными переменными в этом случае являются возвышение и граничное значение потенциала, что соответствует наличию одной (континуальной) физической степени свободы.

$$R = z - \zeta(\mathbf{r}_\perp, t). \quad (6.26)$$

Дифференцируя (6.26) по времени, получаем кинематическое условие

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla R = 0, \quad (6.27)$$

где \mathbf{u} – скорость движения границы¹⁰, которую без ограничения общности будем считать направленной по нормали \mathbf{n} (нормаль направлена из среды 1 в среду 2). Кинематическое условие используем в качестве связи в вариационном принципе с лагранжевым множителем ψ . Как и в (6.25) квадратные скобки означают скачок соответствующей величины на границе. Условия на скачке

$$[\rho v'_n] = 0, \quad [\rho \mu v'_n] = 0 \quad (6.28)$$

с лагранжевыми множителями γ и η , соответственно также будем использовать как связи ($\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ – относительная скорость на разрыве). Поверхностный лагранжиан со связями ($\Psi = \frac{\delta L}{\delta \zeta}$ – сопряженный возвышению границы импульс)

$$L_\Sigma = -\psi(\dot{R} + \mathbf{u} \nabla R) + [\rho v' \Gamma] \nabla R, \quad \Gamma = \gamma + \eta \mu \quad (6.29)$$

приводит к гамильтониану

$$H_\Sigma = \psi \dot{\zeta} - L_\Sigma = \psi \mathbf{u} \nabla R - [\rho v' \Gamma] \nabla R.$$

Варьируя как по объемным, так и по поверхностным переменным, получаем [6h]:

¹⁰Разумеется, существенна только ее нормальная к разрыву компонента.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}: \quad & \rho(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\Gamma}) = 0, \\ \delta \mathbf{u}: \quad & \boldsymbol{\psi} + [\rho \boldsymbol{\Gamma}] = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\psi} = [\rho \boldsymbol{\varphi}], \\ \delta \rho: \quad & (\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\Gamma})(\mathbf{v}' \nabla R) = 0, \\ \delta \boldsymbol{\mu}: \quad & (\boldsymbol{\lambda} + \rho \boldsymbol{\eta})(\mathbf{v}' \nabla R) = 0, \\ \delta s: \quad & \sigma(\mathbf{v}' \nabla R) = 0, \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \delta \zeta: \quad & \left[\sum p \dot{q} - H + \operatorname{div}(\mathbf{v} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{v}' \boldsymbol{\Gamma}) \right] - \\ & - (\partial_t \boldsymbol{\psi} + \nabla_{\perp}(\mathbf{u}_{\perp} \boldsymbol{\psi})) + \alpha \nabla_{\perp} \left(\frac{\nabla_{\perp} \zeta}{\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} \zeta)^2}} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\delta \boldsymbol{\psi}: \quad \dot{\zeta} - \mathbf{u} \nabla(z - \zeta) = 0,$$

$$\delta \gamma: \quad [\rho \mathbf{v}' \nabla R] = 0,$$

$$\delta \boldsymbol{\eta}: \quad [\rho \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}' \nabla R)] = 0.$$

При этом соотношения, не содержащие скачка, должны выполняться с каждой стороны от разрыва. Мы включили также слагаемое с поверхностным натяжением. Из системы (6.30) легко получить поверхностные ГП на контактном разрыве, на тангенциальном разрыве, на ударной волне¹¹. Заметим, что во всех случаях пара сопряженных переменных (6.25) сохраняет смысл ГП с точностью до канонического преобразования. Полученная система условий на поверхностях разрывов в канонических переменных эквивалентна обычной системе гидродинамических условий на разрывах (т. е. непрерывности потоков массы, энергии и импульса).

Поверхностные канонические переменные на разрывах в МГД

В дополнение к предыдущему используем в качестве связи уравнение движения поверхности и введем в лагранжиан соответствующую

¹¹Последнее не вполне тривиально, учитывая диссипативный характер ударной волны, но становится достаточно очевидным, если учесть идеальный характер течения по обе стороны разрыва и законы сохранения.

щее слагаемое $L_{\Sigma} = - \int d\mathbf{r}_{\perp} \boldsymbol{\psi}(\dot{R} + \mathbf{u} \nabla R) + \int d\Sigma \alpha$. Для смещения поверхности разрыва ζ найдем

сопряженный импульс $\boldsymbol{\psi} = \frac{\delta A}{\delta \dot{\zeta}}$, который оказывается равным $\boldsymbol{\psi} = \{\rho \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H}_{\tau} \mathbf{S}_{\tau}\}$. (В МГД случае фигурные скобки означают скачок на разрыве). Канонические уравнения для ζ принимают уже известный нам вид $\dot{\zeta} = \frac{\delta H_{\Sigma}}{\delta \boldsymbol{\psi}}$,

$\dot{\boldsymbol{\psi}} = - \frac{\delta H_{\Sigma}}{\delta \zeta}$, причем $H_{\Sigma} = \boldsymbol{\psi} \dot{\zeta} - L_{\Sigma}$. (Подробнее см. [6g,i] и Приложение I).

7. Нелинейные процессы взаимодействия и самовоздействия волн

Удобство представления (5.10) становится очевидным при рассмотрении конкретных процессов, т. к. каждый из матричных элементов связан с каким-либо процессом, и собственно этим и определяется его физический смысл. В результате достигается значительная общность: одни и те же нелинейные процессы происходят в совершенно различных нелинейных системах. Индивидуальность нелинейности проявляется в конкретном виде матричных элементов, аналогично тому, как индивидуальность линейных свойств характеризуется видом законов дисперсии (а также, конечно, в конкретной реализации явления – связью переменных $a_{\mathbf{k}}$ с исходными естественными физическими переменными).

Рассмотрим один из простейших нелинейных процессов – возбуждение второй гармоники волной “конечной” амплитуды, которую естественно выбрать в нулевом (линейном) приближении в виде (\mathbf{k}_0 фиксировано):

$$a_{\mathbf{k}}(t) = a_{\mathbf{k}_0}^0 e^{-i\omega_0 t} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0), \quad \omega_0 \equiv \omega(\mathbf{k}_0). \quad (7.1)$$

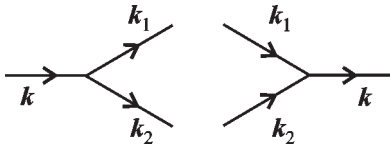
Из уравнений движения (5.13), записанных с точностью до квадратичных членов, видно, что следует удержать только слагаемые, содержащие V^{-+} :

$$\dot{a}_k + i\omega_k a_k = -i \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 V_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{k}}^{--+} a_{\mathbf{q}_1} a_{\mathbf{q}_2} \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}). \quad (7.2)$$

Действительно, только в них при подстановке в правую часть нулевого приближения (7.1) возникает искомая временная зависимость $e^{-2i\omega_0 t}$. Соответствующие члены в гамильтониане

$$V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}}^{--+} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}}^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) + \text{к. с.} \quad (7.3)$$

можно изобразить графически с помощью диаграмм:



Удобно ввести терминологию (берущую начало от квантового описания, где величины a и a^+ являются операторами), согласно которой (в соответствии со второй диаграммой) волны $a_{\mathbf{k}_1}$ и $a_{\mathbf{k}_2}$ “исчезают”, а волна $a_{\mathbf{k}}^*$ “рождается”. Первая диаграмма соответствует “слиянию” волн с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 в волну с волновым вектором \mathbf{k} . Образование второй гармоники является частным случаем процесса слияния (волна сливается “сама с собой”).

Наглядность подобных графиков позволяет с их помощью непосредственно выписывать требуемое уравнение (в нашем случае (7.2)). Ограничившись для простоты установившимся режимом, в линейную часть уравнения “руками” введем слагаемое $\gamma_k a_k$, где γ_k – коэффициент поглощения волны (декремент) ($\gamma_k = 2\nu k^2$, если причина затухания в вязкости). После этого непосредственно получаем решение в виде ($V \equiv V_{\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_0 2\mathbf{k}_0}^{--+}$, опущены индексы):

$$a_{2\mathbf{k}_0}(t) = \frac{V a_0^2 e^{-2i\omega_0 t}}{2\omega_{\mathbf{k}_0} - \omega_{2\mathbf{k}_0} + i\gamma_{2\mathbf{k}_0}}, \quad a_0 \equiv a_{\mathbf{k}_0}^0. \quad (7.4)$$

Очевидным образом получается и нестационарное решение, описывающее возникновение второй гармоники, но мы не будем на этом останавливаться. Из вида решения следует, что вторая гармоника мала в меру малости квадрата амплитуды исходной волны a_0 , но может стать значительной за счет резонанса, когда разность частот в знаменателе (7.4) обратится в нуль:

$$2\omega_{\mathbf{k}_0} = \omega_{2\mathbf{k}_0}. \quad (7.5)$$

Разделив на $2k_0$, получим так называемое условие синхронизма:

$$V_{\mathbf{k}_0} \equiv \frac{\omega_{\mathbf{k}_0}}{k_0} = \frac{\omega_{2\mathbf{k}_0}}{2k_0} \equiv V_{2\mathbf{k}_0}, \quad (7.5')$$

т. е. равенство фазовых скоростей волны и ее второй гармоники.

В нелинейной оптике эффективное возбуждение второй гармоники было реализовано экспериментально, причем использовались низкосимметричные кристаллы, где даже в отсутствие пространственной дисперсии отличны от нуля матричные элементы $V^{(3)}$, а синхронизм достигался за счет дисперсии скорости обыкновенной и необыкновенной волн (в некоторых особых направлениях). Величина преобразования была очень большой (в рекордных ситуациях достигала 100 %). Соответственно в таких условиях уже нельзя было считать исходную волну заданной и приходилось решать связанную систему уравнений для первой и второй гармоники, а в более общем случае – для системы трех связанных волн [19d]. Заметим, что при солнечных радиовсплесках, связанных с трансформацией плазменных волн (возбуждаемых потоками ускоренных электронов) в электромагнитные, весьма эффективен процесс образования 2-й гармоники $l+l \rightarrow t$ (рис. 7.1).

