

Расчет коэффициентов отражения и прохождения плоской электромагнитной волны для неоднородного ферритного слоя методом конечных разностей

О. В. Багацкая, М. П. Перепечай, С. Н. Шульга

*Харьковский национальный университет
61077, Харьков-77, пл. Свободы, 4
E-mail: SergeyN.Shulga@kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 7 октября 1999 г.

В данной работе построено численно-аналитическое решение задачи дифракции плоской монохроматической волны на слоисто-неоднородной анизотропной пластине с произвольной ориентацией оптической оси. Получены компактные скаляризованные выражения для амплитуд электромагнитного поля, а также сформулирована соответствующая задача для скалярных потенциалов в виде системы двух связанных дифференциальных уравнений. Численное решение системы найдено с помощью метода конечных разностей. Показано влияние неоднородности и анизотропии слоя на его рассеивающие свойства.

У даній роботі побудовано чисельно-аналітичне рішення задачі дифракції плоскої монохроматичної хвилі на шарувато-неоднорідній анізотропній пластині з довільною орієнтацією оптичної осі. Одержано компактні скаляризовані вирази для амплітуд електромагнітного поля, а також сформульовано відповідну задачу для скалярних потенціалів у вигляді системи двох зв'язаних диференціальних рівнянь. Чисельне розв'язання системи отримано за допомогою методу скінченних різниць. Показано вплив неоднорідності та анізотропії шару на його розсіюючі властивості.

В последние годы уделяется большое внимание решению электромагнитных задач в анизотропных средах в связи со все более частым применением анизотропных материалов в оптике световодов, микроволноводной и антенной технике. Во многих случаях пространственная неоднородность материала является также существенной. Важный вклад в развитие электромагнитной теории распространения волн в однородных и кусочно-неоднородных средах сделан в работах [1-3]. Для расчета распространения волн в слоистых анизотропных средах широко используется метод скаляризации электромагнитного поля. К настоящему времени скаляризационный подход разработан для одноосных [4-6], гиротропных [7,8] и бианизотропных слоистых сред [9]. В данной работе метод скаляризации развивается для случая анизотропии более общего вида.

Пусть анизотропная плоскослоистая среда представляет собой слой $-b < z < 0$, $-\infty < x, y < +\infty$. В декартовой системе координат x, y, z тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости среды $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$ имеют по девять компонент. Компоненты тензоров являются комплексными непрерывными функциями переменной z на интервале $-b < z < 0$:

$$\epsilon_{pq} \equiv \epsilon_{pq}(z), \quad \mu_{pq} \equiv \mu_{pq}(z), \quad (p, q = x, y, z), \quad (1)$$

кроме точек z_j ($j=1, 2, \dots, N$), соответствующих поверхностям раздела неоднородной среды $z=z_j$. В точках $z=0$ и $z=-b$ слоистая среда граничит с импедансными поверхностями. Эти поверхности характеризуются диадами импеданса $\hat{L}^{(a)}$ и $\hat{L}^{(u)}$, соответственно. В координатной системе x, y диады импеданса представляются в виде:

$$\hat{L}^{(a,u)} = \begin{bmatrix} L_{xx}^{(a,u)} & L_{xy}^{(a,u)} \\ L_{yx}^{(a,u)} & L_{yy}^{(a,u)} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Для общности полагаем, что компоненты диады импеданса могут принимать комплексные значения. В дальнейшем будем использовать безындексные (диадные) обозначения для тензоров второго ранга.

Принимая во внимание гармоническую зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$, запишем два первых уравнения Максвелла для комплексных векторов $\vec{E}(\vec{R})$, $\vec{H}(\vec{R})$:

$$\nabla \times \vec{E} - ik_0 \hat{\mu}(z) \cdot \vec{H} = -(4\pi/c) \vec{M}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{H} + ik_0 \hat{\epsilon}(z) \cdot \vec{E} = (4\pi/c) \vec{J}. \quad (4)$$

Эти уравнения удовлетворяются во всем пространстве, кроме границ раздела. Здесь $\vec{R} = (x, y, z)$; k_0 и c – волновое число и скорость света в вакууме ($k_0 = \omega/c$); $\vec{J} \equiv \vec{J}(\vec{R})$ и $\vec{M} \equiv \vec{M}(\vec{R})$ – соответственно объемные плотности сторонних электрического и магнитного токов в среде, не пересекающих границ раздела. Величины $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$ – диадные функции переменной z .

Из уравнений Максвелла следует, что на всех поверхностях раздела слоистой среды выполняются условия непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля:

$$\{\vec{z}_0 \times \vec{E}_\perp\} = 0, \quad \{\vec{z}_0 \times \vec{H}_\perp\} = 0, \quad (5)$$

$(z = z_j, j = 1, 2, \dots, N).$

Здесь \vec{z}_0 – единичный вектор вдоль оси z ; $\vec{E}_\perp \equiv \vec{E}_\perp(\vec{R})$, $\vec{H}_\perp \equiv \vec{H}_\perp(\vec{R})$ – компоненты векторов $\vec{E}(\vec{R})$, $\vec{H}(\vec{R})$, ортогональные \vec{z}_0 . Фигурные скобки используются в статье для обозначения оператора $\{f(z)\} \equiv f(z+0) - f(z-0)$ для любой функции переменной z . На верхней $z=0$ и нижней $z=-b$ границах неоднородного слоя зададим граничные условия Леонтовича-Щукина:

$$\vec{E}_\perp + \hat{L}^{(a)} \cdot \vec{z}_0 \times \vec{H}_\perp = 0 \quad (z = -0), \quad (6)$$

$$\vec{E}_\perp - \hat{L}^{(a)} \cdot \vec{z}_0 \times \vec{H}_\perp = 0 \quad (z = -b + 0). \quad (7)$$

