УДК 621.373

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ КОЛАХ

І.А.Добушовська
Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери 12, Львів, 79013, Україна.
E-mail: blackangy@gmail.com

Розглядається проблема розрахунку стаціонарних режимів у нелінійних електричних колах з реактивними елементами, які знаходяться під дією періодичного збурення. Задача розв'язується як крайова для системи диференціальних рівнянь з періодичними крайовими умовами, які описують динамічний усталений режим, що дає змогу отримати залежності змінних стану на періоді, не вдаючися до розв'язування задачі в часовій області. Алгебризація системи диференціальних рівнянь здійснюється проекційним методом з використанням сплайн-апроксимацій. Отримана нелінійна система алгебричних рівнянь розв'язується методом продовження по параметру, що дає змогу дослідити вплив на характер періодичних залежностей координат як величини періодичного збурення, так і будь-якого параметра електричного кола. Бібл. 4, рис. 2.

Ключові слова: нелінійне коло, періодичний процес, крайова задача, проекційний метод.

Вступ. У разі періодичного збурення стаціонарний режим в нелінійному електромагнітному колі є динамічним і характеризується періодичною негармонічною зміною координат, а електромагнітні процеси описуються нелінійними диференціальними рівняннями (ДР). Розрахунок усталеного режиму в такому колі полягає у визначенні не сукупності координат режиму, які відповідають конкретному значенню часової координати *t*, а функціональних залежностей змінних стану впродовж періоду. Для аналізу періодичних режимів нелінійних електричних кіл знаходять застосування графо-аналітичні, аналітичні, чисельно-аналітичні та чисельні методи. Серед них є добре розробленими асимптотичні методи [1], а також метод малого параметра [4], які ефективні для дослідження квазілінійних систем. Однак, зважаючи на значимість, яку займають задачі розрахунку періодичних процесів в нелінійних електричних колах, створення нових методів розрахунку і вдосконалення існуючих має важливе теоретичне і практичне значення.

Метою статті є викладення методу розв'язування задачі знаходження періодичних розв'язків нелінійного електричного кола в позачасовій області, тобто на основі розв'язування задачі як крайової.

Процеси в нелінійному електричному колі при періодичному збуренні описуються системою нелінійних ДР, яка може бути представлена в формі Коші у вигляді

$$d\vec{y}\left(\vec{x},t\right)/dt=\vec{f}\left(\vec{y},\vec{x},\vec{u},t\right), \tag{1}$$

де $\vec{y},\vec{x}$ – *m*-мірні векторні *T*-періодичні функції часу; $\vec{f}\left(\vec{y},\vec{x},\vec{u},t\right)$ – *m*-мірна вектор-функція правих частин, до якої входить $\vec{u}(t)$ – задана векторна функція періодичного збурення (напруг, ЕРС, джерел струмів).

Питання існування періодичних режимів виходить за рамки даної роботи і не розглядається, тому надалі вважатимемо, що існує хоча б один періодичний режим. Задача пошуку періодичного розв'язку системи (1) може бути вирішена шляхом розв'язування еволюційної задачі. Для цього необхідно розв'язати задачу Коші для системи ДР (1). Неефективність такого підходу до вирішення задачі загальновідома. До цього слід додати, що метод усталення практично непридатний для оптимізаційних розрахунків. Більш ефективними є методи, засновані на загальній теорії нелінійних коливань [2–4], які дають змогу розрахувати періодичні залежності координат в позачасовій області. Для цього необхідно задачу пошуку періодичного режиму розглядати як двоточкову крайову для системи ДР (1).

Методи розв'язування крайових задач відрізняються способом алгебризації ДР. Серед них найбільш ефективними є проекційні методи. Їхня суть полягає в тому, що наближений розв'язок ДР, які описують періодичний режим, отримують як проекцію нескінченного функціонального простору на деякий скінченний підпростір, який визначається лінійною комбінацією базових функцій. Цими функціями можуть бути тригонометричні та звичайні поліноми, сплайн-функції тощо.

