

Новый тип топологического электронного перехода в металлах при изменении энергии Ферми

В.И. Макаров

*Научно-производственное предприятие «Хартрон-Плант»
ул. Проскуры, 1, г. Харьков, 61070, Украина
E-mail: vimakarov@ic.kharkov.ua*

Д.В. Болотов, В.А. Горькавый

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина*

А.А. Яценко

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина*

Статья поступила в редакцию 15 октября 2004 г., после переработки 2 ноября 2004 г.

Предсказан новый тип электронного топологического перехода, обусловленный скачкообразным изменением дифференциально-геометрических характеристик поверхности Ферми без изменения ее топологии при некоторой критической энергии ε_d . Этот тип электронного топологического перехода отличается от известных электронных топологических переходов, связанных с изменением топологии поверхности Ферми, тем, что изоэнергетическая поверхность $\varepsilon(p) = \varepsilon_d$ не содержит особых точек, в которых скорость электронов обращается в нуль. Показано, что общим для двух типов электронных топологических переходов, связанных со скачкообразным изменением топологии поверхности Ферми и ее дифференциально-геометрических характеристик без изменения топологии, является качественное изменение сферического образа поверхности Ферми, обусловленное скачкообразным изменением количества прообразов точки при сферическом отображении.

Передбачено новий тип електронного топологічного переходу, обумовлений стрибкоподібною зміною диференційно-геометричних характеристик поверхні Фермі без зміни її топології при деякій критичній енергії ε_d . Цей тип електронного топологічного переходу відрізняється від відомих електронних топологічних переходів, зв'язаних зі зміною топології поверхні Фермі, тим, що ізоенергетична поверхня $\varepsilon(p) = \varepsilon_d$ не містить особливих точок, у яких швидкість електронів звертається в нуль. Показано, що загальною для двох типів електронних топологічних переходів, зв'язаних зі стрибкоподібною зміною топології поверхні Фермі і її диференційно-геометричних характеристик без зміни топології, є якісна зміна сферичного образу поверхні Фермі, обумовлена стрибкоподібною зміною кількості прообразів точки при сферичному відображенні.

PACS: 71.18.+y, 03.65.Vf

Электронные топологические переходы, связанные с изменением топологии поверхности Ферми под влиянием внешнего воздействия, предсказаны Лифшицем [1] и впервые экспериментально обнаружены в [2–4]. Эти исследования стимулировали большой цикл теоретических и экспериментальных

работ по влиянию внешних воздействий на электронные свойства металлов и полуметаллов. Надежным индикатором проявления электронных топологических переходов считается наблюдение скачкообразного изменения частотного спектра осцилляционных зависимостей макроскопических ха-

рактических проводящих кристаллов, как функции магнитного поля, или наблюдение аномалий в термодинамических и кинетических характеристиках, обусловленных особенностями в плотности электронных состояний при изменении топологии поверхности Ферми.

В настоящей работе рассмотрен новый тип электронного топологического перехода, который связан со скачкообразным изменением дифференциально-геометрических характеристик поверхности Ферми при некоторой критической энергии ε_d без изменения ее топологии. Этот тип электронного топологического перехода отличается от известных электронных топологических переходов, связанных с изменением топологии поверхности Ферми, тем, что изоэнергетическая поверхность $\varepsilon(p) = \varepsilon_d$ не содержит особых точек, в которых скорость электронов обращается в нуль. Показано, что общим для двух типов электронных топологических переходов, связанных со скачкообразными изменениями топологии поверхности Ферми и дифференциально-геометрических характеристик поверхности Ферми без изменения ее топологии, является качественное изменение сферического образа поверхности Ферми, обусловленное скачкообразным изменением количества прообразов точки при сферическом отображении.

1. Модель электронного спектра металла

Рассмотрим простую модель электронного спектра металла, изоэнергетические поверхности $\varepsilon(p) = \varepsilon$ которого описываются уравнением 4-го порядка:

$$\varepsilon(p_0) = \varepsilon_c + \left(\frac{p_{0x}^2 + p_{0y}^2 + p_{0z}^2}{2m} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_c} - 2 \left(\frac{p_{0z}^2 - p_{0x}^2 - p_{0y}^2}{2m} \right), \quad (1)$$

где p_{0i} — компоненты импульса электрона, m — масса свободного электрона, ε_c — критическая энергия. Вид изоэнергетических поверхностей, в частности топологические свойства, зависит от соотношения между энергиями ε и ε_c . Кроме различий топологического характера, семейство изоэнергетических поверхностей $\varepsilon(p) = \varepsilon$ этого модельного электронного спектра металла включает и поверхности с существенно различными дифференциально-геометрическими характеристиками.