Сконцентрируем наше внимание на случае, когда сторонние источники представляются в виде пространственных гармоник с волновым вектором $\vec{k} = (k_x, k_y, 0)$:

$$\vec{J}(\vec{R}) \equiv \vec{J}(\vec{k}, z) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (8)$$

$$\vec{M}(\vec{R}) \equiv \vec{M}(\vec{k}, z) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}).$$

В этих выражениях величины $\vec{J}(\vec{k}, z)$, $\vec{M}(\vec{k}, z)$ представляют собой векторные амплитуды источников, $k_{x,y}$ – произвольные комплекснозначные константы. Из уравнений (3)-(8) легко показать, что электромагнитное поле также

можно представить в виде пространственной гармоник:

$$\vec{E}(\vec{R}) \equiv \vec{E}(\vec{k}, z) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (9)$$

$$\vec{H}(\vec{R}) \equiv \vec{H}(\vec{k}, z) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}),$$

где $\vec{E}(\vec{k}, z)$, $\vec{H}(\vec{k}, z)$, определяют векторные амплитуды поля.

Введем правовинтовую базис векторов

$$\vec{a}_z = \vec{z}_0, \quad \vec{a}_l = \vec{n}, \quad \vec{a}_t = \vec{z}_0 \times \vec{n}, \quad (10)$$

где $\vec{n} = \vec{k}/k$ – единичный вектор; $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$; ветвь квадратного корня выбрана так, чтобы выполнялось условие $0 \leq \arg \sqrt{\cdot} < \pi$. В этих обозначениях \vec{n} – вектор, лежащий в плоскости $z=0$. Легко показать, что векторы, определяемые выражением (10), удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\vec{a}_\sigma \cdot \vec{a}_\tau = 0, \quad (\sigma \neq \tau), \quad (11)$$

где $\sigma, \tau = z, l, t$. Домножив скалярно уравнения Максвелла (3), (4) на единичные векторы \vec{a}_z , \vec{a}_l , после несложных преобразований векторной алгебры можно выразить величины $E_{z,l} = \vec{a}_{z,l} \cdot \vec{E}(k, z)$ и $H_{z,l} = \vec{a}_{z,l} \cdot \vec{H}(k, z)$ через скалярные потенциалы

$$e(\vec{k}, z) \equiv \vec{a}_t \cdot \vec{E}(\vec{k}, z), \quad h(\vec{k}, z) \equiv \vec{a}_l \cdot \vec{H}(\vec{k}, z) \quad (12)$$

и их первые производные по z . Поскольку окончательные выражения для $E_{z,l}$ и $H_{z,l}$ достаточно громоздки, мы здесь их не приводим. Разложим векторные амплитуды $\vec{E}(\vec{k}, z)$, $\vec{H}(\vec{k}, z)$ в базисе ортогональных векторов $\vec{a}_z, \vec{a}_l, \vec{a}_t$:

$$\vec{E}(\vec{k}, z) = \vec{V}_e(\vec{n}, z) e(\vec{k}, z) - \vec{W}_e(\vec{k}) h(\vec{k}, z) + (4\pi i / k_0 c) \hat{\alpha}_e(\vec{n}, z) \cdot \vec{J}(\vec{k}, z), \quad (13)$$

$$\vec{H}(\vec{k}, z) = \vec{V}_h(\vec{n}, z) h(\vec{k}, z) - \vec{W}_h(\vec{k}) e(\vec{k}, z) + (4\pi i / k_0 c) \hat{\alpha}_h(\vec{n}, z) \cdot \vec{M}(\vec{k}, z), \quad (14)$$

Данные формулы представляют собой искомые выражения для векторных амплитуд поля в

терминах потенциалов $e(\vec{\kappa}, z)$ и $h(\vec{\kappa}, z)$. Здесь $\vec{V}_\eta(\vec{n}, z)$ и $\hat{\alpha}_\eta(\vec{n}, z)$ – векторные и диадные функции соответственно; $\eta = \epsilon, \mu$; $\vec{W}_\eta(\vec{k})$ – векторный дифференциальный оператор, действующий по переменной z :

$$\vec{V}_\eta(\vec{n}, z) = \vec{z}_0 \times \vec{n} + \frac{1}{a_\eta(\vec{n}, z)} [b_\eta(\vec{n}, z)\vec{n} + c_\eta(\vec{n}, z)\vec{z}_0], \quad (15)$$

$$a_\epsilon(\vec{n}, z) \hat{\alpha}_\epsilon(\vec{n}, z) \equiv \vec{a}_1 \times \hat{\epsilon}(z) \times \vec{a}_1 = (\epsilon_{lz}\vec{n} - \epsilon_{ll}\vec{z}_0)\vec{z}_0 + (\epsilon_{zl}\vec{z}_0 - \epsilon_{zz}\vec{n})\vec{n}, \quad (16)$$

$$\vec{W}_\epsilon(\vec{\kappa}) = \frac{1}{a_\epsilon(\vec{n}, z)k_0} \times [(\epsilon_{zz}\vec{n} - \epsilon_{zl}\vec{z}_0)\hat{\partial}_z + k(\epsilon_{ll}\vec{z}_0 - \epsilon_{lz}\vec{n})], \quad (17)$$

$$a_\epsilon \rightarrow a_\mu, \quad \hat{\alpha}_\epsilon \rightarrow \hat{\alpha}_\mu, \quad \vec{W}_\epsilon \rightarrow \vec{W}_\mu, \quad (\epsilon \rightarrow \mu) \quad (18)$$