В высоко симметричной (в частности, изотропной) среде возбуждение 2-й гармоники

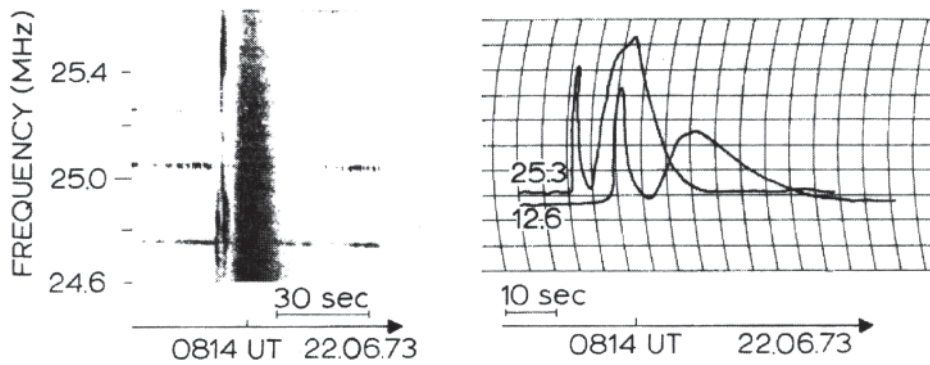


Рис. 7.1. Наблюдение 1-й и 2-й гармоники плазменной частоты короны в солнечных радио всплесках, порождаемых пронизывающими корону электронами, ускоренными при солнечной вспышке. (По данным Л. Базеляна и др. [19a] на УТР-II)

ки не столь эффективно, и в отсутствие дисперсии возбуждается 3-я (и более высокие) гармоники. За генерацию 3-й гармоники ответственно слагаемое 3-го порядка в уравнении и соответственно 4-го в гамильтониане: $V \rightarrow +aaaa * \delta^{(4)}$.

Более общее условие синхронизма, соответствующее слиянию волн, состоит в одновременном выполнении равенств (см. диаграммы):

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}, \quad \omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_k. \quad (7.6)$$

Только при точном (или почти точном) выполнении этого условия могут стать существенными процессы слияния волн и обратные им процессы распада. Условия (7.6) являются весьма жесткими. В случае волн на поверхности жидкости они могут выполняться для (неколлинеарных) капиллярных волн и невозможны для гравитационных. Условие “распадности” закона дисперсии – выпуклость функции $\omega(\mathbf{k})$ книзу. Число квазичастиц при распадных процессах не сохраняется. Возможность распадов становится очевидной при графическом решении системы законов сохранения (см. рис. 7.2). Действительно, закон дисперсии $\omega(\mathbf{k}) \approx k^{3/2}$ представляет собой поверхность вращения над плос-

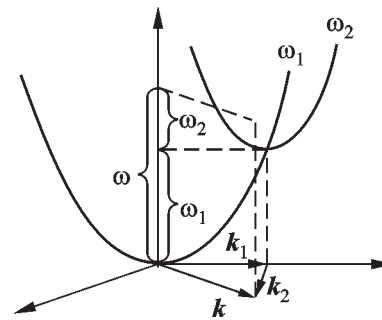


Рис. 7.2. Выполнение условия распада для капиллярных волн. Горизонтальные оси соответствуют проекциям волновых векторов в плоскости раздела

костью \mathbf{k} . Построим такую же поверхность $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ с центром в точке (ω_1, \mathbf{k}_1) . Из свойств полукубической параболы ясно, что эти поверхности пересекаются. Точкам пересечения отвечают решения системы законов сохранения. Обратный процесс по отношению к слияниям – процесс распада волны конечной амплитуды a_{k_0} (7.1) – приводит к возникновению и росту волн \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и, таким образом, представляет собой вариант (нелинейной) неустойчивости. Как мы сейчас увидим, его инкремент пропорционален амплитуде волны \mathbf{k}_0 , которая считается заданной в виде (7.1).

Уравнения для рождающихся волн имеют вид (мы ввели линейное затухание γ):

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + i\omega a_1 + \gamma_1 a_1 &= \\ &= -i \int dk dk_2 V_{kk_1 k_2}^{-++} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_2}^*, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 + i\omega a_2 + \gamma_2 a_2 &= \\ &= -i \int dk dk_1 V_{kk_1 k_2}^{-++} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1}^*. \end{aligned}$$

При точном выполнении условий синхронизма (7.6) решение можно искать в виде

$$a_{1,2}(t) = b_{1,2} e^{-i\omega_{1,2} t + \nu t}, \quad (7.8)$$

откуда для связанных между собой амплитуд b_1 и b_2 находим, опуская индексы у $V \equiv V_{\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{-++}$:

$$(\nu + \gamma_1) b_1 = -2i V a_0 b_2^*, \quad (7.9)$$

$$(\nu + \gamma_2) b_2^* = 2i V^* a_0^* b_1.$$

Положив для простоты $\gamma_1 = \gamma_2$, получаем для показателя

$$\nu_{\pm} = -\gamma \pm 2|V a_0|. \quad (7.10)$$

Видно, что один корень отрицателен и отвечает затуханию, но второй при достаточно большой амплитуде волны,

$$2|V a_0| > \gamma, \quad (7.11)$$

становится положительным, что и означает неустойчивость исходной волны. Распадная неустойчивость, открытая Сагдеевым и Оравским, – чисто нелинейное явление, ее инкремент ν_+ (в отсутствие поглощения) пропорционален амплитуде волны a_0 . Неустойчивость обладает порогом, определяемым затуханием волны (равенство в (7.11)):

$$2|V a_0|_{\text{порог}} = \gamma, \quad (7.12)$$

Основным процессом в случае нераспадного спектра становится рассеяние волн (рис. 7.3 – рис. 7.4). Общим важным эффектом, возникающим за счет $V^{(4)}$, является самовоздействие волны, приводящее к нелинейному сдвигу частоты. Впервые для волн конечной амплитуды на поверхности жидкости он был найден Стоксом. В нелинейных асимптотических методах учет нелинейного сдвига частоты, являющегося физической реакцией на появление резонансных (секулярных) членов в рядах теории возмущения, принципиален.

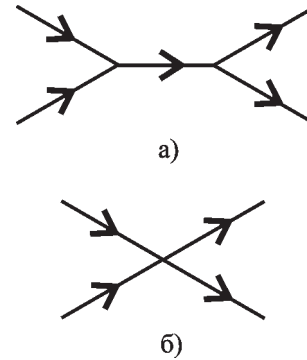


Рис. 7.3. Схема рассеяния волн: а) за счет тройных процессов во втором порядке теории возмущений; б) за счет четверных процессов

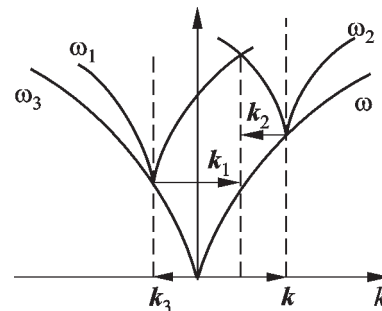


Рис. 7.4. Выполнение условий синхронизма при рассеянии коллинеарных гравитационных волн на глубокой воде.

Ответственным за нелинейный сдвиг является матричный элемент (5.11) $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}}^{++++}$. Соответствующее уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\mathbf{k}} + i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} = \\ = -i \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 V_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{k}}^{++++} a_{\mathbf{q}_1}^* a_{\mathbf{q}_2}^* a_{\mathbf{q}_3} \delta^{(4)} \end{aligned} \quad (7.13)$$

и для волны (7.1) переходит в

$$\dot{a}_{\mathbf{k}} + i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} = -i V_{\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}}^{++++} |a_{\mathbf{k}}|^2 a_{\mathbf{k}}, \quad (7.14)$$

откуда видно, что учет данного нелинейного слагаемого эквивалентен появлению сдвинутой частоты¹²

$$\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} + V_{\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}}^{++++} |a_{\mathbf{k}}|^2. \quad (7.15)$$

Аналогично можно найти сдвиг частоты волны в поле “чужой” волны конечной амплитуды:

$$\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} + V_{\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}\mathbf{k}}^{++++} |a_{\mathbf{k}_0}|^2. \quad (7.16)$$

Ангармонизмы третьего порядка в уравнениях (четвертого в гамильтониане) способны также привести к неустойчивости в среде, обладающей нераспадным спектром. Такая неустойчивость возникает вследствие распада волны “второй гармоники”. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\dot{a}_1 + i\tilde{\omega}_1 a_1 = -i \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}_2 T_{00/12} a_0^2 a_2^* \delta(2\mathbf{q} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2),$$

$$\dot{a}_2^* + i\tilde{\omega}_2 a_2^* = i \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 T_{00/12}^* a_0^2 a_1 \delta(2\mathbf{q} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \quad (7.17)$$

¹²Хотя структура этой формулы достаточно очевидна, сама формула не столь проста, как могло бы показаться. Коэффициент при квадрате амплитуды чувствителен к такой достаточно тонкой характеристике состояния, как ширина пакетов взаимодействующих волн, а в промежуточной области, где могут возникать солитоны огибающих, ширина пакета жестко связана с его амплитудой [5d, комментарий].

(от второго мы взяли комплексное сопряжение, переобозначение коэффициента означает включение в него слагаемых, происходящих от $\mathbb{H}^{(3)}$ во втором порядке (рис. 7.3), и комбинаторного численного коэффициента). Система уравнений здесь содержит разность частот, соответствующую неполному синхронизму:

$$\Delta\omega = 2\tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2, \quad (7.18)$$

причем частоты входят с нелинейным сдвигом, обусловленным волной конечной амплитуды a_0 . Переходя к медленным амплитудам b_i ,

$$a_i = b_i e^{-i\tilde{\omega}_i t},$$

получим систему (опуская индексы у T):

$$\dot{b}_1 = -2iTb_0^2 b_2^* e^{-i\Delta\omega t}, \quad (7.19)$$

$$\dot{b}_2^* = 2iT^* b_1 b_0^{*2} e^{i\Delta\omega t}.$$

Удобно ввести величину $g = b_2^* e^{-i\Delta\omega t}$, тогда (7.19) принимает вид системы с постоянными коэффициентами. Для решений b , $g \approx e^{\nu t}$ условие разрешимости дает ($\gamma = 0$):

$$\nu(\nu + i\Delta\omega) = 4|Tb_0^2|^2,$$

откуда

$$\nu = -\frac{i\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{4|Tb_0^2|^2 - \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2}. \quad (7.20)$$