Введем безразмерные координаты $p_{0i}^2 / 2m\varepsilon_c = p_i^2$ и запишем уравнение (1) в цилиндрической системе координат:

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_c (1 + (\rho_{\perp}^2 + p_z^2)^2 - 2(p_z^2 - \rho_{\perp}^2)), \quad (2)$$

где $\rho_{\perp}^2 = p_x^2 + p_y^2$. Рассматриваемые поверхности $\varepsilon(p) = \varepsilon$ являются поверхностями вращения и могут быть представлены с помощью вращаемых кривых-меридианов.

На рис. 1 в левом столбце представлены характерные для данного модельного электронного спектра поверхности $\varepsilon(p) = \varepsilon_F$ при фиксированном значении $\varepsilon_c = 1$ эВ и различных значениях энергий ε_F , эВ: 5,0 (а), 1,5 (б), 1 (в), 0,7 (г).

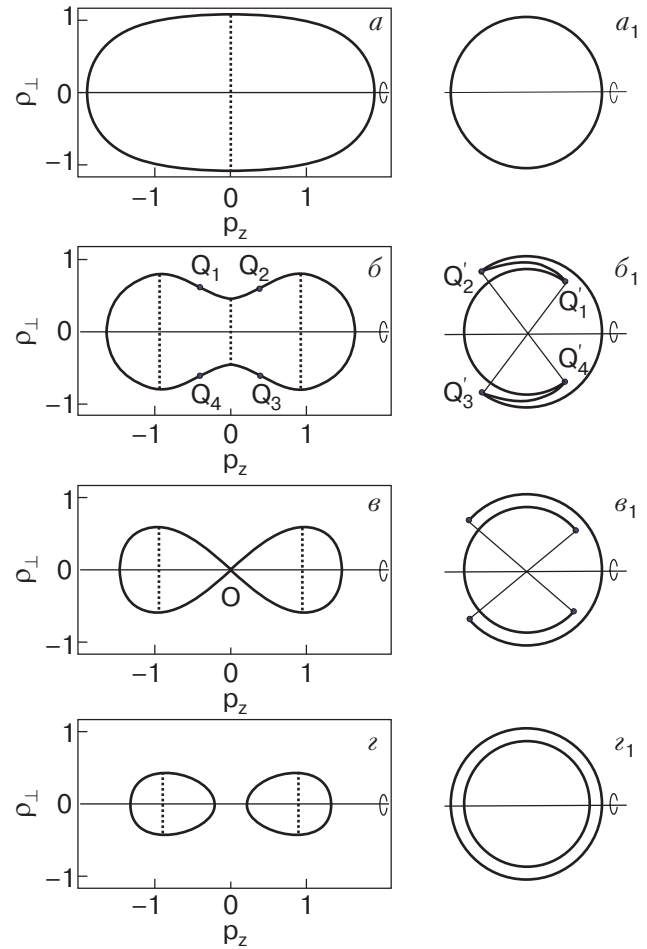


Рис. 1. Характерные поверхности Ферми для модельного спектра (1), представленные в цилиндрических координатах вращаемыми кривыми-меридианами, и их сферические образы: «овалоид», регулярная замкнутая выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной (а); «гантель», регулярная замкнутая невыпуклая поверхность со знакопеременной гауссовой кривизной (б); замкнутая невыпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной, содержащая сингулярную точку (в); две взаимно симметричные регулярные замкнутые выпуклые поверхности с положительной гауссовой кривизной (г); a_1, b_1, v_1, g_1 — сферические образы поверхностей Ферми a, b, v, g соответственно.

Двумерная поверхность (2) — оваллоид Кассини. Эта поверхность вращения симметрична относительно точки начала координат и относительно плоскости, проходящей через начало координат ортогонально оси вращения.

При $\varepsilon_F > 4\varepsilon_c$ оваллоид Кассини представляет собой замкнутую строго выпуклую поверхность с положительной гауссовой кривизной (рис. 1,а).

При $\varepsilon_F = 4\varepsilon_c$ оваллоид Кассини представляет собой замкнутую выпуклую поверхность, гауссова кривизна которой положительна всюду, за исключением экваториальной окружности, в точках которой гауссова кривизна равна нулю.