Розглянемо спосіб алгебризації ДР, в якому базовими функціями є сплайн-функції третього порядку. Для цього нанесемо на періоді *T* сітку вузлів з кроком $h_j=t_j-t_{j-1}$, і на кожній *j*-й ділянці апроксимуємо координати вектора $\vec{y}$ кубічним сплайном

$$\vec{y}(t)=\vec{a}_j+\vec{b}_j\left(t_j-t\right)+\vec{c}_j\left(t_j-t\right)^2+\vec{d}_j\left(t_j-t\right)^3, \tag{2}$$

де $\vec{a}_j,\vec{b}_j,\vec{c}_j,\vec{d}_j$ – коефіцієнти сплайна, $j=1,\ldots,n$ – номер ділянки.

Співвідношення між коефіцієнтами сплайна визначаються властивостями сплайн-функцій. Зокрема, виходячи з умов неперервності сплайна, його першої та другої похідних на всьому періоді, отримаємо співвідношення між коефіцієнтами сплайна $\vec{a}$ та $\vec{c}$

$$\frac{3}{h_j}\vec{a}_{j-1}-\left(\frac{3}{h_j}+\frac{3}{h_{j+1}}\right)\vec{a}_j+\frac{3}{h_{j+1}}\vec{a}_{j+1}=h_j\vec{c}_{j-1}+2\left(h_j+h_{j+1}\right)\vec{c}_j+h_{j+1}\vec{c}_{j+1}\,, \tag{3}$$

яке з урахуванням періодичних крайових умов можна записати у матрично-векторній формі

$$H_1\vec{A}=H_2\vec{C}\,. \tag{4}$$

Аналогічно співвідношення між коефіцієнтами $\vec{a}$ та $\vec{c}$ визначається рівнянням

$$H_3\vec{B}=H_4\vec{C}\,. \tag{5}$$

У рівняннях (4), (5) H_1, H_2, H_3, H_4 – квадратні матриці, елементи яких визначаються сіткою вузлів. З цих рівнянь отримаємо формулу, яка визначає співвідношення між векторами коефіцієнтів $\vec{A}$ та $\vec{B}$

$$H_4H_2^{-1}H_1\vec{A}=H_3\vec{B}\,. \tag{6}$$

Оскільки для кожного j-го вузла

$$\vec{y}\left(t_j\right)=\vec{y}_j=\vec{a}_j; \qquad \left.\frac{d\vec{y}}{dt}\right|_{t=t_j}=\vec{f}_j=-\vec{b}_j\,, \tag{7}$$

то $\vec{A}=\vec{Y}$, $\vec{B}=-\vec{F}$, де $\vec{Y}=\left(\vec{y}_1,...,\vec{y}_n\right)^*$, $\vec{F}=\left(\vec{f}_1,...,\vec{f}_n\right)^*$ – вектори, компонентами яких є вузлові значення відповідних величин, а (*) означає транспонування. Отже рівняння (7) можна подати у вигляді

$$H\vec{Y}=-D\vec{F}\,. \tag{8}$$

Система (8) алгебричних рівнянь nm-го порядку є дискретним відображенням ДР (1), причому, оскільки вихідна система ДР нелінійна, то і отримана система є також нелінійною.