При условии

$$|2Tb_0^2| > \frac{|\Delta\omega|}{2} \quad (7.21)$$

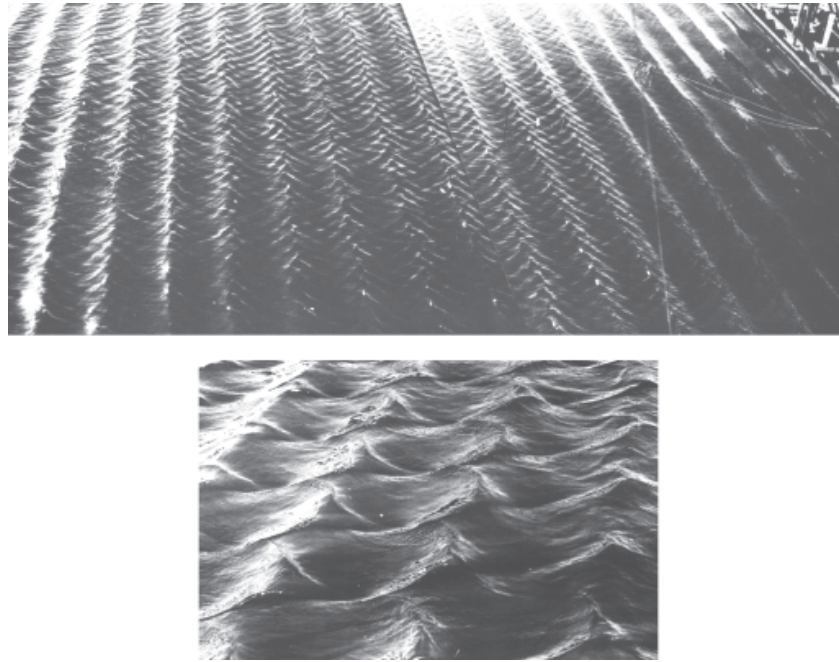


Рис. 7.5. Разрушение стоксовых волн в результате развития модуляционной неустойчивости [19b]. По мере продвижения волн, создаваемых источником (справа), неустойчивость превращает их в “трехмерные” волны, разрушаемые опрокидыванием (более крупным планом на нижнем снимке)

возникает неустойчивость (рис. 7.5). Так как в рассогласование частот $\Delta\omega$ из-за нелинейного сдвига входит квадрат амплитуды b_0^2 , добиться реализации неравенства за счет роста амплитуды, вообще говоря, нельзя. В одномерном случае соответствующий критерий приводит к модуляционной неустойчивости (т. к. в результате ее развития возникает самомодуляция волны), что соответствует $k_{1,2} = k_0 \pm \delta k$ при $\delta k \ll k_0$. При этом критерий имеет вид $\alpha v'_{\text{гр}} < 0$ (критерий Лайтхилла). Здесь α – коэффициент в нелинейном сдвиге частоты волны, $v'_{\text{гр}} \equiv \partial v_{\text{гр}} / \partial k$. Получить этот критерий удобно, исходя из уравнений для волнового числа $k(x, t)$ и (вещественного) квадрата амплитуды волны $a^2(x, t)$, определяющего нелинейный сдвиг частоты $\tilde{\omega} = \omega + \alpha a^2$ [7]:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}, \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_{\text{гр}} a^2) = 0.$$

Уравнение, аналогичное (5.13), но учитывающее в случае нераспадного спектра только процессы рассеяния волн четвертого порядка¹³,

¹³Уравнение такого типа (обычно оно записывается в терминах медленных амплитуд $b = a \exp i\omega t$) применительно к гравитационным волнам на глубокой воде принято называть уравнением Захарова, показавшим с его помощью, что гравитационные волны конечной амплитуды на глубокой воде модуляционно неустойчивы. В (7.23) условия синхронизма не должны выполняться точно, и поэтому оно описывает взаимодействие достаточно широких волновых пакетов. Существуют различные варианты, в которых реализуется модуляционная неустойчивость (наиболее известна неустойчивость Бенжамина-Фэйра), и различные приближения, достаточные для их описания. Ситуация, в действительности, очень сложна. Существенны начальные условия – как интервалы волновых чисел, их размерность, так и общий масштаб цуга волн. Отличаются кратковременное и долговременное поведение. Роль нелинейности нетривиальна – с ее ростом неустойчивость может исчезать, и, разумеется, появляются другие разновидности, например, взрывная эволюция Лонге-Хиггинса. Связанные с этим проблемы см. в [5, 15], в цитируемых в [15e] обзорах и в комментариях к обзору Юэна и Лейка [5d].

$$\dot{a}_k^\sigma - i\sigma\omega_k a_k^\sigma = i\sigma \int d\mathbf{l}d\mathbf{2}d\mathbf{3} V_{\mathbf{k}\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3}^{-\sigma\sigma_1\sigma_2\sigma_3} a_{\mathbf{q}_1}^{\sigma_1} a_{\mathbf{q}_2}^{\sigma_2} a_{\mathbf{q}_3}^{\sigma_3} \times \\ \times \delta(-\sigma\mathbf{k} + \sigma_1\mathbf{q}_1 + \sigma_2\mathbf{q}_2 + \sigma_3\mathbf{q}_3) + \dots, \quad (7.23)$$

удобно получать, исключив член третьего порядка из гамильтониана с помощью соответствующего канонического преобразования (см. [2d] и Приложение 2). В частном (простейшем) случае “одноволновой” задачи, когда наиболее существен нелинейный сдвиг частоты, (7.23) сводится к чрезвычайно популярному “нелинейному уравнению Шредингера” (НУШ), которое мы приведем в безразмерных переменных (знак нелинейного члена при этом весьма существен):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi \pm 2|\psi|^2 \psi = 0. \quad (7.24)$$

Временная дисперсия может играть роль, аналогичную пространственной, что оказывается существенным, например, в современных оптических линиях передачи для когерентных волн. В силу одномерного характера распространения такой волны здесь удобно нумеровать осцилляторы их частотой ω , а волновое число k рассматривать как ее функцию $k(\omega)$, задаваемую законом дисперсии. Проиллюстрируем это в соответствии со статьями Захарова и Кузнецова [15], где использована пространственно-временная аналогия. В переменных ρ и ϕ , где

$$E = \frac{\sqrt{4\pi}}{c} \rho, \quad B = \sqrt{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \text{уравнения Максвелла для плоской линейно поляризованной волны}$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0,$$

$$D(x, t) = \hat{\epsilon}(t)E(x, t) + \chi E^3(x, t)$$

могут быть представлены в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\delta H}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\delta H}{\partial \rho}, \quad (7.25)$$

где

$$H = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2c^2} \rho \hat{\epsilon} \rho + \frac{\pi \chi}{c^4} \rho^4 \right] dt \equiv \\ \equiv \frac{1}{8\pi} \int \left[\mathbf{H}^2 + E \hat{\epsilon} E + \frac{1}{2} \chi E^4 \right] dt. \quad (7.26)$$

После перехода к нормальным координатам

$$(\text{закон дисперсии } \omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\epsilon(\omega)}):$$

$$\rho_\omega = \sqrt{\frac{\omega^2}{2k(\omega)}} (a_\omega^* + a_{-\omega}),$$

$$\phi_\omega = -i \sqrt{\frac{k(\omega)}{2\omega^2}} (a_\omega^* - a_{-\omega}), \quad \frac{\partial a_\omega}{\partial x} = i \frac{\delta H}{\delta a_\omega^*},$$

гамильтониан (7.26) принимает стандартный вид (5.11) с заменой k на ω с матричным элементом

$$T_{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4} = \frac{3\chi}{4\pi c^4} \left[\frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_4^2}{k(\omega_1)k(\omega_2)k(\omega_3)k(\omega_4)} \right]^{1/2}. \quad (7.27)$$

Уравнения для огибающих пакета волн

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int a_\omega e^{-i(\omega-\omega_0)t - ik_0(v)x} d\omega \quad \text{с узким частотным спектром – гамильтоновы:}$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\delta H}{\delta \psi^*}, \quad (7.28)$$

причем низшим членам разложения отвечает НУШ, которое в безразмерных переменных для “фокусирующей нелинейности” приобретает вид

$$i \frac{\partial E}{\partial x} + E_{xx} + 2|E|^2 E = 0. \quad (7.29)$$

Обычному НУШ (7.24) соответствует замена $x \leftrightarrow t$.

Мы видим, что, по крайней мере, в достаточно симметричных системах возникают два наиболее типичных нелинейных слагаемых в самых низших порядках: либо нелинейность “гидродинамического” типа (как в уравнении Эйлера), либо нелинейность, ответственная за сдвиг частоты. Им соответствуют типичные простейшие нелинейные уравнения Кортевега – де Вриза (КдВ), Бюргерса и, соответственно, НУШ. В уравнении КдВ наивысший порядок (третий) имеет пространственная производная, связанная с учетом (слабой – в смысле разложения по градиентам) пространственной дисперсии. В уравнении Бюргерса, в отличие от КдВ, учтено затухание, а не дисперсия как конкурент нелинейности, и оно, также как и НУШ, имеет второй порядок. Замечательно, что все эти уравнения оказались точно интегрируемыми, о чем будет идти речь в следующем разделе обзора. Здесь мы лишь отметим, что с помощью преобразования Хопфа-Коула

$$u = -2v \frac{\theta_x}{\theta} \text{ нелинейное уравнение Бюргерса}$$

(см. ниже левую часть выражения (7.30), v – вязкость), описывающее, в частности, возникновение ударных волн, сводится к линейному уравнению теплопроводности [3]:

$$u_t + uu_x - v u_{xx} = -\frac{2v}{\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\theta_x}{\theta} \right) (\theta_t - v \theta_{xx}) = 0. \quad (7.30)$$

8. Уравнение КдВ и солитоны

Основной качественный вывод, который может быть сделан из предыдущего анализа для волны конечной амплитуды, сводится к тому, что нелинейность приводит к росту гармоник (причем фазы волн жестко связаны), а значит к укрупнению фронта волны, а дисперсия скоростей препятствует этому (малость гармоник в отсутствие синхронизма). Укрупнение фронта можно увидеть на полезном примере движения (пучка) невзаимодей-

ствующих частиц, промодулированного в виде волны в начальный момент времени. Смещение точек фронта волны описывается уравнением $dv/dt = 0$, которое в эйлеровой записи имеет вид $\partial v/\partial t + v \partial v/\partial x = 0$, т. е. содержит нелинейность гидродинамического типа. Так как каждая точка движется со своей фиксированной скоростью, в том числе при $v = 0$ покоится, то очевидна картина, в которой точки профиля с положительной скоростью обгоняют исходный профиль, а с отрицательной отстают от него, из-за чего фронт будет становиться круче. Затухание, вступающее в игру при возникновении больших градиентов (в “момент” обгона¹⁴), приводит к образованию ударных волн, где и нелинейность, и диссипация существенны. Этот процесс описывается уравнением Бюргерса, которое нелинейной подстановкой сводится к уравнению теплопроводности (см. выше) и таким образом допускает точное решение. В недиссипативной же, диспергирующей среде (плазма, мелкая вода) возникает возможность компенсации укрупнения фронта его расплыванием за счет дисперсии. Вследствие этого возникают особые решения – солитоны, которые мы рассмотрим очень кратко по мере необходимости (подробнее см. [3,4]).