При $\varepsilon_c < \varepsilon_F < 4\varepsilon_c$ оваллоид Кассини представляет собой замкнутую поверхность со знакопеременной гауссовой кривизной, по форме напоминающую гантель. На поверхности имеются две области-шапочки, в точках которых гауссова кривизна положительна (эллиптические точки), область-пояс с точками отрицательной гауссовой кривизны (гиперболические точки) и две окружности, образованные параболическими точками нулевой гауссовой кривизны (рис. 1,б). На рисунке отмечены точки перегиба вращаемой кривой Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 . Эллиптические шапочки получаются вращением дуг Q_1Q_4 и Q_2Q_3 , гиперболический пояс — вращением дуг Q_1Q_2 и Q_3Q_4 , а параболические окружности — вращением точек Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 .

Во всех этих случаях оваллоид Кассини не имеет особых точек и топологически эквивалентен сфере, хотя дифференциально-геометрические характеристики существенно изменяются при переходе от случая а к случаю б.

При $\varepsilon_F = \varepsilon_c$ на оваллоиде Кассини будет особая точка конического типа в начале координат ($\rho_{\perp} = 0$ и $p_z = 0$), а во всех остальных точках оваллоида гауссова кривизна будет положительной (рис. 1,в).

При $\varepsilon_F < \varepsilon_c$ оваллоид Кассини имеет две компоненты, каждая из которых — замкнутая выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной (рис. 1,г).

Как видно, при переходе от случая б через в к случаю г происходит изменение топологического типа оваллоида Кассини.

Наконец, при $\varepsilon_F \rightarrow 0$ оваллоид Кассини стягивается к двум особым точкам с координатами $\rho_{\perp} = 0, p_z = p_c = \pm \sqrt{2m\varepsilon_c}$, расположенными на оси вращения.

Таким образом, при изменении параметров ε_F и ε_c в семействе оваллоидов Кассини наблюдается изменение как топологических, так и дифференциально-геометрических характеристик.

2. Новый тип топологического электронного перехода и сферический образ поверхности Ферми

Проанализируем, как изменения дифференциально-геометрических характеристик рассматриваемых модельных поверхностей Ферми $\varepsilon(p) = \varepsilon_F$ будут отображаться в электронные свойства металла, например, в осцилляциях эффекта де-Гааза—ван Альфена (см. рис. 1).

Как известно, спектр осцилляций эффекта де-Гааза—ван Альфена определяется числом экстремальных сечений поверхности Ферми плоскостью, перпендикулярной направлению магнитного поля [5]. Направим магнитное поле H по оси p_z . Тогда спектр в осцилляциях эффекта де-Гааза—ван Альфена будет следующий.

Для поверхностей Ферми типа «оваллоид», когда $\varepsilon_F \geq 4\varepsilon_c$, в эффекте де-Гааза—ван Альфена будут наблюдаться осцилляции с одним периодом, соответствующим одному экстремальному сечению поверхности Ферми $S(\varepsilon_F, p_{0z} = 0)$.

Для поверхностей Ферми типа «гантель», когда $\varepsilon_c < \varepsilon_F < 4\varepsilon_c$, в эффекте де-Гааза—ван Альфена будут наблюдаться осцилляции с двумя периодами, соответствующими трем экстремальным сечениям поверхности Ферми $S(\varepsilon_F, p_{0z} = 0)$ и $S(\varepsilon_F, p_{0z} = \pm \sqrt{m(4\varepsilon_c - \varepsilon_F)/2})$. При стремлении ε_F к ε_c сечение поверхности Ферми $S(\varepsilon_F, p_{0z} = 0)$ стягивается в точку.

Для поверхностей Ферми типа «два оваллоида», когда $0 < \varepsilon_F < \varepsilon_c$, в эффекте де-Гааза—ван Альфена будут наблюдаться осцилляции с одним периодом, соответствующим двум одинаковым экстремальным сечениям поверхности Ферми $S(\varepsilon_F, p_{0z} = \pm \sqrt{m(4\varepsilon_c - \varepsilon_F)/2})$. При $\varepsilon_F \rightarrow 0$ эти экстремальные сечения поверхности Ферми стягиваются в точки с координатами $p_z = p_c = \pm \sqrt{2m\varepsilon_c}$.

