Физика низких температур, 2005, т. 31, № 12, с. 1355–1365

Обобщенная проницаемость сверхпроводника второго рода

В.К. Игнатьев

Волгоградский государственный университет
ул. 2-я Продольная, 30, г. Волгоград, 400062, Россия
E-mail: ignatjev@vistcom.ru

Статья поступила в редакцию 13 февраля 2004 г., после переработки 24 июня 2005 г.

Путем усреднения микроскопических полей по системе абрикосовских вихрей, движущихся с переменной во времени и пространстве скоростью, построена обобщенная индукция сверхпроводника в смешанном состоянии, учитывающая вихревой ток, транспортный ток сверхпроводящей компоненты и ток проводимости нормальной компоненты. Получены выражения для линейной и нелинейной обобщенной проницаемости. Показано, что в сверхпроводнике возможны объемные волны, в том числе продольные, а пространственная дисперсия проявляется уже в радиочастотном диапазоне и оказывает существенное влияние на генерацию высших гармоник.

Шляхом усереднення мікроскопічних полів по системі абрикосівських вихорів, що рухаються з перемінною в часі і просторі швидкістю, побудована узагальнена індукція надпровідника в змішаному стані, що враховує вихоровий струм, транспортний струм надпровідної компоненти і струм провідності нормального компонента. Отримано вираз для лінійної та нелінійної узагальненої проникності. Показано, що в надпровіднику можливі об’ємні хвилі, у тому числі подовжні, а просторова дисперсія виявляється вже в радіочастотному діапазоні і впливає на генерацію вищих гармонік.

PACS: 74.72.Bj

Введение

Полвека, прошедшие со времени работы В.Л. Гинзбурга и Л.Д. Ландау [1], не снизили интерес к электродинамике сверхпроводников второго рода. Магнитный поток в них переносится диффузией [2,3] вихрей Абрикосова [4], образующих как сравнительно регулярную решетку [5], так и своеобразную вихревую жидкость [6,7] и даже вихревую плазму [8], причем параметр порядка в смешанном состоянии сверхпроводника сильно зависит от координат [9]. Динамика одиночного вихря хорошо изучена как теоретически [10], так и экспериментально [11]. Потери на нормальную проводимость кора и необратимые изменения параметра порядка, возникающие при вязком движении вихрей, учтены в работе [12], а потери, связанные с поляризацией среды полем движущегося вихря, — в работе [13]. При этом уравнения баланса сил обычно выводятся термодинамически [10], т.е., строго говоря, относятся к равновесному состоянию.

Смешанное состояние сверхпроводника II рода также можно рассматривать в рамках термодинамического подхода как равновесное состояние системы абрикосовских вихрей, прямолинейных или искривленных, характеризующейся, как система одинаковых частиц, например, своеобразным химическим потенциалом [14]. При описании реакции системы вихрей на внешнее электромагнитное воздействие (транспортный ток или переменное магнитное поле) в основном применяется кинетический подход [9], приводящий, например, к уравнению критического состояния, известному как модифицированная модель Бина [15].

Расчет отклика сверхпроводника в смешанном состоянии на переменное электромагнитное поле обычно ведется в предположении, что решетка вихрей перемещается как целое, т.е. все вихри движутся с переменной во времени, но однородной в пространстве скоростью [9,12,16,17]. В рамках такого колебательного подхода к движению решетки анализируются частотные зависимости коэффициента отражения [17], поверхностного импеданса [18] и восприимчивости [19], генерация гармоник [9] и появление ступенек на вольт-амперной характеристике [16].

Модели критического и резистивного состояний получили хорошее экспериментальное подтверждение в квазистационарном режиме, например на промышленной частоте [11,14,20]. В то же время в диапазоне радиочастот обнаружены существенные отклонения от классической модели, особенно характерные для керамических сверхпроводников, в которых диаметр вихревых нитей может быть значительно большим, чем в металлических [21]. В работе [22] показано, что поверхностное сопротивление ВТСП на несколько порядков больше, чем предписывается теорией. Частотная зависимость поверхностного импеданса существенно отклоняется от предписываемой моделью критического состояния линейности [15]. Плотность сверхпроводящего тока также имеет особенность вблизи поверхности сверхпроводника [23].

В оптике особенности поверхностного импеданса и соответствующие аномалии отражения могут быть обусловлены пространственной дисперсией восприимчивости [24], проявляющейся, когда длина волны сравнима с характерным масштабом нелокальности. В смешанном состоянии сверхпроводника таким масштабом может быть размер вихря или период вихревой решетки, поэтому для керамических сверхпроводников нелокальность оказывает влияние на поверхностный импеданс и нелинейную восприимчивость уже на низких частотах [18]. В радиочастотном диапазоне влияние пространственной дисперсии на восприимчивость сверхпроводника, как линейную, так и нелинейную, может иметь резонансный характер. Как будет показано ниже, нелокальность сама может стать причиной нелинейной восприимчивости сверхпроводника, этот эффект в кристаллооптике не наблюдается.