Уравнение, где сосуществуют (слабая) дисперсия и нелинейность легко получить, добавляя к бездисперсионному закону $\omega = Vk$ следующий член разложения по k , который не приводит к затуханию, т. е. bk^3 . Соответствующее уравнение для скорости $u(x,t)$:

$$0 = (\omega - Vk + bk^3)u \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (8.1)$$

Восстановим здесь нелинейное слагаемое $u \frac{\partial u}{\partial x}$ и опустим $V \frac{\partial u}{\partial x}$ (переходя в систему отсчета, где линейная волна покоится). Тогда имеем уравнение КдВ:

¹⁴Для невзаимодействующих частиц в пучках обгон совершенно реален.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (8.2)$$

На стационарных решениях $u = u(x - ct)$ оно один раз интегрируется, и при нулевой константе интегрирования принимает вид уравнения движения частицы с массой b в эффективном потенциале W :

$$bu_{xx} = -\frac{\partial}{\partial u} W(u), \quad u_x \equiv \frac{du}{dx}, \quad (8.3)$$

причем x играет роль времени, а u_x – скорость частицы.

“Потенциальная энергия” (рис. 8.1)

$$W(u) = -\frac{cu^2}{2} + \frac{u^3}{6} \quad (8.3')$$

минимальна в точке $u = 2c$, максимум при $u = 0$, где $W = 0$, а также проходит через ноль при $u = 3c$. Вблизи дна ямы имеют место малые гармонические колебания. С ростом энергии “частицы”

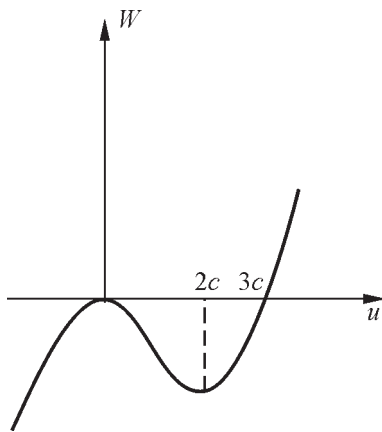


Рис. 8.1. Эффективная потенциальная энергия для частицы (8.3). Финитному движению в яме ($I < 0$) соответствуют нелинейные периодические волны на мелкой воде. Сепаратриса ($I = 0$) соответствует солитону

$$I = b \frac{u_x^2}{2} + W(u) \quad (8.4)$$

колебания в силу непараболичности ямы становятся ангармоническими, причем решение “долго” задерживается на малых u (где малы и скорости u_x) и “быстро” проходит область больших u , где скорость u_x не мала. Это значит, что расстояния между последовательными подъемами u с уменьшением I возрастают, и, наконец, значению $I = 0$ отвечает параболическое движение и сепаратриса в “фазовой” плоскости (u_x, u) – уединенная волна. Это необычное решение было получено еще в XIX веке (Кортевегом и де Вризом), а уединенная волна наблюдалась и была описана в его начале (Скоттом Расселом), но особая роль солитонов была открыта совсем недавно.

Нетрудно убедиться, что солитону (уединенной волне) соответствует решение вида

$$u(x - ct) = \frac{u_0}{\text{ch}^2 \frac{x - ct}{\Delta}}, \quad (8.5)$$

причем параметры c , u_0 и Δ связаны условиями:

$$u_0 = 3c, \quad 12b = \Delta^2 u_0. \quad (8.6)$$

Проверим это, подставив (8.5) в выражение для энергии (8.4) и приравняв его нулю. Тогда, после дифференцирования, при выполнении условий (8.6) мы придем к тождеству.

Скорость солитона c зависит от его высоты u_0 (линейно), а ширина Δ обратно пропорциональна корню из высоты. Оказалось, что эволюция начальной волны конечной амплитуды состоит, главным образом, в последовательном отщеплении от нее солитонов в области укрупнения фронта [10e]. Обгоняя волну, отщепившиеся солитоны уходят, причем следующие имеют меньшую высоту и, соответственно, скорость. Благодаря экспоненциально ма-

лому перекрытию солитоны не взаимодействуют друг с другом.

Изучение подобных процессов подсказало замечательную процедуру точного решения нелинейного уравнения КдВ, открывшую новую страницу в изучении нелинейных уравнений, для целых классов которых удалось отыскать системы точных решений [3, 4].

К сожалению, для произвольного нелинейного уравнения в частных производных порядка выше первого в настоящее время невозможно сказать, относится ли оно к точно решаемым или нет. Но среди построенных точно решаемых уравнений есть довольно много чрезвычайно важных для физики. К ним, в частности, кроме уравнения КдВ, относится НУШ, уже упоминавшееся уравнение Бюргерса, уравнение sin-Гордон при периодической нелинейности и некоторые другие.

Кратко опишем рецепт решения задачи Коши для КдВ методом обратной задачи рассеяния (МОЗР). Этот метод довольно сложен, но предполагает на каждом этапе решение только линейных уравнений [3, 4].

На первом этапе нелинейному уравнению КдВ, которое удобно записать в виде

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (8.7)$$

(при этом изменение знака означает, что повышению в исходном уравнении здесь соответствует углубление), сопоставляется пара линейных операторов (L, A – пара Лэкса). Оператор L – это оператор Штурма-Лиувилля

$$L = -\frac{d}{dx^2} + u(x,t), \quad (8.8)$$

или, что то же, оператор Шредингера (т. е. гамильтониан частицы с потенциалом $u(x,t)$)

при таком выборе единиц, что $\frac{\hbar^2}{2m} = 1$. Здесь t является параметром. Оператор A имеет специальный вид

$$A = -4i \frac{d^3}{dx^3} + 3i \left(u \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} u \right), \quad (8.9)$$

такой, что коммутатор

$$[L, A] \equiv LA - AL = -i(6uu_x - u_{xxx}),$$

благодаря чему уравнение эволюции

$$\frac{\partial L}{\partial t} = i[L, A], \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t} = u_t \right) \quad (8.10)$$

эквивалентно выполнению уравнения КдВ для $u(x,t)$.

Операторы A и L действуют на функции ψ “частиц”, движущихся в потенциальном поле $u(x,t)$, где t является параметром (и никакого отношения ко временной переменной для ψ -частиц не имеет). Поле $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Спектр частиц ψ , т. е. собственные значения λ уравнения Шредингера

$$L\psi = \lambda\psi, \quad (8.11)$$

при этом состоит из дискретного, связанного с уровнями “частицы” в потенциальной яме $u(x)$ при $t = \text{const}$, и непрерывного, связанного с инфинитным движением частиц с положительной энергией. Набор “данных рассеяния”, к которым относятся дискретные собственные значения оператора L и асимптотик его собственных функций (коэффициентов отражения, если говорить о непрерывном спектре) достаточен для нашей цели. Итак, на первом этапе процедура состоит в определении данных рассеяния L для $u(x,0)$. С помощью оператора A находится их изменение во времени, причем собственные значения дискретного спектра вообще не меняются, а “коэффициенты отражения” имеют в случае КдВ очень простой временной вид. Найденные данные рассеяния определяют новый потенциал $u(x,t)$, который может быть определен по ним, если решается обратная задача рассеяния. В случае уравне-

ния КдВ (т. е. для оператора Шредингера L) обратная задача уже довольно давно была эффективно решена (Гельфандом и Левитаном и Марченком¹⁵), а именно сведена к решению линейного интегрального уравнения, ядро которого выражается через данные рассеяния. Таким образом, круг замыкается – конечное $u(x, t)$ находится по начальному $u(x, 0)$, но вместо того, чтобы решать нелинейное уравнение (КдВ), решаются в несколько этапов линейные уравнения (рис. 8.2).

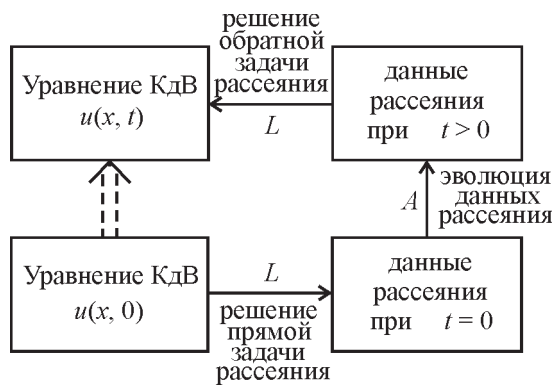


Рис. 8.2. Схема, поясняющая метод обратной задачи рассеяния

Ответ же выглядит следующим образом [10]. Если $K(x, y)$ – решение уравнения Марченко

$$K(x, y) = F(x + y) + \int_x^\infty ds K(x, s) F(s + y), \quad (8.12)$$

где $F(\xi)$ выражается через данные рассеяния¹⁶ – значения $\lambda_n \equiv -\kappa_n^2$ дискретного спек-

тра L и связанные с ними величины $M_n^2(t) = M^2(0) \exp(8\kappa_n^3 t)$, а также коэффициент отражения в непрерывном спектре $s(k, t) = s(k, 0) \exp(8ik^3 t)$, где $\lambda \equiv k^2$:

$$F(\xi) = -\sum_n M_n^2 e^{-\kappa_n \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk s(k) e^{ik\xi}, \quad (8.13)$$

то интересующее нас решение

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (8.14)$$

В частности, считая, что потенциал является безотражательным и содержит лишь один уровень, приходим с помощью указанного рецепта к солитонному решению (8.5).

Существенно, что солитонные решения реализуются вне спектра линейных волн. (Для волн на поверхности жидкости это соответствует тому, что солитон КдВ движется со скоростью, всегда превышающей скорость линейной волны, а капиллярно-гравитационные солитоны [15a-f] – со скоростью, меньшей, чем минимальная скорость V_m). Вблизи границы спектра в общем случае (солитон КдВ, локализуемый в области $k \rightarrow 0$, сюда не относится) они приобретают универсальную форму солитона НУШ¹⁷. Обратим внимание на то, что при $k_0 h < \sqrt{3}$, когда предел $k \rightarrow 0$ соответствует не максимальной, а минимальной скорости волн согласно (2.24), дисперсионное слагаемое в уравнении КдВ меняет знак, и солитоны КдВ движутся теперь со скоростью, меньшей скорости линейной волны. Заметим, что обычный солитон КдВ может находиться в резонансе с капиллярными волнами и, соответственно, испытывать дополнительное к линейному затухание. В особых случаях солитоны могут существовать нахо-

¹⁵Мы будем пользоваться уравнением Марченко (см., например, прекрасное изложение в [10h]), поскольку именно оно относится к рассматриваемому случаю быстро убывающих на бесконечности потенциалов.