Таким образом, спектр осцилляций в эффекте де-Гааза—ван Альфена скачкообразно изменяется как при изменении топологии поверхности Ферми, так и переходе от поверхности Ферми со знакопостоянной гауссовой кривизной к поверхности Ферми со знакопеременной гауссовой кривизной (переходы типа «оваллоид—гантель»). До сих пор считалось, что скачкообразное изменение спектра осцилляций в эффекте де-Гааза—ван Альфена является надежным индикатором изменения топологии поверхности Ферми [1,5]. Докажем, что общим для этих двух типов электронных топологических переходов является качественное изменение сферического образа поверхности Ферми. В правом столбце на рис. 1 (a_1, b_1, θ_1 и z_1) схематически изображены сферические образы оваллоидов Кассини

при соответствующих характерных значениях энергий Ферми ε_F .

Напомним, как строится сферический образ произвольной ориентированной регулярной поверхности F^2 в трехмерном евклидовом пространстве [5,6]. В каждой точке P поверхности F^2 имеется единичная нормаль, соответствующая выбранной ориентации. Перенесем ее параллельно так, чтобы начало нормали совпало с началом координат в E^3 – тогда конец нормали будет отмечать некоторую точку Q на единичной сфере S^2 . Отображение $F^2 \rightarrow S^2$, сопоставляющее точке P точку Q по указанной схеме, называется сферическим отображением (гауссовым отображением). Множество точек на сфере S^2 , составляющих образ поверхности F^2 при сферическом отображении, называется сферическим образом (гауссовым образом) поверхности. Сферический образ может иметь достаточно сложную структуру. В частности, сферическое отображение вырождается в параболических точках поверхности F^2 , т.е. в точках нулевой гауссовой кривизны. А именно, если какая-то кривая параболических точек разделяет области на F^2 с отрицательной и положительной гауссовой кривизной, то на сферическом образе этой кривой будет соответствовать складка.

Возвращаясь к рис. 1, рассмотрим сферические образы оваловидов Кассини. Поскольку оваловид Кассини является поверхностью вращения, его сферический образ тоже является поверхностью вращения.

Сферическим образом оваловида Кассини при $\varepsilon_F > 4\varepsilon_c$ будет однократно накрытая сфера – она получается вращением изображенной на рис. 1, a_1 окружности.

При $\varepsilon_F = 4\varepsilon_c$ сферическим образом по-прежнему будет однократно накрытая сфера, описываемая вращением окружности, но теперь на сфере выделяется экваториальная окружность, являющаяся образом окружности параболических точек на оваловиде Кассини, которую можно рассматривать как устранимую особенность сферического отображения.

При $\varepsilon_c < \varepsilon_F < 4\varepsilon_c$ составить представление о качественной форме сферического образа можно, вращая изображенную на рис. 1, b кривую (нерегулярно накрытую окружность). Следовательно, на сферическом образе появятся две окружности особых точек, образующие складки – эти окружности являются образами параболических окружностей на оваловиде Кассини; на рисунке отмечены точки Q'_i , которые соответствуют точкам Q_i и образуют при вращении окружности-складки. Поясок на сфере, ограниченный этими окружностями-складками, на-

крывается трижды; каждая из оставшихся шапочек на сфере накрывается однократно.

При $\varepsilon_F = \varepsilon_c$ на оваловиде Кассини есть одна особая коническая точка, начало координат O , в которой нормаль не определена. Оставшаяся регулярная часть оваловида распадается на две связанные открытые компоненты. Для каждой из этих компонент сферическим образом будет часть сферы без шапочки, размеры которой определяются величиной раствора касательного конуса оваловида Кассини в сингулярной точке O . В результате сферический образ регулярной части оваловида Кассини в этом случае будет составлен из дважды покрытого пояaska на сфере и двух однократно накрытых сферических шапочек – представление о таком сферическом образе можно составить, вращая изображенную на рис. 1, β_1 кривую (две открытые частично перекрывающиеся дуги окружности).

Наконец, при $\varepsilon_F < \varepsilon_c$ сферическим образом каждой из двух связанных выпуклых компонент, образующих оваловид Кассини, будет однократно регулярно накрытая сфера, поэтому сферическим образом всего оваловида Кассини будет двукратно регулярно накрытая сфера – она получается при вращении изображенной на рис. 1, γ_1 дважды накрытой окружности.