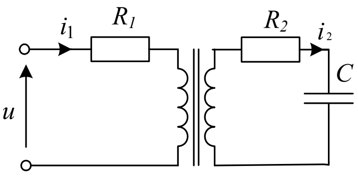

Рис. 1

Розв'язування задачі розрахунку стаціонарного режиму з використанням викладеного способу алгебризації ДР розглянемо на прикладі нелінійного електричного кола із взаємоіндуктивними зв'язками, до якого прикладена синусоїдна напруга (рис. 1). В записаних у векторній формі вигляду (1) ДР електричної рівноваги відповідні вектори є такими:

$$\vec{y}=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ u_c\end{bmatrix};\quad f=\begin{bmatrix}-R_1i_1\\ -R_2i_2-u_k\\ i_2/C\end{bmatrix};\quad \vec{u}=\begin{bmatrix}U_m\sin\left(\omega t+\alpha\right)\\ 0\\ 0\end{bmatrix};\quad \vec{x}=\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ u_k\end{bmatrix}.$$

Для визначення періодичних залежностей координат вектора $\vec{x}(t)$ при різних значеннях прикладеної напруги виділимо в (8) вектор вузлових значень періодичного збурення $\vec{U}$ $\quad \vec{F}=\vec{F}\left(\vec{Y},\vec{X},\vec{U}\right)=\vec{Z}\left(\vec{Y},\vec{X}\right)+\vec{U}$ і запишемо систему (8) у вигляді

$$H\vec{Y}+D\vec{Z}=-D\vec{U}\,. \tag{9}$$

Невідомим у рівнянні (9) є вектор $\vec{X}=\left(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n\right)^*$, який складається з n векторів $\vec{x}_j=\left(i_{1j},i_{2j},u_{kj}\right)^*$.

Для розв'язування системи (9) застосовується метод продовження по параметру, суть якого полягає в дискретному нарощуванні вузлових значень прикладеної напруги пропорційно до скалярного параметра ε, від нуля до заданих значень, отже початкове наближення вектора $\vec{X}$ нульове. На кожному кроці значення вектора $\vec{X}$ уточнюється методом Ньютона, в якому приріст $\Delta\vec{X}^{(k)}$ визначається з рівняння

$$\left(H\frac{\partial\vec{Y}}{\partial\vec{X}}-D\frac{\partial\vec{Z}}{\partial\vec{X}}\right)\Delta\vec{X}^{(k)}=-\vec{Q}\left(\vec{X}^{(k)}\right), \tag{10}$$

де $\vec{Q}\left(\vec{X}^{(k)}\right)=H\vec{Y}^{(k)}-D\varepsilon\vec{U}+DZ^{(k)}$ – вектор нев'язок системи при значенні вектора $\vec{X}=\vec{X}^{(k)}$, а відповідні похідні – це блочно-діагональні матриці, які для j-го вузла періоду мають зміст

$$\left.\frac{\partial\vec{y}}{\partial\vec{x}}\right|_j=\begin{array}{|c|c|c|}\hline L_{11j}&L_{12j}&0\\ \hline L_{21j}&L_{22j}&0\\ \hline 0&0&1\\ \hline\end{array}\,;\qquad \left.\frac{\partial\vec{y}}{\partial\vec{x}}\right|_j=\begin{array}{|c|c|c|}\hline -r_1&0&0\\ \hline 0&-r_j&-1\\ \hline 0&1/C&0\\ \hline\end{array}\,;\qquad \left.\frac{\partial\vec{y}}{\partial\vec{x}}\right|_j=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\ \hline 0&0&-1\\ \hline 0&0&0\\ \hline\end{array}\,.$$

Збільшення параметра ε від нуля до одиниці еквівалентне нарощуванню амплітуди вектора прикладеної напруги від нуля до заданого значення. Отримані в результаті розрахунку за викладеним алгоритмом періодичні залежності струму i_2 (рис. 1) при різних значеннях напруги показані на рис. 2. На кожному кроці розрахунку необхідно визначати значення диференціальних індуктивностей з відповідних характеристик.