Скалярные величины $\epsilon_{\sigma\tau} \equiv \epsilon_{\sigma\tau}(\vec{n}, z)$, $\mu_{\sigma\tau} \equiv \mu_{\sigma\tau}(\vec{n}, z)$, ($\sigma, \tau = z, l, t$), фигурирующие в (15)-(18), представляют собой компоненты соответствующих диад $\hat{\epsilon}(z)$, $\hat{\mu}(z)$ (10):

$$\epsilon_{\sigma\tau}(\vec{n}, z) = \vec{a}_\sigma \cdot \hat{\epsilon}(z) \cdot \vec{a}_\tau, \quad \mu_{\sigma\tau}(\vec{n}, z) = \vec{a}_\sigma \cdot \hat{\mu}(z) \cdot \vec{a}_\tau. \quad (19)$$

Скалярные функции $a_\eta(\vec{n}, z)$, $b_\eta(\vec{n}, z)$ и $c_\eta(\vec{n}, z)$, ($\eta = \epsilon, \mu$) имеют следующий вид:

$$a_\epsilon = \epsilon_{zz}\epsilon_{ll} - \epsilon_{zl}\epsilon_{lz}, \quad b_\epsilon = \epsilon_{zl}\epsilon_{lz} - \epsilon_{zz}\epsilon_{ll}, \quad (20)$$

$$c_\epsilon = \epsilon_{ll}\epsilon_{zl} - \epsilon_{ll}\epsilon_{zl},$$

$$a_\epsilon \rightarrow a_\mu, \quad b_\epsilon \rightarrow b_\mu, \quad c_\epsilon \rightarrow c_\mu, \quad (\epsilon \rightarrow \mu).$$

Отметим, что ϵ_{zz} , μ_{zz} не зависят от \vec{n} : $\epsilon_{zz} \equiv \epsilon_{zz}(z)$, $\mu_{zz} \equiv \mu_{zz}(z)$.

Умножим скалярно уравнения Максвелла (3), (4) на вектор \vec{a}_1 . Подставим в это соотношение прямые формулы для $E_{z,l} = \vec{a}_{z,l} \cdot \vec{E}(\vec{\kappa}, z)$ и $H_{z,l} = \vec{a}_{z,l} \cdot \vec{H}(\vec{\kappa}, z)$, в результате получим:

$$D_{ss}(\vec{\kappa})h(\vec{\kappa}, z) + D_{sp}(\vec{\kappa})e(\vec{\kappa}, z) = \frac{4\pi}{c} q_s(\vec{\kappa}, z), \quad (21)$$

$$D_{pp}(\vec{\kappa})e(\vec{\kappa}, z) + D_{ps}(\vec{\kappa})h(\vec{\kappa}, z) = \frac{4\pi}{c} q_p(\vec{\kappa}, z).$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно скалярных потенциалов на интервале $-b < z < 0$; $q_v(\vec{\kappa}, z)$ содержат сторонние источники; $D_{v\xi}(\vec{\kappa})$ – скалярные операторы, действующие по z и зависящие от $\vec{\kappa}$, $v, \xi = s, p$. В явном виде:

$$q_s(\vec{\kappa}, z) = ik_0 \left[-\vec{z}_0 \times \vec{n} + \frac{1}{a_\mu(\vec{n}, z)} (e_\mu \vec{z}_0 + d_\mu \vec{n}) \right] \cdot \vec{M}(\vec{\kappa}, z) + [(\partial_z \epsilon_{lz} + ik\epsilon_{ll})\vec{z}_0 - (\partial_z \epsilon_{zz} + ik\epsilon_{zl})\vec{n}] \cdot \frac{\vec{J}(\vec{\kappa}, z)}{a_\epsilon(\vec{n}, z)}, \quad (22)$$

$$q_s \rightarrow q_p \quad (\epsilon \leftrightarrow \mu, \quad \vec{J} \rightarrow \vec{M}, \quad \vec{M} \rightarrow -\vec{J});$$

$$D_{ss}(\vec{\kappa}) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\epsilon_{zz}}{a_\epsilon(\vec{n}, z)} \frac{\partial}{\partial z} + ik \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\epsilon_{lz}}{a_\epsilon(\vec{n}, z)} + \frac{\epsilon_{zl}}{a_\epsilon(\vec{n}, z)} \frac{\partial}{\partial z} \right] + k_0^2 \frac{|\hat{\mu}(z)|}{a_\mu(\vec{n}, z)} - \kappa^2 \frac{\epsilon_{ll}}{a_\epsilon(\vec{n}, z)}; \quad (23)$$

$$ik_0^{-1} D_{sp}(\vec{\kappa}) = ik \left[\frac{c_\epsilon(\vec{n}, z)}{a_\epsilon(\vec{n}, z)} + \frac{e_\mu(\vec{n}, z)}{a_\mu(\vec{n}, z)} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \frac{b_\epsilon(\vec{n}, z)}{a_\epsilon(\vec{n}, z)} - \frac{e_\mu(\vec{n}, z)}{a_\mu(\vec{n}, z)} \frac{\partial}{\partial z}; \quad (24)$$

$$D_{ss} \rightarrow D_{pp}, \quad D_{sp} \rightarrow D_{ps}, \quad (\epsilon \leftrightarrow \mu). \quad (25)$$