Заметим, что при $\varepsilon_F \rightarrow 0$ сферическим образом оваловида Кассини по-прежнему будет двукратно регулярно накрытая сфера, независимо от уменьшения размеров самого оваловида.

Следовательно, изменения топологических и дифференциально-геометрических свойств оваловида Кассини отражаются на качественных изменениях свойств его сферического образа, связанных с изменением числа прообразов точки при сферическом отображении, что проявляется в нарушении непрерывности (появлении разрывов) и возникновении особых точек, образующих складки.

Таким образом, можно сделать вывод, что общим для топологических электронных переходов в металлах при изменении энергии Ферми есть качественное изменение сферического образа поверхности Ферми, обусловленное изменением числа прообразов точки при сферическом отображении. Эти два типа электронных топологических переходов различаются в следующем:

– первый тип электронных топологических переходов при изменении топологии сферического образа поверхности Ферми обусловлен изменением топологии поверхности Ферми при некоторой критической энергии ε_c . Изоэнергетическая поверхность $\varepsilon(p) = \varepsilon_c$ содержит особые точки [7,8];

– второй тип электронных топологических переходов при изменении топологии сферического об-

раза поверхности Ферми связан со скачкообразным изменением локальных дифференциально-геометрических характеристик поверхности Ферми без изменения ее топологии при некоторой критической энергии ε_d . Изоэнергетическая поверхность $\varepsilon(p) = \varepsilon_d$ не содержит особых точек.

Первый тип электронных топологических переходов был предсказан Лифшицем [1] и впервые экспериментально обнаружен в работах [2–4]. Второй тип электронных топологических переходов, который обусловлен изменением дифференциальной топологии сферического образа поверхности Ферми, рассматривается впервые. На основании рассмотренной модели электронного спектра, можно утверждать, что скачкообразное изменение термодинамических и кинетических характеристик металлов, обусловленное топологическим переходом второго типа, будет наблюдаться во всех явлениях и эффектах, в которых определяются экстремальные геометрические размеры поверхности Ферми и эффективные массы электронов проводимости. Если изучать только эти явления, то нельзя различить какой тип топологического перехода экспериментально наблюдается. Поэтому, например, нельзя считать скачкообразное изменение спектра осцилляций в эффекте де-Гааза – ван Альфена надежным индикатором изменения топологии поверхности Ферми.

Однако если дополнительно изучить термодинамические и кинетические характеристики металлов, чувствительные к появлению или исчезновению особенностей в плотности электронных состояний, то экспериментально легко определить, какой тип электронного топологического перехода наблюдается. В работах [7,8] показано, что особенности в плотности электронных состояний возникают только при изменении топологии изоэнергетических поверхностей квазичастиц. В случае второго типа электронного топологического перехода особенности в плотности электронных состояний не возникают.

Как известно плотность электронных состояний определяется выражением

$$v(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int dp \delta(\varepsilon(p) - \varepsilon). \quad (3)$$

Легко вычислить зависимость плотности электронных состояний от энергии для электронного спектра, который описывается уравнением (1):

$$v(\varepsilon) = \frac{V(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\varepsilon_c} g_0(\xi), \quad (4)$$

$$\xi = \varepsilon / \varepsilon_c,$$

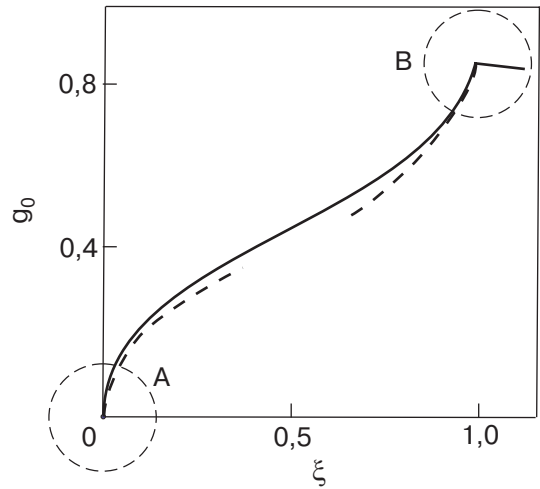


Рис. 2. Зависимость $g_0(\xi)$ для модельного спектра (1) в широком интервале энергий. Выделенные области: область возникновения новых участков изоэнергетических поверхностей (A); область возникновения «перемычки» между участками изоэнергетических поверхностей (B).