¹⁶Более точно под данными рассеяния в непрерывном спектре понимают набор амплитуд $a(k)$ и $b(k)$, где $a^{-1}(k)$ – амплитуда рассеяния “вперед” (коэффициент прохождения волны через потенциал $u(x)$), а $b(k)/a(k)$ – амплитуда рассеяния “назад”. Уравнение эволюции Гарднера-Грина-Крускала-Миуры (ГГКМ) для $a(k)$ есть $\dot{a}(k, t) = 0$.

¹⁷Следует отметить аналогию с отщеплением локализованных (примесных) уровней от края зоны сплошного спектра в кристаллах [16]. В [15c,d] отмечена также аналогия перехода через границу сплошного спектра линейных волн с фазовыми переходами второго рода либо первого рода, в том числе близкого ко второму.

дась в зоне спектра линейных волн (см. ссылки в [15g,h]).

Обратим внимание на важную аналогию между методом обратной задачи рассеяния и преобразованием Фурье. (Последнее применяется, конечно, к линейным задачам). Переход к фурье-образам аналогичен переходу к данным рассеяния, что позволяет отследить в обоих методах эволюцию величин в новом представлении. И, наконец, совершается обратное преобразование к исходным величинам в новый момент времени (ср. рис. 8.2). Эта аналогия является содержательной. Преобразование Фурье, как мы знаем (см. п. 5), является каноническим преобразованием. Оказывается, что описание системы с помощью данных рассеяния также является описанием в канонических переменных! При этом данные рассеяния представляют собой реализацию переменных “действие – угол”. Возможность перехода к этим переменным¹⁸ эквивалентна полной интегрируемости нелинейного уравнения и существованию бесконечного набора интегралов движения, каковыми являются в терминах данных рассеяния $a(k)$. Так, можно показать [3, 17], что величины

$$n(k) = \frac{2k}{\pi} \ln |a(k)|^2, \quad \Phi_k = \arg b(k), \quad (k > 0) \quad (8.15)$$

образуют канонически сопряженные пары. Для величин, определяемых данными рассеяния в дискретном спектре,

$$N_l = \kappa_l^2, \quad \Phi_k = 2 \ln \frac{1}{|b_l|}, \quad (8.15')$$

также выполняются условия канонического сопряжения. Уравнения эволюции ГГКМ для

¹⁸ Это было показано Захаровым и Фаддеевым для КдВ и Тахтаджяном и Фаддеевым, и Захаровым и Маннаковым для НУШ (см. обзор [17] и ссылки в нем).

данных рассеяния соответствуют уравнениям в переменных “действие – угол” с гамильтонианом КдВ

$$H = -\frac{32}{5} \sum N_l^{5/2} + 8 \int k^3 n(k) dk. \quad (8.16)$$

Таким образом, МОЗР действительно оказывается аналогом нелинейного преобразования Фурье и совершенно нетривиальным примером канонического преобразования, чем оправдывается хотя бы столь краткое включение в данный обзор этого замечательного по эффективности и красоте метода – жемчужины математической физики XX века.

Особый объект применения гамильтоновых методов представляют собой вихри, традиционно описываемые в рамках гидродинамики несжимаемой жидкости [20a,b]. В солитонную эпоху интерес к вихрям как родственным локализованным образованиям резко возрос¹⁹. Современный взгляд на проблему изложен в обзорах [20c,d,e,h,i] и статьях [20f,g], в которых можно найти дальнейшие ссылки. Мы приведем здесь в качестве классического примера известное решение для т. н. сферического вихря Хилла, придав ему, однако, гамильтонову форму. Осесимметричное течение, которое ему соответствует, представляет собой ламинарный поток, обтекающий сферу, внутри которой сосредоточен вихрь. Стоксова функция тока ψ , вводимая при осесимметричных течениях [20a,b], представляет собой единственную отличную от нуля азимутальную компоненту вектор-потенциала скорости. Решению можно придать гамильтонову форму, если в качестве обобщенной координаты выбрать (с точностью до численного коэффициента) куб расстояния от центра сферы, а в качестве обобщенного импульса –

¹⁹Первая волна интереса к вихрям была связана с вихревой моделью атома и угасла при появлении планетарной модели и квантовой механики. Впрочем интерес к вихрям никогда не ослабевал в связи с проблемой турбулентности и задачам обтекания тел.

косинус азимутального угла. Тогда вихрь сведется к частице (набору частиц) с законом дисперсии

$$H = \psi = -\frac{3U}{4a^2}(a^2 - r^2)r^2 \sin \vartheta,$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (8.17)$$

$$(H < 0, \quad r \equiv (3q)^{1/3}, \quad p \equiv -\cos \vartheta).$$

Решение двухпараметрическое, зависящее от радиуса сферы a и скорости течения U (скорости движения вихря относительно неподвижной жидкости). Локализованным внутри сферы линиям тока (частицам) соответствует отрицательная энергия. Границе вихря – сепаратриса, отвечающая нулевой энергии. Это, равно как и обязательное движение вихря, помещающее его вне зоны линейных вихревых возбуждений, роднит его с солитоном.

Вихрь Хилла представляет собой пример кольцевых вихрей, а его плоским аналогом является вихрь Ламба [6а]. Тем не менее, топология линий тока в меридиональной плоскости чрезвычайно близка к той, которая была обнаружена впоследствии для двумерных солитонных решений на поверхности вращающейся жидкости как решений уравнения Чарни-Хасегавы-Мима²⁰ (солитон Ларичева-Резника и его обобщения). Убывание поля скоростей вне области завихренности в среде без дисперсии (вихри Хилла, Ламба) – степенное, при наличии дисперсии (для волн Россби) – экспоненциальное, что еще более роднит подобные вихри с солитонами.

²⁰ В этом уравнении нелинейность существенно не одномерна и представляет собой “плоскую” компоненту векторного произведения скорости течения на ее ротор [20с,е].

Приложение 1. Гамильтоново описание непотенциального движения при наличии свободной поверхности в обычной и магнитной гидродинамике

Обсудим прием [6g], с помощью которого поверхностные переменные строятся из объемных, описывающих непотенциальное движение сжимаемой жидкости, при помощи предельного канонического преобразования. С помощью того же приема получим канонические переменные, описывающие движение поверхности разрыва в магнитной гидродинамике.

Как известно [6а, 2], для баротропной жидкости $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$ представление скорости в виде

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \frac{\lambda}{\rho} \nabla\mu \quad (П.1.1)$$

с помощью переменных Клебша λ и μ (для упрощения записи мы ограничились скалярным вариантом) позволяет написать гамильтоновы уравнения (4.9) при произвольной плавной неоднородности в объеме жидкости:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \mu} \equiv -\text{div } \mathbf{v} \lambda, \quad (П.1.2)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \lambda} \equiv -(\mathbf{v} \nabla) \mu.$$

Вариация гамильтониана (4.9) с учетом (П.1.2.) может быть записана как

$$\delta H = \int dV \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta \varphi - \frac{\partial \mu}{\partial t} \delta \lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \delta \mu \right). \quad (П.1.3)$$

Сделаем, следуя (4.10), замену и перейдем к новым координатам ζ и $\tilde{\lambda}$:

$$\rho = f(\zeta - z), \quad \lambda = \tilde{\lambda}f(\zeta - z), \quad (\text{П.1.4})$$

выбирая производящий функционал в виде

$$F(\varphi, \mu; \zeta, \tilde{\lambda}) = \int dV \{ \varphi f(\zeta - z) + \mu \tilde{\lambda} f(\zeta - z) \}. \quad (\text{П.1.5})$$

Тогда новыми канонически сопряженными парами после предельного перехода (4.11), вводящего поверхность разрыва, будут

$$(\zeta, \Psi \equiv [\rho(\varphi + \tilde{\lambda}\mu)]_{\zeta}), \quad (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}), \quad (\text{П.1.6})$$

где $[]_{\zeta}$ означает скачок на разрыве $z = \zeta$ при переходе из нижней среды в верхнюю, $\tilde{\mu} = \mu f(\zeta - z)$. Уравнения для ζ остаются прежними (4.12). На скачке $z = \zeta$ выполняется условие, соответствующее уравнению Гамильтона

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \zeta},$$

$$\left[\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tilde{\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + g\zeta \right) \right]_{\zeta} = 0,$$

а в объеме вместо (П.1.2.) имеем

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial t} + \text{div} \tilde{\lambda} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \tilde{\mu} = 0.$$

Для небаротропной жидкости $\varepsilon(\rho) \rightarrow \varepsilon(\rho, s)$ – внутренняя энергия зависит от энтропии. В этом случае плотности и переменных Клебша недостаточно. Как известно, необходимо расширить набор переменных, включив туда энтропию, что можно сделать, вводя еще одну пару канонических переменных (σ, s) и представление для скорости

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi + \frac{\lambda}{\rho} \nabla \mu + \frac{\sigma}{\rho} \nabla s. \quad (\text{П.1.7})$$

При этом для энтропии получаем, как и для переменных Клебша, закон сохранения, а σ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta s} \equiv -\text{div} \mathbf{v} \sigma + \frac{\partial \varepsilon}{\partial s},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \sigma} \equiv -\mathbf{v} \nabla s.$$

Из остальных уравнений видоизменяется только

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \rho} \equiv -\frac{v^2}{2} + \frac{\lambda}{\rho} (\mathbf{v} \nabla) \mu + \frac{\sigma}{\rho} (\mathbf{v} \nabla) s + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}.$$

Нетрудно проверить, что все законы сохранения, включая уравнение переноса тепла, выполняются. Источником поля σ является поле температур:

$$\frac{d}{dt} \frac{\sigma}{\rho} = T.$$

Иногда удобно каноническим преобразованием исключить часть, связанную с однородным температурным полем $\sigma_0 = \rho_0 T t$. В гамильтониане при этом $\varepsilon \rightarrow \varepsilon - T_0 \rho s$.