Скалярные функции $d_\eta(\vec{n}, z)$, $e_\eta(\vec{n}, z)$ ($\eta = \epsilon, \mu$) даются выражениями:

$$d_\epsilon = \epsilon_{zz}\epsilon_{ll} - \epsilon_{zl}\epsilon_{lz}, \quad e_\epsilon = \epsilon_{ll}\epsilon_{lz} - \epsilon_{lz}\epsilon_{ll}, \quad (26)$$

$$d_\epsilon \rightarrow d_\mu, \quad e_\epsilon \rightarrow d_\mu, \quad (\epsilon \rightarrow \mu).$$

Здесь $|\hat{\epsilon}(z)|$, $|\hat{\mu}(z)|$ – определители, выраженные через элементы диад $\hat{\epsilon}(z)$, $\hat{\mu}(z)$ в базисе из ортов $\vec{a}_z, \vec{a}_l, \vec{a}_t$.

Подставляя (13), (14) в (5), получим в точках $z = z_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$):

$$\{e(\vec{\kappa}, z)\} = 0, \quad \{h(\vec{\kappa}, z)\} = 0, \quad (27)$$

$$\left\{ \frac{1}{a_\mu(\vec{n}, z)} [(\mu_{zz} \partial_z + i\vec{k}\mu_{lz})e(\vec{k}, z) - ik_0 b_\mu(\vec{n}, z)h(\vec{k}, z)] \right\} = 0, \quad (28)$$

$$\left\{ \frac{1}{a_\epsilon(\vec{n}, z)} [(\epsilon_{zz} \partial_z + i\vec{k}\epsilon_{lz})h(\vec{k}, z) + ik_0 b_\epsilon(\vec{n}, z)e(\vec{k}, z)] \right\} = 0.$$

Соотношения (27), (28) представляют собой граничные условия, которым удовлетворяют скалярные потенциалы на j -й поверхности раздела, свободной от поверхностных источников.

Подстановка (13), (14) в импедансные граничные условия (6), (7) позволяет получить две пары соотношений, связывающих скалярные потенциалы и их производные. Первая пара уравнений для нижней границы $z = -b + 0$ имеет вид:

$$[ik_0 a_{pp}^{(u)}(\vec{k}) + b_{pp}^{(u)}(\vec{k}) \partial_z] e(\vec{k}, z) + ik_0 a_{ps}^{(u)}(\vec{k}) h(\vec{k}, z) = 0, \quad (29)$$

$$[ik_0 a_{sp}^{(u)}(\vec{k}) + b_{sp}^{(u)}(\vec{k}) \partial_z] e(\vec{k}, z) + [ik_0 a_{ss}^{(u)}(\vec{k}) + b_{ss}^{(u)}(\vec{k}) \partial_z] h(\vec{k}, z) = 0,$$

где

$$a_{pp}^{(u)}(\vec{k}) = 1 + \frac{\kappa\mu_{lz}(\vec{k}, z)}{k_0 a_\mu(\vec{n}, z)} L_{II}^{(u)}(\vec{k}),$$

$$b_{pp}^{(u)}(\vec{k}) = \frac{\mu_{zz}(z)}{a_\mu(\vec{n}, z)} L_{II}^{(u)}(\vec{k}),$$

$$a_{ps}^{(u)}(\vec{k}) = L_{II}^{(u)}(\vec{k}) - \frac{b_\mu(\vec{n}, z)}{a_\mu(\vec{n}, z)} L_{II}^{(u)}(\vec{k}),$$

$$a_{sp}^{(u)}(\vec{k}) = \frac{b_\epsilon(\vec{n}, z)}{a_\epsilon(\vec{n}, z)} + \frac{\kappa\mu_{lz}(\vec{k}, z)}{k_0 a_\mu(\vec{n}, z)} L_{II}^{(u)}(\vec{k}), \quad (30)$$

$$b_{sp}^{(u)}(\vec{k}) = \frac{\mu_{zz}(z)}{a_\mu(\vec{n}, z)} L_{II}^{(u)}(\vec{k}),$$

$$a_{ss}^{(u)}(\vec{k}) = \frac{\kappa\epsilon_{lz}(\vec{k}, z)}{k_0 a_\epsilon(\vec{n}, z)} - \frac{b_\mu(\vec{n}, z)}{a_\mu(\vec{n}, z)} L_{II}^{(u)}(\vec{k}) + L_{II}^{(u)}(\vec{k}),$$

$$b_{ss}^{(u)}(\vec{k}) = \frac{\epsilon_{zz}(z)}{a_\epsilon(\vec{n}, z)}.$$

В этих формулах $L_{\sigma\tau}(\vec{k})^{(u)} = \vec{a}_\sigma \cdot \hat{L}^{(u)} \cdot \vec{a}_\tau$, $(\sigma, \tau = z, l, t)$. Для того, чтобы записать анало-

гичные условия на верхней границе слоя ($z = 0$), в формулах (30) необходимо знак при $b_{pp}^{(u)}(\vec{k})$, $a_{ps}^{(u)}(\vec{k})$, $b_{sp}^{(u)}(\vec{k})$ и $b_{ss}^{(u)}(\vec{k})$ заменить на противоположный, заменить верхний индекс u на a , а также в формулах для $a_{pp}^{(u)}(\vec{k})$, $a_{sp}^{(u)}(\vec{k})$, $a_{ss}^{(u)}(\vec{k})$ заменить κ на $-\kappa$.