где функция $g_0(\xi)$ определяется формулой

$$g_0(\xi) = \begin{cases} \ln((1 + \sqrt{1 + \sqrt{\xi}})/(1 + \sqrt{1 - \sqrt{\xi}})), & 0 \leq \xi \leq 1, \\ \ln((1 + \sqrt{1 + \sqrt{\xi}})/4\sqrt{\xi}), & \xi \geq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Из формулы (5) следует, что в интервале энергий $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_c$ существует два типа особенностей в плотности электронных состояний, которые обусловлены топологическими переходами (рис. 2). В малой окрестности вблизи критических энергий – области A и B на рис. 2 – функцию $g_0(\xi)$ можно аппроксимировать функцией $g_a(\xi)$. Определим функцию $g_a(\xi)$. При малом возрастании энергии Ферми от $\varepsilon_F = 0$ «рождаются» два овалоида, которые увеличиваются в размерах по мере увеличения ε_F , а плотность состояний (5) имеет корневую особенность при $\varepsilon = \varepsilon_F = 0$ (т.е. при $\xi \rightarrow 0$). Аппроксимирующая функция $g_a(\xi)$ имеет вид

$$g_a(\xi) = \frac{1}{2} \sqrt{\xi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_c}}. \quad (6)$$

При дальнейшем увеличении энергии Ферми $\varepsilon = \varepsilon_F \rightarrow \varepsilon_c$ из двух овалоидов образуется связанная замкнутая поверхность с одной конической особой точкой. При энергиях $\varepsilon = \varepsilon_F = \varepsilon_c$ (т.е. при $\xi \rightarrow 1$) в плотности состояний исчезает корневая особенность и функцию $g_a(\xi)$ можно записать в виде

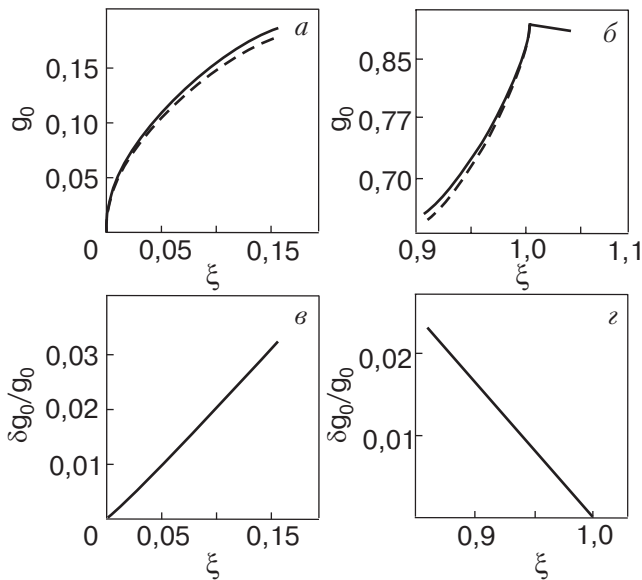


Рис. 3. Зависимость $g_0(\xi)$ в окрестности топологических переходов: область возникновения новых участков изоэнергетических поверхностей (а); область возникновения «перемычки» между участками изоэнергетических поверхностей (б), сплошные кривые — зависимости $g_0(\xi)$ (5), пунктирные кривые — аппроксимирующие зависимости, согласно (6) и (7). Относительная ошибка приближенных выражений (6) и (7) от точного выражения (5) (в, з).

$$g_a(\xi) = \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \xi} = \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_c - \epsilon_F}{\epsilon_c}}. \quad (7)$$

С другой стороны, из выражения (5) следует, что при $4\epsilon_c - \epsilon_F = \pm \delta\epsilon$ особенностей в плотности состояний нет, а функция $g_a(\xi)$, аппроксимирующая $g_0(\xi)$ при $\epsilon_F \rightarrow 4\epsilon_c$, имеет вид

$$g_a(\xi) = \ln\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{48}(4 - \xi) = \ln\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{48}\left(\frac{4\epsilon_c - \epsilon_F}{\epsilon_c}\right). \quad (8)$$

Рассматриваемая модель позволяет численно определить интервал энергии, где особенности плотности состояний можно с хорошей точностью аппроксимировать корневой зависимостью от величины ϵ_F / ϵ_c либо $\delta\epsilon / \epsilon_c = |\epsilon_F - \epsilon_c| / \epsilon_c$ соответственно (см. рис. 3). Расчеты показывают, что в окрестности электронного топологического перехода аномалии макроскопических характеристик проводящих кристаллов, обусловленные особой частью плотности состояний, можно аппроксимировать в виде двух слагаемых: линейного слагаемого, пропорциональ-