При наличии границы раздела аналогично предыдущему (см. (П.1.4)) с помощью производящего функционала

$$F(\zeta, \tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}; \varphi, \mu, s) = \int dV f(\zeta - z) (\varphi + \tilde{\lambda} \mu + \tilde{\sigma} s)$$

переходим к новым парам переменных [6g]:

$$(\zeta, \Psi \equiv [\rho(\varphi + \tilde{\lambda}\mu + \tilde{\sigma}s)]_{\zeta}), \quad (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}), \quad (\tilde{\sigma}, \tilde{s}), \quad (\text{П.1.8})$$

где $\sigma = \tilde{\sigma}f(\zeta - z)$, $\tilde{s} = sf(\zeta - z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \tilde{s}} \equiv -\text{div } \tilde{\sigma} \mathbf{v} + \rho(T - T_0),$$

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \tilde{\sigma}} \equiv -\mathbf{v} \nabla \tilde{s}.$$

Представление вихревых полей в отличие от баротропного или изэнтропического случая, по-видимому, однозначно (ср. [13a]):

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left[\nabla \frac{\lambda}{\rho}, \nabla \mu \right] + \left[\nabla \frac{\sigma}{\rho}, \nabla s \right]. \quad (\text{П.1.9})$$

Введем теперь “поверхностные” канонические переменные в магнитной гидродинамике. В объемных уравнениях ограничимся гамильтоновыми переменными (ρ, φ) и (\mathbf{H}, \mathbf{s}) , задающими представление скорости вида [2b,f]

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} [\mathbf{H}, \text{rots}] + \nabla \varphi \quad (\text{П.1.10})$$

при гамильтониане

$$H = \int dV \left(\frac{\rho v^2}{2} + \varepsilon(\rho) + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right).$$

Совершая преобразования (4.10), (4.11), введем границу раздела и перейдем к новым каноническим переменным (ζ, ψ) и $(\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{s}})$, где

$$\rho = f(\zeta - z), \quad \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}f(\zeta - z). \quad (\text{П.1.11})$$

Выбирая производящий функционал вида

$$F(\varphi, \mathbf{s}; \zeta, \mathbf{H}) = \int dV f(\zeta - z)(\varphi + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{s}),$$

найдем после предельного перехода [6g]

$$\Psi = \left[\rho(\varphi + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{s}) \right]_{\zeta}, \quad \tilde{\mathbf{s}} = sf(\zeta - z). \quad (\text{П.1.12})$$

Процедура предельного перехода позволяет получить граничные условия на разрыве и объемные уравнения для новых переменных. Так, из уравнения для магнитного поля следует

$$f \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} - \text{rot}[\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{H}}] \right) + f' \left\{ \tilde{\mathbf{H}} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \zeta - v_z \right) + \mathbf{v} (\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{e}_z - \nabla \zeta)) \right\} = 0,$$

откуда получаем, в частности, граничные условия для магнитного поля, т. к. f' стремится к δ -функции на границе раздела.

Для потенциала $\tilde{\mathbf{s}}$ аналогичным образом получается объемное уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{s}}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \tilde{\mathbf{H}}} \equiv [\text{rot } \tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{v}] + f^2 \frac{\tilde{\mathbf{H}}}{4\pi}$$

и граничное условие

$$[\tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{v}]_{\zeta} = 0.$$

Приложение 2.

Матричные элементы гамильтониана взаимодействия для потенциального движения жидкости со свободной границей [2d]

В пренебрежении линейным затуханием уравнения движения тяжелой несжимаемой жидкости (4.6), (4.7) являются гамильтоновыми [2b] и в переменных a_k^{σ} могут быть получены из гамильтониана

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (\text{П.2.1})$$

стандартным способом: $\dot{a}_{\mathbf{k}}^{\sigma} = i\sigma\delta H/\delta a_{\mathbf{k}}^{-\sigma}$.
При этом

$$H_2 = \frac{1}{2!} \sum_1 \omega_{k_1} a_{\mathbf{k}_1}^{\sigma_1} a_{\mathbf{k}_1}^{-\sigma_1}, \quad (\text{П2.2})$$

$$H_3 = \frac{1}{3!} \sum_{1,2,3} V(1,2,3) a_1 a_2 a_3 \delta \left(\sum_{l=1}^3 \sigma_l \mathbf{k}_l \right), \quad (\text{П2.3})$$

$$H_4 = \frac{1}{4!} \sum_{1,2,3,4} V(1,2,3,4) a_1 a_2 a_3 a_4 \delta \left(\sum_{l=1}^4 \sigma_l \mathbf{k}_l \right). \quad (\text{П2.4})$$

Здесь $V(1,2,3) \equiv V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$ и т. п. Явные выражения для матричных элементов в случае конечной глубины жидкости h имеют вид:

$$V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \tilde{k}_3} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum \hat{P} \frac{\tilde{k}_1}{\omega_1} \{ \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + \sigma_2 \sigma_3 \tilde{k}_2 \tilde{k}_3 \}, \quad (\text{П2.5})$$

$$V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} = \frac{1}{(8\pi)^2} \left(\frac{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \tilde{k}_3 \tilde{k}_4}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum \hat{P} \left\{ \frac{\sigma_1 \sigma_2 \omega_1 \omega_2}{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2} Y(\sigma_1 \mathbf{k}_1, \sigma_2 \mathbf{k}_2 | \sigma_3 \mathbf{k}_3, \sigma_4 \mathbf{k}_4) - \right. \\ \left. - \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \frac{\alpha}{\rho} (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4) \right\}, \quad (\text{П2.6})$$

где $\sum \hat{P}$ – сумма по всем перестановкам аргументов $\left\{ \begin{matrix} \sigma_l \\ \mathbf{k}_l \end{matrix} \right\}$, $\tilde{k} = kthkh$,

$$Y(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4) = 2(k_1^2 \tilde{k}_2 + k_2^2 \tilde{k}_1) -$$

$$-k_1 k_2 [|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4| + |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4|]. \quad (\text{П2.7})$$

Функция Y симметрична по перестановкам аргументов $\left(\begin{matrix} \sigma \\ \mathbf{k} \end{matrix} \right)$ в выделенных парах и обладает зеркальной симметрией. Матричные элементы $V^{(3)}$ и $V^{(4)}$ обладают симметрией относительно любых перестановок аргументов $\left(\begin{matrix} \sigma \\ \mathbf{k} \end{matrix} \right)$, а в силу вещественности полей $\zeta(\mathbf{r}, t)$

и $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ $V_k^{-\sigma} = (V_k^{\sigma})^*$, причем за счет выбора представления $V_k^{-\sigma} = V_k^{\sigma} = (V_k^{\sigma})^*$. Кроме того, они инвариантны относительно одновременного вращения набора векторных аргументов. Из (П2.6), (П2.7) в предельном случае глубокой воды ($kh \gg 1$, $\tilde{k} \rightarrow k$) получаем ($V_l \equiv \omega_l/k_l$):

$$V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} (V_1 V_2 V_3)^{1/2} \sum \hat{P} \frac{1}{V_1} \{ \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + \sigma_2 \sigma_3 k_2 k_3 \}, \quad (\text{П2.8})$$

$$V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} = \frac{1}{2(8\pi)^2} (V_1 V_2 V_3 V_4)^{-1/2} \sum \hat{P} \sigma_1 \sigma_2 \left\{ \omega_1 \omega_2 \times \right. \\ \left. \times X(\sigma_1 \mathbf{k}_1, \sigma_2 \mathbf{k}_2 | \sigma_3 \mathbf{k}_3, \sigma_4 \mathbf{k}_4) - \sigma_3 \sigma_4 \frac{\alpha}{\rho} (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4) \right\}, \quad (\text{П2.9})$$

$$X(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4) = 2(k_1 + k_2) - \\ - [|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4| + |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4|]. \quad (\text{П2.10})$$

В капиллярной области $k \gg k_0$ тройной матричный элемент, определяющий вероятность распадов и слияний,

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{+-} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^{1/4} (kk_1k_2)^{1/4} \left[k^{-1/2} (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + k_1k_2) + k_1^{-1/2} (\mathbf{k}\mathbf{k}_2 + kk_2) + k_2^{-1/2} (\mathbf{k}\mathbf{k}_1 + kk_1) \right] \propto k^{9/4},$$

(П2.11)

$$k \gg k_0, h^{-1}$$

является однородной функцией степени 9/4. Асимптотика (П2.11) при одном малом аргументе дается выражением

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{+-} \propto k_1^{7/4} k^{1/2}, \quad k, k_2 \gg k_1 \gg k_0, h^{-1}. \quad (\text{П2.12})$$

Взаимодействие капиллярных и гравитационных волн определяется асимптотикой

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{q}}^{+--} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} g^{1/4} q^{-1/4} [\mathbf{k}\mathbf{q} + O(q)^2],$$

(П2.13)

$$k \gg k_0 \gg q \gg h^{-1}.$$

Рассеяние (прямое) гравитационных волн описывается матричным элементом третьей степени однородности

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{+++} \propto k^3, \quad k_0 \gg k, k_1, k_2, k_3 \gg h^{-1}. \quad (\text{П2.14})$$

Матричный элемент нерезонансного (тройного) взаимодействия гравитационных волн, дающий вклад в вероятность рассеяния во втором порядке теории возмущений, равен

$$V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} = \frac{g^{1/4} (k_1k_2k_3)^{-1/4}}{4\pi\sqrt{2}} \left[k_1^{1/2} (\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 + \sigma_2\sigma_3k_2k_3) + k_2^{1/2} (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3 + \sigma_1\sigma_3k_1k_3) + k_3^{1/2} (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + \sigma_1\sigma_2k_2k_3) \right] \approx k^{7/4},$$

(П2.15)

$$k_0 \gg k_{1,2,3} \gg h^{-1}$$

и является однородной функцией степени 7/4.

Редуцированный матричный элемент $\tilde{V}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}^{++++}$, содержащий слагаемое со вкладом от тройных процессов во втором порядке теории возмущений (см. [2d, 5d, 15e] и ниже), в соответствии с (П2.15), (П2.14) также является однородной функцией третьей степени. Его асимптотика при двух малых аргументах –

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}^{++++} \propto k_1k_3(kk_2)^{1/2},$$

(П2.16)

$$k_0 \gg k, k_2 \gg k_1, k_3 \gg h^{-1}.$$

Асимптотическое выражение для “полудиагонального” матричного элемента –

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1}^{+--+} = \frac{1}{8\pi^2} (kk_1)^{3/2} [1 + O(k_1/k)], \quad k_1 \ll k. \quad (\text{П2.17})$$

Необходимые для определения сходимости соответствующие тройные матричные элементы равны:

$$V_{-\mathbf{k},\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{+++} = \frac{\sqrt{V_1}}{2\pi\sqrt{2}} kk_1 [1 + O(k_1/k)], \quad (\text{П2.18})$$

$$V_{-\mathbf{k},\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{+--} = -\frac{\sqrt{V_1}}{2\pi\sqrt{2}} kk_1 [1 + O(k_1/k)], \quad (\text{П2.19})$$

$$V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{-++} = \frac{\sqrt{V_1}}{2\pi\sqrt{2}} (\mathbf{k}\mathbf{k}_1) [1 + O(k_1/k)], \quad (\text{П2.20})$$

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{--+} = \frac{\sqrt{V_1}}{2\pi\sqrt{2}} (\mathbf{k}\mathbf{k}_1) [1 + O(k_1/k)]. \quad (\text{П2.21})$$

Здесь $k_0 \gg k \gg k_1 \gg h^{-1}$, $\mathbf{k}_\pm \equiv \mathbf{k} \pm \mathbf{q}\mathbf{k}_1$,

$V_1 \equiv \omega_{k_1}/k_1$. Из (П2.17)-(П2.21) получаем

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1}^{+++} = \frac{k_1(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{2\pi^2}, \quad k_1 \ll k, \quad (\text{П2.22})$$

что является уточнением (П2.16).