Построим численное решение задачи дифракции плоской монохроматической волны на слоисто-неоднородной ферритной пластине с учетом электромагнитной анизотропии материала. Будем считать, что пластина кусочно-однородна по толщине и в пределах каждого однородного слоя анизотропный магнитоэлектрик является гиротропным или, в частном случае, одноосным с произвольной ориентацией оптических осей.

Опишем вначале электромагнитные свойства гиротропного магнитоэлектрика. В данной точке пространства они определяются диадами диэлектрической и магнитной проницаемости:

$$\hat{\epsilon}(z) = \epsilon_\perp(z) \hat{I} + (\epsilon_\parallel(z) - \epsilon_\perp(z)) \vec{a}\vec{a} - if(z) \vec{a} \times \hat{I}, \quad (31)$$

$$\hat{\mu}(z) = \mu_\perp(z) \hat{I} + (\mu_\parallel(z) - \mu_\perp(z)) \vec{b}\vec{b} - ig(z) \vec{b} \times \hat{I}. \quad (32)$$

Здесь единичные вещественные векторы \vec{a} , \vec{b} характеризуют направления оптических осей и в декартовой системе координат x, y, z имеют следующие компоненты:

$$\vec{a} \equiv \vec{a}(z) = (\cos\theta_a \sin\varphi_a, \cos\theta_a \cos\varphi_a, \sin\theta_a), \quad (33)$$

$$\vec{b} \equiv \vec{b}(z) = (\cos\theta_b \sin\varphi_b, \cos\theta_b \cos\varphi_b, \sin\theta_b). \quad (34)$$

Величины $\epsilon_\parallel(z)$, $\epsilon_\perp(z)$, $f(z)$ и $\mu_\parallel(z)$, $\mu_\perp(z)$, $g(z)$ считаются дважды дифференцируемыми функциями z в пределах анизотропного слоя $-b < z < 0$. Для ясности углы $\theta_{a,b}$ и $\varphi_{a,b}$, определяющие направления оптических осей, показаны на вставке к рис. 1, где $-\pi/2 \leq \theta_{a,b} \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi_{a,b} \leq 2\pi$. Диады диэлектрической и маг-

нитной проницаемостей $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$, представленные формулами (31), (32), описывают плазму или ферриты во внешнем магнитном поле, которое направлено вдоль векторов \vec{a} и \vec{b} соответственно. Если электромагнитные свойства гиротропного магнитоэлектрика изменяются от

точки к точке, параметры $\theta_{a,b}$, $\varphi_{a,b}$, ϵ_{\parallel} , ϵ_{\perp} , f и μ_{\parallel} , μ_{\perp} , g оказываются функциями переменных x , y , z ; для однородного магнитодиэлектрика эти параметры постоянны.

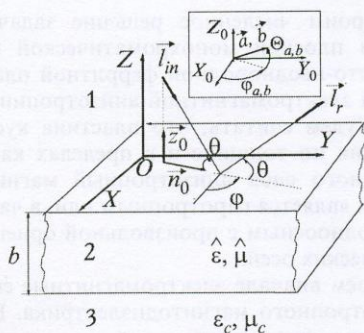


Рис. 1. Геометрия задачи

Пусть анизотропная пластина толщиной b граничит сверху (при $z=0$) со свободным полупространством $z>0$, а снизу при ($z=-b$) – с подложкой из однородного изотропного диэлектрика. Последний занимает область $-\infty < z < -b$ и характеризуется диэлектрической и магнитной постоянными ϵ_c, μ_c , которые в общем случае комплексны.

Мы рассматриваем модель, в которой анизотропная пластина является неоднородной по толщине. Это означает, что параметры однородного диэлектрика зависят от z и не изменяются вдоль x и y . В общем случае эти параметры представляют собой кусочно-непрерывные функции z .

Пусть падающая плоская волна приходит из свободного полупространства $z>0$ в направлении единичного вектора \vec{l}_{in} , которое определяется углом скольжения θ и азимутальным углом φ (см. рис. 1):

$$\vec{l}_{in} = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta), \quad (35)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Тогда скалярные потенциалы $e(\vec{k}, z)$, $h(\vec{k}, z)$ вне анизотропного слоя можно представить в виде [10]:
– в свободном пространстве ($0 < z < +\infty$):

$$e(\vec{k}, z) = (e^{-i\gamma_0 z} + R_{pp} e^{i\gamma_0 z}) A_p + R_{ps} A_s e^{i\gamma_0 z}, \quad (36)$$

$$h(\vec{k}, z) = (e^{-i\gamma_0 z} + R_{ss} e^{i\gamma_0 z}) A_s + R_{sp} A_p e^{i\gamma_0 z};$$

– в подложке ($-\infty < z < -b$):

$$e(\vec{k}, z) = [T_{ps} A_s + T_{pp} A_p] e^{-ik_0 n_c (z+b)}, \quad (37)$$

$$h(\vec{k}, z) = [T_{ss} A_s + T_{sp} A_p] e^{-ik_0 n_c (z+b)}.$$

Здесь $\gamma_0 = k_0 \sin\theta$; $n_c = \sqrt{\epsilon_c \mu_c - \cos^2\theta}$ ($0 \leq \arg n_c < \pi$); a комплексные, в общем случае, числа A_p и A_s характеризуют составляющие электромагнитной волны, которые поляризованы перпендикулярно (p) и параллельно (s) плоскости падения соответственно. В формулах (36), (37) нами введены комплексные коэффициенты отражения $R_{v\xi}$ и прохождения $T_{v\xi}$ анизотропной пластины ($v, \xi = p, s$). Они зависят от частоты падающего поля, углов θ и φ , а также прочих электрофизических и геометрических параметров задачи. Коэффициенты с совпадающими индексами ($v = \xi$) описывают преобразование падающей волны перпендикулярной ($v = p$) или параллельной ($v = s$) поляризации в волну той же поляризации, а коэффициенты с разноименными индексами ($v \neq \xi$) – в волну ортогональной поляризации. (В принятой нами записи $R_{v\xi}$, $T_{v\xi}$ левый индекс v отвечает отраженной или прошедшей волне, а правый ξ – падающей). Заметим, что присутствие “перекрестных” коэффициентов отражения R_{ps} , R_{sp} и прохождения T_{ps} , T_{sp} , которые ответственны за деполаризацию падающей волны перпендикулярной или параллельной поляризации, является характерной особенностью анизотропных материалов [11].