ного внешнему возмущению, и нелинейного, обусловленного корневой особенностью плотности состояния. Относительная точность такой аппроксимации $\delta g(\xi) / g_0(\xi) = |g_0(\xi) - g_a(\xi)| / g_0(\xi)$ до значений $\epsilon / \epsilon_c = 0,1$ либо $\delta\epsilon / \epsilon_c = 0,1$ составляет 1–2% (рис. 3, в, з соответственно). Этот результат позволяет обосновать методологию обработки экспериментальных данных, в которых наблюдались макроскопические аномалии в термодинамических характеристиках сверхпроводников и термоэдс под влиянием давления и концентрации примеси [9–11]. Если топологический переход наблюдается при изменении внешнего давления, то величина $\delta\epsilon / \epsilon_c$ имеет масштаб

$$\delta\epsilon / \epsilon_c \approx \delta V / V = \gamma P,$$

где величина $\delta V / V$ — относительное изменение объема тела под давлением P , γ — сжимаемость металла. Так как для металлов сжимаемость $\gamma \approx 10^{-6} \text{ см}^2 / \text{кг}$, то до давлений $P \approx 10^5 \text{ кг} / \text{см}^2$ экспериментальные данные можно описывать формулами (6) и (7).

Таким образом, предложенный модельный электронный спектр (1), который имеет большой набор различных дифференциально-геометрических и топологических характеристик поверхности Ферми, позволил предсказать новый тип электронного топологического перехода в металлах при изменении энергии Ферми и ввести новое понятие, обобщающее различные типы электронных топологических переходов в металлах при изменении энергии Ферми — изменение топологии сферического образа поверхности Ферми.

Ряд металлов имеет участки поверхности Ферми типа «гантель». Так, например, у таллия такие участки поверхности Ферми расположены в 5-й зоне Бриллюэна [12]. Можно предположить, что если изменить энергию Ферми соответствующим образом, то у этих металлов возможен переход типа гантель—овалоид, связанный с изменением топологии сферического образа поверхности Ферми.

1. И.М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **38**, 1569 (1960).
2. В.И. Макаров, В.Г. Барьяхтар, *ЖЭТФ* **48**, 1717 (1965).
3. Н.Б. Брандт, Н.И. Гинзбург, Т.А. Игнатъева, Б.Г. Лазарев, Л.С. Лазарева, В.И. Макаров, *ЖЭТФ* **49**, 85 (1965).
4. С.W. Chu, T.F. Smith, and W.E. Gardner, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 198 (1968).
5. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, *Наглядная геометрия*, «Наука», Москва (1981).
6. Ю.А. Аминов, *Геометрия подмногообразий*, Наука думка, Киев (2002).
7. L. Van Hove, *Phys. Rev.* **89**, 1189 (1953).

8. J.C. Phillips, *Phys. Rev.* **104**, 1263 (1956).
9. Н.В. Заварицкий, В.И. Макаров, А.А. Юргенс, *Письма в ЖЭТФ* **42**, 148 (1985).
10. В.Г. Барьяхтар, В.В. Ганн, В.И. Макаров, Т.А. Игнатъева, *ЖЭТФ* **62**, 1118 (1972).
11. Т.А. Игнатъева, А.Н. Великодный, *ФНТ* **30**, 523 (2004).
12. P.M. Holtham, *J. Phys.* **F3**, 1361 (1973).

A new type of topological electron transition in metals with changing Fermi energy

V.I. Makarov, D.V. Bolotov,
V.A. Gor'kavyi, and A.A. Yatsenko

A new type of topological electron transition occurred with a jump-like change in the differential-geometrical characteristics of the Fermi surface (without any modification of its topology)

at a certain critical energy ε_d is predicted. This type of transition differs from the known ones, which are associated with a modification of the Fermi surface topology, in that the constant-energy surface, $\varepsilon(p) = \varepsilon_d$, does not contain particular points at which the electron velocity becomes zero. It is shown that common to these two types of electron topological transitions responsible for by the jump-like changes in the Fermi surface topology and its differential-geometrical characteristics without any modification of topology, is a qualitative change of the spherical image of Fermi surface agreed upon a jump-like change of the number of pre-images under the spherical mapping.