Приведем также предельные выражения для мелкой воды $kh \ll 1$. В капиллярной области спектра тройной матричный элемент, отвечающий распадам, равен

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{+-} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\alpha}{\rho h} \right)^{1/4} (k^2 + \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2), \quad (\text{П2.23})$$

$$h^{-1} \gg k \gg k_0.$$

Поскольку в этой области закон дисперсии капиллярных волн квадратичен: $\omega_k = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} hk^2$, то в вероятности перехода, учитывающей закон сохранения энергии $\omega = \omega_1 + \omega_2$, последнее слагаемое в (П2.23) обращается в нуль в силу взаимной ортогональности векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 .

Для гравитационных волн на мелкой воде $k \ll k_0$, h^{-1} :

$$V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{c}{h}} (k_1k_2k_3)^{-1/2} [k_1(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3) + k_2(\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1) + k_3(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)] (1 + O(kh)^2), \quad c = \sqrt{gh}, \quad (\text{П2.24})$$

$$V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} = \frac{h}{(8\pi)^2} (k_1k_2k_3k_4)^{1/2} \sum \hat{P} \sigma_1\sigma_2 \{ 2 k_1k_2 - [(\sigma_1\mathbf{k}_1 + \sigma_3\mathbf{k}_3)^2 + (\sigma_1\mathbf{k}_1 + \sigma_4\mathbf{k}_4)^2] \} [1 + O(kh)^2]. \quad (\text{П2.25})$$

Из (П2.24), (П2.25) следует обращение в нуль редуцированного матричного элемента $V^{(4)}$ в главном приближении по $kh \ll 1$ и углу рассеяния в соответствии с общим результатом [2g].

При рассмотрении нераспадных процессов удобно производить каноническое преобразо-

вание, устраняющее из гамильтониана H кубические члены, которые не дают вклада в вероятность перехода в первом порядке теории возмущений. В данном случае такое преобразование не может быть проведено во всем \mathbf{k} -пространстве из-за появления расходимостей, связанных с распадным характером спектра в капиллярной области при $k > \bar{k}$. Но можно произвести преобразование к новым переменным, символически записываемое в виде²¹

$$A_{\mathbf{k}}^\sigma = e^{-S} a_{\mathbf{k}}^\sigma e^S, \quad (\text{П2.26})$$

так, чтобы исключить из гамильтониана лишь запрещенные тройные процессы [2d]. При этом $A_{\mathbf{k}}^\sigma$ будут отличаться от $a_{\mathbf{k}}^\sigma$ только при $k < \bar{k}$. Для этого выделим в H_3 (5.11) слагаемое \bar{H}_3 , отвечающее запрещенным процессам. В новых переменных гамильтониан $\tilde{H}(A) \equiv H(a) = e^{S(A)} H(A) e^{-S(A)}$ не должен содержать \bar{H}_3 . Раскладывая e^S в ряд по малому S , получим

$$\tilde{H} = H_2 + (H_3 + [S, H_2]) + \left(\frac{1}{2} [S[S, H_2]] + [S, H_3] + H_4 \right) + O(A^5), \quad (\text{П2.27})$$

где квадратные скобки означают скобку Пуассона деленную на i , и вычисляются с использованием инвариантных относительно канонических преобразований соотношений:

²¹Заметим, что при выводе канонического преобразования удобно использовать квантовую аналогию, сопоставляя рассматриваемой классической системе Бозе-газ с гамильтонианом (5.11), где $a_{\mathbf{k}}^\sigma$ представляют собой операторы рождения $a_{\mathbf{k}}^+$ и уничтожения $a_{\mathbf{k}}^-$ с правилами коммутации (П2.28). Классическому каноническому преобразованию соответствует унитарное преобразование (П2.26), где S – антиэрмитова матрица. Раскладывая e^S в ряд по операторам S , можно прийти к выражению (П2.29), которое соответствует классической форме записи, если коммутант заменить скобкой Пуассона (П2.28).

$$\frac{1}{i} \{a_{\mathbf{k}}^\sigma, a_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}\} \equiv [a_{\mathbf{k}}^\sigma, a_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}] = \sigma' \delta_{\sigma, -\sigma'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (\text{П2.28})$$

Как видно из (П2.27), член \bar{H}_3 исчезает, если определить S равенством

$$\bar{H}_3 + [S, H_2] = 0, \quad (\text{П2.29})$$

что приводит к

$$S = \frac{1}{3} \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} d\mathbf{3} S_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} a_{\mathbf{k}_1}^{\sigma_1} a_{\mathbf{k}_2}^{\sigma_2} a_{\mathbf{k}_3}^{\sigma_3} \delta \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{k}_i \right), \quad (\text{П2.30})$$

$$S_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} = \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_i \omega_i \right)^{-1} \bar{V}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}.$$

Преобразование (П2.26) является каноническим, так как в силу (П2.30) и (5.9) $S_{\mathbf{k}}^\sigma = -S_{\mathbf{k}}^{-\sigma}$ (т. е. S – антиэрмитова, а e^S – унитарная матрица).

Таким образом приходим к эффективному гамильтониану с редуцированными матричными элементами \tilde{V}

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^* A_{\mathbf{k}} + \\ & + \frac{1}{3} \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} d\mathbf{3} \tilde{V}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} A_{\mathbf{k}_1}^{\sigma_1} A_{\mathbf{k}_2}^{\sigma_2} A_{\mathbf{k}_3}^{\sigma_3} \delta \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{k}_i \right) + \\ & + \frac{1}{4} \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} d\mathbf{3} d\mathbf{4} \tilde{V}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4} A_{\mathbf{k}_1}^{\sigma_1} A_{\mathbf{k}_2}^{\sigma_2} A_{\mathbf{k}_3}^{\sigma_3} A_{\mathbf{k}_4}^{\sigma_4} \delta \left(\sum_{i=1}^4 \sigma_i \mathbf{k}_i \right), \end{aligned} \quad (\text{П2.31})$$

где новые нормальные координаты связаны со старыми соотношениями:

$$A_{\mathbf{k}}^\sigma = a_{\mathbf{k}}^\sigma - [S, a_{\mathbf{k}}^\sigma], \quad (\text{П2.32})$$

$$A_{\mathbf{k}}^{-\sigma} = a_{\mathbf{k}}^{-\sigma} + \sigma \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} \delta \left(\sum_{i=0}^2 \sigma_i \mathbf{k}_i \right) \bar{V}_{\mathbf{k} \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma \sigma_2 \sigma_3} \left(\sum_{i=0}^2 \sigma_i \omega_i \right)^{-1} a_{\mathbf{k}_1}^{\sigma_1} a_{\mathbf{k}_2}^{\sigma_2}.$$

Эффективный матричный элемент равен

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4} = & V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4} + \\ & + \frac{2}{4!} \sum \hat{P} \int d\mathbf{5} \sigma_5 \bar{V}_{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}^{\sigma_5 \sigma_3 \sigma_4} \bar{V}_{\mathbf{k}_5 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{-\sigma_5 \sigma_1 \sigma_2} \frac{\delta(\sigma_1 \mathbf{k}_1 + \sigma_2 \mathbf{k}_2 - \sigma_3 \mathbf{k}_3)}{\sigma_1 \omega_1 + \sigma_2 \omega_2 - \sigma_3 \omega_3}. \end{aligned} \quad (\text{П2.33})$$

При этом матричный элемент \bar{V} отвечает запрещенным процессам:

$$\bar{V}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} = \begin{cases} V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}, & \text{если } k_{1,2,3} < \bar{k}, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (\text{П2.34})$$

а $\tilde{V} \equiv V - \bar{V}$ – разрешенным тройным процессам.

Содержание обзора в общих чертах соответствует курсу лекций, читавшихся автором в Харьковском национальном университете.

В обзоре использованы совместные работы с А. В. Кацем, которому автор благодарен за сотрудничество. Автор благодарен также А. М. Булгакову и А. С. Ковалеву, прочитавшим рукопись и сделавшим полезные замечания.

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS (грант 00-00292).

Литература

- [1]
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. Москва, ГИФМЛ, 1958, 206 с.
 - В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. Москва, Наука, 1974, 431 с.
 - А. С. Бакай, Ю. П. Степановский. Адиабатические инварианты. Киев, Наукова думка, 1981, 238 с.
 - А. Лихтенберг, М. Либман. Регулярная и стохастическая динамика. Москва, Мир, 1984, 528 с.
 - М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. Введение в теорию колебаний и волн. Москва, Наука, 1984, 432 с.
 - Г. М. Заславский. Стохастичность динамических систем. Москва, Наука, 1984, 271 с.