Из выражений (36), (37) ясно, что для s -поляризации ($A_s = 1$, $A_p = 0$)

$$R_{ss} = h(\vec{k}, 0) - 1, \quad R_{ps} = e(\vec{k}, 0), \quad (38)$$

$$T_{ss} = h(\vec{k}, -b), \quad T_{ps} = e(\vec{k}, -b)$$

и для p -поляризации ($A_s = 0$, $A_p = 1$)

$$\begin{aligned} R_{pp} &= e(\bar{\kappa}, 0) - 1, & R_{sp} &= h(\bar{\kappa}, 0), \\ T_{pp} &= e(\bar{\kappa}, -b), & T_{sp} &= h(\bar{\kappa}, -b). \end{aligned} \quad (39)$$

Импедансные граничные условия для скалярных потенциалов (29) запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = ik_0 (\lambda_{sp}^{(a)} e + \lambda_{ss}^{(a)} h) + f_s, \quad (40)$$

$$\frac{\partial e}{\partial z} = ik_0 (\lambda_{pp}^{(a)} e + \lambda_{ps}^{(a)} h) + f_p, \quad (z = -0);$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = ik_0 (\lambda_{sp}^{(u)} e + \lambda_{ss}^{(u)} h), \quad (41)$$

$$\frac{\partial e}{\partial z} = ik_0 (\lambda_{pp}^{(u)} e + \lambda_{ps}^{(u)} h), \quad (z = -b + 0).$$

Фигурирующие здесь величины $\lambda_{v\xi}^{(a,u)}$, f_v , ($v, \xi = p, s$) зависят от углов θ , φ и представляются в виде:

$$\lambda_{pp}^{(a)} = \frac{1}{\mu_{zz}(0)} [a_\mu(0) \sin \theta - \mu_{lz}(0) \cos \theta],$$

$$\lambda_{ps}^{(a)} = \frac{b_\mu(0)}{\mu_{zz}(0)}, \quad (42)$$

$$\lambda_{sp}^{(a)} = -\frac{b_\varepsilon(0)}{\varepsilon_{zz}(0)},$$

$$\lambda_{ss}^{(a)} = \frac{1}{\varepsilon_{zz}(0)} [a_\varepsilon(0) \sin \theta - \varepsilon_{lz}(0) \cos \theta];$$

$$\lambda_{pp}^{(u)} = -\frac{1}{\mu_{zz}(-b)} \left[a_\mu(-b) \frac{n_c}{\mu_c} + \mu_{lz}(-b) \cos \theta \right],$$

$$\lambda_{ps}^{(u)} = \frac{b_\mu(-b)}{\mu_{zz}(-b)}, \quad (43)$$

$$\lambda_{sp}^{(u)} = -\frac{b_\varepsilon(-b)}{\varepsilon_{zz}(-b)},$$

$$\lambda_{ss}^{(u)} = \frac{1}{\varepsilon_{zz}(-b)} \left[a_\varepsilon(-b) \frac{n_c}{\varepsilon_c} + \varepsilon_{lz}(-b) \cos \theta \right];$$

$$\begin{aligned} f_s &= -2ik_0 a_\varepsilon(0) \sin \theta A_s / \varepsilon_{zz}(0), \\ f_p &= -2ik_0 a_\mu(0) \sin \theta A_p / \mu_{zz}(0). \end{aligned} \quad (44)$$

Теперь займемся процедурой написания разностной схемы [12], приближенно описывающей связанную систему дифференциальных уравнений (21) и граничных условий (40), (41). Учтем тот факт, что внутри анизотропного слоя сторонних источников нет, поэтому в формулах (21) необходимо положить $q_p = q_s \equiv 0$. Разобьем отрезок $-b \leq z \leq 0$ на N равных частей. Выберем шаг сетки разбиений $\Delta b = b/N$ и множество узлов сетки z_0, z_1, \dots, z_N определим формулой $z_j = j\Delta b - b$, ($j = 0, 1, \dots, N$). Отметим, что в это множество включены граничные точки $z_0 = -b$, $z_N = 0$. Частные производные в дифференциальных уравнениях (21) аппроксимируем центральной разностью, в граничном уравнении (40) – левой, а в уравнении (41) – правой разностью. Тогда в узлах сетки для случая s -поляризации получим систему $2N + 2$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных комплексных констант $x_k \equiv h(\bar{\kappa}, z_k)$, $y_k \equiv e(\bar{\kappa}, z_k)$, ($k = 0, 1, \dots, N$):

$$\begin{cases} x_N(1 - ik_0 b \lambda_{ss}^{(a)}) - x_{N-1} - ik_0 b \lambda_{sp}^{(a)} y_N = f_{ss}, \\ -ik_0 b \lambda_{ps}^{(a)} x_N + y_N(1 - ik_0 b \lambda_{pp}^{(a)}) - y_{N-1} = 0; \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} A_j x_{j+1} + B_j x_j + C_j x_{j-1} + D_j y_{j+1} + F_j y_j + G_j y_{j-1} = 0, \\ P_j x_{j+1} + Q_j x_j + R_j x_{j-1} - K_j y_{j+1} - L_j y_j - M_j y_{j-1} = 0, \end{cases} \quad (46)$$