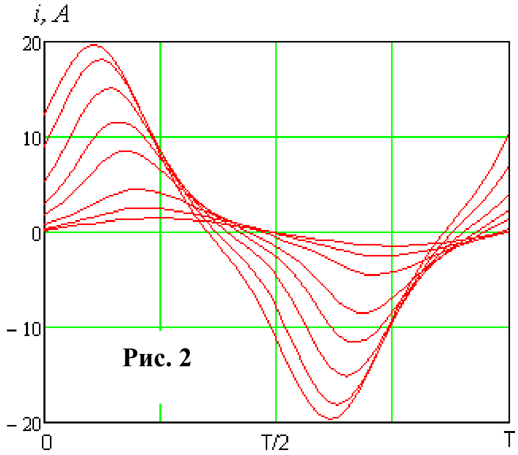

Рис. 2

Висновки. Розроблена на основі розв’язування крайової задачі проекційним методом математична модель стаціонарного періодичного процесу в нелінійному електромагнітному колі дає змогу досліджувати стаціонарні процеси в електричному колі при періодичних збуреннях в позачасовій області, а також вплив зміни будь-якого параметра кола на характер перебігу процесів.

1. *Боголюбов Н.Н, Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 2005. – 605 с.
2. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. – М.:Наука, 1987. – 286 с.
3. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – К.: Наукова думка, 1985. – 224 с.
4. *Шидловська Н.А.* Аналіз нелінійних електричних кіл методом малого параметру. – К.: Євроіндекс, 1999. – 192 с.

УДК 621.373
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЕЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЦЕПЯХ
И.А.Добушовская
Национальный университет "Львовская политехника",
ул. С.Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина.
E-mail: blackangy@gmail.com
Рассматривается проблема расчета стационарных режимов в нелинейных электрических цепях с реактивными элементами, которые находятся под воздействием периодического возмущения. Задача решается как краевая для описывающей установившийся режим системы дифференциальных уравнений с периодическими краевыми условиями, что дает возможность получить зависимости переменных состояния на периоде, не прибегая к решению задачи в часовой области. Алгебраизация системы дифференциальних уравнений осуществляется проекционным методом с использованием сплайн-аппроксимаций. Полученная нелинейная система алгебраических уравнений решается методом продолжения по параметру, что дает возможность исследовать влияние на характер периодических зависимостей координат как величины периодического возмущения, так и любого параметра электрической цепи. Библ. 4, рис. 3.
Ключевые слова: нелинейная цепь, периодический процесс, краевая задача, проекционный метод.

MATHEMATIC MODELING OF PERIODIC PROCESSES IN NONLINEAR ELECTROMAGNETIC CIRCUITS
I.A.Dobushovska
Lviv Polytechnic National University,
S. Bandery str., 12, Lviv, 79013, Ukraine.
E-mail: blackangy@gmail.com
The problem of calculating the stationary modes in nonlinear electrical circuits with reactive elements that are under periodic disturbances is considered. The problem is solved as a boundary value problem for a system of differential equations with periodic boundary conditions, which describe the dynamic steady state that can have obtained dependencies of state variables on the period without resorting to solving the problem in the time domain. Presentation in algebraic form system of differential equations is performed using projection method of spline approximation. The resulting system of nonlinear algebraic equations is solved by the method of continuation parameter that allows investigating the influence on the nature of periodic dependencies of coordinates as value of a periodic disturbances, and any other parameter of electric circuit. References 4, figure 2.
Key words: nonlinear circuit, periodic process, boundary value problem, projection method.

1. *Bogoliubov N.N., Mitropolskii Yu.A.* Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. – Moskva: Nauka, 2005. – 605 p. (Rus)
2. *Samarskii A.A.* Introduction to Numerical Methods. – Moskva: Nauka, 1987. – 286 p. (Rus)
3. *Samoilenko A.M., Ronto N.I.* Numerical and analytical methods for investigating the solutions of boundary value problems. – Kyiv: Naukova dumka, 1985. – 224 p. (Rus)
4. *Shydlovska N.A.* Analysis of nonlinear electrical circuits by method of small parameter. – Kyiv: Evroindeks, 1999. – 192 p. (Ukr)

Надійшла 30.01.2014