- g) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Гидродинамика. Москва, Наука, 1986, 736 с.
- h) В. С. Львов. Нелинейные спиновые волны. Москва, Наука, 1987, 271 с.
- i) А. М. Косевич, А. С. Ковалев. Введение в нелинейную физическую механику. Киев, Наукова Думка, 1989, 295 с.
- [2]
- a) В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1971, **60**, с. 1714-1726.
- b) В. Е. Захаров. Изв. вузов. Радиофизика. 1974, **17**, №4, с. 431-453.
- c) Б. Б. Кадомцев, В. М. Конторович. Изв. вузов. Радиофизика. 1974, **17**, №4, с. 511-540.
- d) А. В. Кац и В. М. Конторович. ПМТФ. 1974, №6, с. 97-106.
- e) В. П. Гончаров, В. И. Павлов. Проблемы гидродинамики в гамильтоновом описании. Москва, Изд. МГУ, 1993, 197 с.
- f) В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн. УФН. 1997, **167**, №11, с. 1137-1167.
- [3]
- a) Э. Скотт. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. Москва, Сов. радио, 1977, 368 с.
- b) В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: Метод обратной задачи. Москва, Наука, 1980, 319 с.
- c) Солитоны. Под ред. Р. Буллофа, Ф. Кодри. Москва, Мир, 1983, 408 с.
- d) М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. Москва, Мир, 1987, 480 с.
- f) А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. Москва, Мир, 1989, 324 с.
- [4]
- a) Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. Москва, Наука, 1979, 759 с.
- b) М. Тода. Теория нелинейных решеток. Москва, Мир, 1984, 262 с.
- c) Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. Спектральные преобразования и солитоны. Москва, Мир, 1985, 469 с.
- d) Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. Москва, Наука, 1986, 527 с.
- e) Advances in Nonlinear Mathematics and Science. Physica D. 2001, **152-153**, pp. 1-822.
- [5]
- a) J. W. Miles. J. Fluid Mech. 1957, **3**, pp. 185-204.
- b) В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1966, **51**, с. 1107-1114; ПМТФ. 1968, №2, с. 86-94.
- c) О. М. Филлипс. Динамика верхнего слоя океана. Москва, Мир, 1969, 268 с.
- d) Г. Юэн, Б. Лейк. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. Москва, Мир, 1987, 180 с.
- e) В. П. Красицкий. ЖЭТФ. 1990, **71**, №5, с. 1644-1655.
- f) Ю. А. Степанянц, А. Л. Фабрикант. Распространение волн в сдвиговых потоках. Москва, Наука, 1996, 240 с.
- g) С. Г. Гестрин, В. М. Конторович. Радиофизика и радиоастрономия. 1997, **2**, №4, с. 419-438.
- h) В. Е. Захаров, В. Г. Харитонов. ПМТФ, 1970, №5, с. 45-49.
- [6]
- a) Г. Ламб. Гидродинамика. Москва, ГТТИ, 1947, (раздел "Преобразование Клебша"), с. 312-314.
- b) Б. И. Давыдов. ДАН СССР. 1949, **69**, с. 165-168.
- c) C. C. Lin. Liquid helium. Proc. Int. School of physics, Course XXI, Acad. Press, N. Y. (1963).
- d) R. I. Seliger, G. B. Whitham. Proc. R. Soc. **A305**, No. 1 (1968). Перевод в сб. Механика. 1969. №5, с. 99-123.
- e) Ю. А. Синицын, В. М. Конторович. Взаимодействие длинных волн и мелкомасштабной турбулентности. В сб. Исследования турбулентной структуры океана. Севастополь, Изд. МГИ АН УССР, 1975, с. 96.
- f) В. М. Конторович. Изв. вузов. Радиофизика. 1976, **19**, с. 872-879.
- g) В. М. Конторович, Х. Кравчик, В. Тиме. Препринт ИРЭ АН УССР. Харьков, 1980, №158, 12 с.; Сб. "Взаимодействие и самовоздействие волн в нелинейных средах". Часть II. Душанбе, Изд-во Дошиш, 1988, с. 73-77.
- h) А. В. Кац и В. М. Конторович. ФНТ. 1998, **23**, №1, с. 120-128.
- i) A. V. Kats. Physica D. 2001, **152-153**, pp. 459-474.
- [7]
- a) Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман. УФН. 1971, **103**, с. 193-232.
- b) В. И. Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Москва, Наука, 1973, 175 с.
- c) Б. Б. Кадомцев. Коллективные явления в плазме. Москва, Наука, 1976, 238 с.
- d) Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. Москва, Мир, 1977, 622 с.
- e) П. Бхатнагар. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. Москва, Мир, 1983, 136 с.
- [8]
- a) В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко. ДАН СССР. 1966, **170**, с. 1292-1295.
- b) В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1966, **51**, с. 688-696; 1972, **62**, с. 1745-1759.
- c) В. Е. Захаров, Р. З. Сагдеев. ДАН СССР. 1970, **192**, с. 297-300.
- d) А. В. Кац и В. М. Конторович. Письма в ЖЭТФ. 1971, **14**, с. 392-395.
- f) В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1976, **71**, с. 2104-2112.
- g) А. В. Кац и В. М. Конторович. ЖЭТФ. 1977, **73**, с. 2157-2168.

- h) А. В. Кац и В. М. Конторович. Изв. вузов. Радиофизика. 1977, **20**, с. 1112-1114.
- i) А. М. Балк, В. Е. Захаров, С. В. Назаренко. ЖЭТФ. 1990, **98**, с. 446-467.
- k) V. E. Zakharov, V. S. L'vov, G. Falkovich. Kolmogorov Spectra of Turbulence. Wave Turbulence. N. Y., Springer-Verlag, 1992, 330 pp.
- l) У. Фриш, Турбулентность. Наследие Колмогорова. Москва, Фазис, 1998, 345 с.
- [9]
- a) L. I. Vinokurov, A. V. Kats and V. M. Kontorovich. J. Stat. Phys. 1985, **38**, pp. 217-229.
- b) A. Cavaliere, S. Colofrancesco and N. Menci. Astrophys. J. 1992, **392**, pp. 41-44.
- c) V. M. Kontorovich. Astron. Astrophys. Trans. 1994, **5**, pp. 259-278.
- d) V. M. Kontorovich, D. S. Krivitsky and A. V. Kats. Physica D. 1995, **87**, pp. 290-294.
- e) D. S. Krivitsky and V. M. Kontorovich. Astron. Astrophys. 1997, **327**, pp. 921-929.
- f) V. M. Kontorovich. Physica D. 2001, **152-153**, pp. 676-681.
- [10]
- a) И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан. Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951, **15**, №4, с. 309-360.
- b) Б. Я. Левин. ДАН СССР. 1956, **106**, с. 187-190.
- c) В. А. Марченко. ДАН СССР. 1955, **104**, с. 695-698.
- d) В. А. Марченко. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев, Наукова думка, 1977, 332 с.
- e) N. E. Zabusky, M. D. Kruskal. Phys. Rev. Lett. 1965, **15**, p. 240.
- f) C. S. Gardner, I. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura. Phys. Rev. Lett. 1967, **19**, pp. 1095-1098.
- g) В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. ЖЭТФ. 1971, **61**, с. 118-134.
- h) В. Е. Захаров. В книге: И. А. Кунин. Теория упругих сред с микроструктурой. Москва, Наука, 1975, гл. 5, с. 226.
- [11]
- П. Дирак. Лекции по квантовой механике. Москва, Мир, 1968, 84 с.
- [12]
- a) В. Л. Покровский, И. М. Халатников. ЖЭТФ. 1976, **71**, с. 1974-1986.
- b) H. Elze, T. Codama, et al. ArXiv hep-ph / 9809570.
- [13]
- a) E. A. Kuznetsov, A. V. Mikhailov. Phys. Lett. 1980, **77A**, p. 37.
- b) H. K. Moffat. J. Fluid Mech. 1981, **106**. Перевод в сб.: "Современная гидродинамика (успехи и проблемы)", Москва, Мир, 1984, с. 49.
- [14]
- a) Л. И. Седов. Успехи мат. наук. 1965, **20**, с. 121.
- b) В. Л. Бердичевский. Вариационные принципы механики сплошной среды. Москва, Наука, 1983, 448 с.
- [15]
- a) M. S. Longuet-Higgins. J. Fluid Mech. 1989, **200**, pp. 451-470; 1993, **252**, pp. 703-711.
- b) F. Dias, G. Iooss. Physica D. 1993, **65**, pp. 399-423.
- c) В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов. ЖЭТФ. 1998, **113**, с. 1892.
- d) Е. А. Кузнецов. ЖЭТФ. 1999, **116**, №7, с. 299-317.
- e) F. Dias, C. Kharif. Ann. Rev. Fluid Mech. 1999, **31**, pp. 301-346.
- f) M. Perlin, W. Schultz. Ann. Rev. Fluid Mech. 2000, **32**, pp. 241-274.
- g) А. М. Косевич. ФНТ. 2000, **26**, №6, с. 620-625.
- h) A. R. Champneys, B. A. Malomed, J. Yang, D. J. Kaup. Physica D. 2001, **152-153**, pp. 340-354.
- [16]
- И. М. Лифшиц. Физика реальных кристаллов и неупорядоченных систем. Москва, Наука, 1987, 552 с.
- [17]
- Л. Д. Фаддеев. Гамильтонова интерпретация метода обратного преобразования рассеяния. В сб.: Солитоны. Под ред. Р. Буллафа и Ф. Кодри. Москва, Мир, 1983, с. 363-379.
- [18]
- a) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Москва, Наука, 1988, 512 с.
- b) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. Москва, Наука, 1980, 704 с.
- c) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. I. Москва, Наука, 1974, 584 с.
- [19]
- a) L. L. Bazelyan, N. Yu. Goncharov, V. V. Zaitsev, et al. Solar Physics. 1974, **39**, pp. 223-231.
- b) М. Ван-Дайк. Альбом течений жидкости и газа. Москва, Мир, 1986, 184 с.
- c) К. А. Постнов. УФН. 1999, **169**, №5, с. 545-558.
- d) Н. Бломберген. Нелинейная оптика. Москва, Мир, 1966, 424 с.
- [20]
- a) Дж. Бэтчелор. Введение в динамику жидкостей. Москва, Мир, 1973, 758 с.
- b) Л. М. Милн-Томсон. Теоретическая гидромеханика. Москва, Мир, 1964, 556 с.
- c) В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов. Уединенные волны в плазме и атмосфере. Москва, Энергоиздат, 1989, 200 с.
- d) Ю. А. Степанянц, А. П. Фабрикант. Распространение волн в сдвиговых потоках. Москва, Наука, 1996, 240 с.
- e) В. М. Черноусенко, В. М. Куклин, И. П. Панченко. Структуры в неравновесных средах. В сб.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Киев, Наукова Думка, 1990, с. 333-416.

- f) Г. Дим, Н. Забуски. Стационарные V-состояния, их взаимодействие, возврат и разрушение. В сб.: Солитоны в действии. Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. Москва, Мир, 1981, с. 289-304.
- g) Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан. Письма в ЖЭТФ, 1998, **67**, с. 1050-1020; ЖЭТФ, 2000, **118**, с. 893-905.
- h) В. В. Козлов. Общая теория вихрей. Изд. дом "Удмуртский университет", 1998, 239 с.
- i) В. Ф. Копьев, С. А. Чернышев. УФН. 2000, **170**, №7, с. 713-742.

**Linear and Nonlinear Waves
(an Elementary Introduction to Theory
of Hamilton's Variables with Applications
to Plasma Physics and Astrophysics)**

V. M. Kontorovich

By way of examples of volume waves as well as on the surface of a liquid the Hamiltonian variables for continuous media, widely used in plasma physics, hydrodynamics, and field theory are introduced. The regular way of introducing such variables on different kinds of surfaces including media with breaks are considered with the help of a variation principle and canonical transformations. The method of the inverse scattering problem is given as the nontrivial example of canonical transformation to variable "action-angle". The examples of linear and nonlinear instabilities are considered.

The second part of the review will be devoted to the kinetic equations used for the weak turbulence description, including exact methods of obtaining the nonequilibrium flux distributions. The applications of the kinetic Smoluchowsky equation to the galaxy merging processes and their mass spectrum formation are considered. The nonlocal distributions and partially coherent systems are also considered.