$(j = 1, 2, \dots, N-1);$

$$\begin{cases} x_1 - x_0(1 + ik_0 b \lambda_{ss}^{(u)}) - ik_0 b \lambda_{sp}^{(u)} y_0 = 0, \\ y_1 - y_0(1 + ik_0 b \lambda_{pp}^{(u)}) - ik_0 b \lambda_{ps}^{(u)} y_0 = 0. \end{cases} \quad (47)$$

Здесь первая пара уравнений отвечает конечно-разностной аппроксимации граничных условий (40) при $z = 0$, где положено $A_s = 1$ и $A_p = 0$. Следующая группа $2(N-1)$ уравнений (46) – аппроксимация дифференциальных уравнений (21) и последняя пара уравнений (47) – аппроксимация граничных условий (41) при $z = -b$; $f_{ss} = \Delta b f_s$.

Коэффициенты при неизвестных в уравнениях (46) даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{\varepsilon_{zz}(z_j)}{a_\varepsilon(z_j)} + \frac{1}{4} \left[\frac{\varepsilon_{zz}(z_{j+1})}{a_\varepsilon(z_{j+1})} - \frac{\varepsilon_{zz}(z_{j-1})}{a_\varepsilon(z_{j-1})} \right] + \\ &+ \frac{ik_0 b \cos \theta}{2} \left[\frac{\varepsilon_{zl}(z_j)}{a_\varepsilon(z_j)} + \frac{\varepsilon_{lz}(z_{j+1})}{a_\varepsilon(z_{j+1})} \right], \end{aligned}$$

$$B_j = -2 \frac{\epsilon_{zz}(z_j)}{a_\epsilon(z_j)} + (k_0 b)^2 \left[\frac{|\hat{\mu}(z_j)|}{a_\mu(z_j)} - \cos^2 \theta \frac{\epsilon_{ll}(z_j)}{a_\epsilon(z_j)} \right],$$

$$C_j = \frac{\epsilon_{zz}(z_j)}{a_\epsilon(z_j)} - \frac{1}{4} \left[\frac{\epsilon_{zz}(z_{j+1})}{a_\epsilon(z_{j+1})} - \frac{\epsilon_{zz}(z_{j-1})}{a_\epsilon(z_{j-1})} \right] - \frac{ik_0 b \cos \theta}{2} \left[\frac{\epsilon_{zl}(z_j)}{a_\epsilon(z_j)} + \frac{\epsilon_{lz}(z_{j-1})}{a_\epsilon(z_{j-1})} \right],$$

$$D_j = \frac{ik_0 b}{2} \left[\frac{d_\mu(z_j)}{a_\mu(z_j)} + \frac{b_\epsilon(z_{j+1})}{a_\epsilon(z_{j+1})} \right],$$

$$F_j = (k_0 b)^2 \cos \theta \left[\frac{c_\epsilon(z_j)}{a_\epsilon(z_j)} + \frac{e_\mu(z_j)}{a_\mu(z_j)} \right], \tag{48}$$

$$A_j \rightarrow K_j, \quad B_j \rightarrow L_j, \quad C_j \rightarrow M_j, \quad D_j \rightarrow P_j,$$

$$F_j \rightarrow Q_j, \quad G_j \rightarrow R_j, \quad (\epsilon \leftrightarrow \mu).$$

Для p -поляризации аналогичная система уравнений получается заменой правых частей в первой паре уравнений системы (45): f_{ss} заменяется на 0, а 0 – на $f_{pp} = \Delta b f_p$, где $A_p = 1$. Для ситуации, когда слой представляет собой одноосный магнитоэлектрик, в формулах (31), (32) и последующих выражениях необходимо положить $f(z) = g(z) \equiv 0$.

Ниже приведены иллюстративные зависимости, которые отражают взаимодействие плоской электромагнитной волны s -поляризации, падающей из верхнего полупространства под углом скольжения $\theta = 45^\circ$ и азимутальным углом $\varphi = 0^\circ$ (см. рис. 1), с анизотропным ферритным слоем, расположенным в свободном пространстве ($\epsilon_c = \mu_c = 1$).

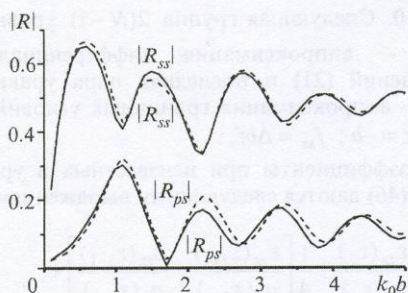


Рис. 2. Зависимость модулей коэффициентов отражения ферритного слоя от частоты

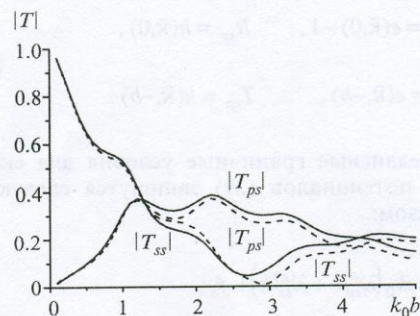


Рис. 3. Зависимость модулей коэффициентов прохождения анизотропного ферритного слоя от частоты

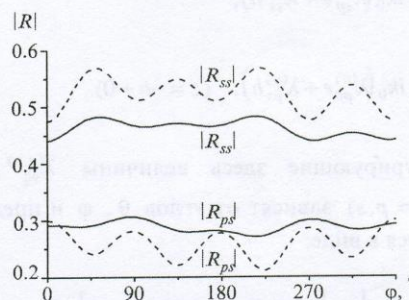


Рис. 4. Зависимость модулей коэффициентов отражения анизотропного ферритного слоя от азимутального угла падающей волны

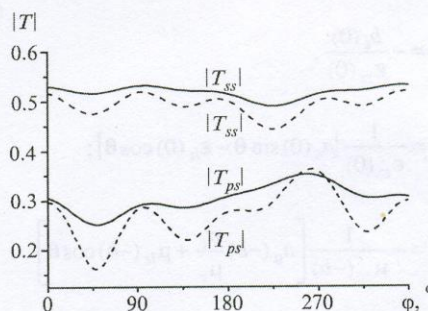


Рис. 5. Зависимость модулей коэффициентов прохождения анизотропного ферритного слоя от азимутального угла падающей волны

На всех рисунках сплошные кривые относятся к однородному анизотропному, а пунктирные – к неоднородному анизотропному по толщине слою. На рис. 2, 3 представлены частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения для анизотропного слоя феррита с главными значениями магнитной проницаемости [13] $\mu_{||} = 1 + 0.08i$, $\mu_{\perp} = 0.7 + 0.15i$ и

$g = 0.42$. Диэлектрическая проницаемость слоя является скалярной величиной, $\epsilon_{\parallel} = \epsilon_{\perp} = 8 + 0.003i$, $f = 0$. При исследовании однородного слоя феррита углы наклона оптической оси были фиксированными $\varphi_b^0 = \theta_b^0 = 45^\circ$. Для случая анизотропного ферритного слоя с плавно изменяющимися параметрами считалось, что углы наклона оптической оси изменяются с толщиной по параболическому закону:

$$\varphi_b(z) = \varphi_b^0 \chi(z), \quad \theta_b(z) = \theta_b^0 \chi(z), \quad (49)$$

где $\chi(z)$ – квадратичная функция z [14,15]:

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 + \frac{2z}{b} \right)^2 \right]. \quad (50)$$

Функция $\chi(z)$ достигает максимального значения, равного 1, на верхней и нижней границах слоя и минимального значения, равного 0.5, в его середине (при $z = -b/2$).

На рис. 4, 5 представлены зависимости коэффициентов отражения и прохождения от азимутального угла падающей волны. Обратим внимание на то, что во всех случаях, изображенных на рисунках, присутствует деполяризация: $R_{ps} \neq 0$, $T_{ps} \neq 0$, так как электрический вектор падающей волны и оптическая ось анизотропии не лежат в одной плоскости.

Приведенные здесь результаты численных экспериментов свидетельствуют о существенном влиянии анизотропии и неоднородности ферритного слоя на отражение и прохождение электромагнитных волн.

Литература

1. H. C. Chen. International Journal of Electronics. 1973, **35**, p. 633.

2. J. A. Kong. Theory of Electromagnetic Waves. New York, Wiley, 1975.
 3. Е. П. Курушин, Е. И. Нефедов. Электродинамика анизотропных структур. Москва, Наука, 1980.
 4. L. Felsen, N. Marcuvitz. Radiation and Scattering of Waves. Englewood Cliffs, NY: Printice-Hall, 1973.
 5. Н. П. Жук. РиЭ. 1990, **35**, №1, с. 101.
 6. Н. П. Жук, О. А. Третьяков. РиЭ. 1985, **30**, №1, с. 76.
 7. M. Mrozovski, J. Mazur. IEEE Trans. 1986, **MTT-34**, No. 3, p. 388.
 8. W. Weiglhofer. Radio Science. 1987, **22**, p. 209.
 9. W. Weiglhofer. Proceedings of the Institution of the Electrical Engineers, Pt H. 1987, **134**, p. 357.
 10. Д. Б. Канарейкин, Н. Ф. Павлов, В. А. Потехин. Поляризация радиолокационных сигналов. Москва, Сов. радио, 1966.
 11. Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред. Минск, Изд. АН БССР, 1958.
 12. А. А. Самарский. Теория разностных схем. Москва, Наука, 1989.
 13. А. Л. Микаэлян. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. Москва-Ленинград, Госэнергоиздат, 1963.
 14. О. В. Багацкая, Н. П. Жук, Е. Б. Малец, С. Н. Шульга. Дефектоскопия. 1997, №1, с. 76.
 15. О. В. Багацкая, Н. П. Жук, С. Н. Шульга. РиЭ. 1999, **44**, №1, с. 1.

Calculation of Reflectance and Transmittance of Inhomogeneous Ferrite Slab by Finite Difference Method

O. V. Bagatskaya, M. P. Perepechay, S. N. Shulga

The numerical solution of the problem of plane electromagnetic wave scattering by an anisotropic layered-inhomogeneous plate with the arbitrarily oriented optical axis is presented. The compact scalar representation for the electromagnetic field amplitudes is obtained and corresponding problem for the scalar potentials is formulated. This problem is solved by the FD-method. Some numerical results related to ferrite anisotropic medium are presented. They clearly show the influence of anisotropy and stratified inhomogeneity upon the scattering properties of a layer.