Упругие свойства вихревой решетки достаточно подробно исследованы теоретически и экспериментально [14]. Между тем при исследовании комплексной восприимчивости сверхпроводников II рода анализируется только частотная зависимость и не принимается во внимание зависимость от волнового вектора [25], хотя учитываются такие моменты, как крип потока и соответствующая температурная зависимость поглощения [26], гистерезисная зависимость критического тока от мгновенного значения магнитного поля [27,28]. Фактически при таком подходе динамика вихревой решетки рассматривается как колебательный, а не волновой процесс. При этом удается определить закон частотной дисперсии колебаний решетки [29], но исчезают хорошо известные в акустооптике и спин-волновой электронике эффекты взаимодействия электромагнитной волны с квазиупругими волнами. Как будет показано ниже, волна, распространяющаяся в вихревой решетке, является не чисто продольной, как объемная акустическая волна, а смешанной, подобно спиновой волне [30]. Соответственно, и дисперсионные характеристики такой волны гораздо богаче, чем акустической.

Следует отметить, что пространственная дисперсия в диэлектриках приводит к появлению новых нормальных волн [31]. Подобного эффекта можно ожидать и в сверхпроводниках, причем дисперсионными характеристиками таких волн легко управлять электрически, поскольку период вихревой решетки зависит от внешнего магнитного поля. Ранее такая возможность была известна только для спиновых волн [30]. Распространение электромагнитных и спиновых волн в слоистой структуре сверхпроводник—феррит—сверхпроводник исследовано в работе [32]. Показана возможность эффективного управления дисперсионными характеристиками спиновых волн, но не учитываются обусловленные пространственной дисперсией характеристики волн в самом сверхпроводнике. Учет пространственной дисперсии позволит расширить функциональные возможности сверхпроводниковой электроники [33].

Характерной особенностью сверхпроводников II рода, затрудняющей анализ электромагнитных процессов в них, является невозможность разделить токи намагниченности и проводимости (транспортные) даже на постоянном токе, так как они создаются движением общего конденсата куперовских пар [10,14]. Поэтому по аналогии с оптикой состояние сверхпроводника можно описать линейным функционалом электрического поля — вектором обобщенной поляризации $\mathcal{P}$, производная которого равна усредненному полному микроскопическому току $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ в среде, включающему как ток проводимости, так и локальные токи намагниченности и поляризации связанных зарядов, которой в диапазоне радиочастот можно пренебречь [34]:

$$\frac{\partial\mathcal{P}(\mathbf{r})}{\partial t} = \langle\mathbf{j}\rangle = \frac{1}{V}\int\limits_V \mathbf{j}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)\, d^3r_1 \ ,$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{r},t) = \int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \tilde{\chi}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t_1)\mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t-t_1)\, d^3r_1 dt_1 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \hat{\chi}(\mathbf{r},\mathbf{k},\omega)\mathcal{E}(\mathbf{k},\omega)\,\exp\,(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)\, d\omega\, d^3k \ ,$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{k},\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{r},t)\,\exp\,(-i\mathbf{kr} + i\omega t)\;dt\;d^3r\;,$$

$$\hat{\chi}(\mathbf{r},\mathbf{k},\omega) = \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t_1)\,\exp\,(-i\mathbf{kr}_1 + i\omega t_1)\;dt_1\;d^3r_1\;. \tag{1}$$

Здесь V — физически малый объем, содержащий достаточно много структурных единиц, в котором можно пренебречь изменением полей. В соотношении (1) среда полагается изотропной и неоднородной, но стационарной. При этом электромагнитное поле в среде описывается тремя векторами $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и обобщенной индукцией $\mathcal{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathcal{P}$, а уравнения Максвелла без сторонних токов и зарядов принимают вид [34]

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0,\;\; \operatorname{div}\mathcal{D} = 0,$$

$$c\,\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\,\partial\mathbf{B}/\partial t,\; c\,\operatorname{rot}\mathbf{B} = \partial\mathcal{D}/\partial t\;. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — макроскопические, т.е. усредненные по физически малому объему микроскопические поля $\mathbf{e}$ и $\mathbf{b}$ соответственно:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{V}\int\limits_V \mathbf{e}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)\;d^3r_1\;,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{V}\int\limits_V \mathbf{b}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)\;d^3r_1\;. \tag{3}$$

Соотношение (1) — материальное уравнение среды. Зависимость полного тока от переменного магнитного поля в нем учитывается с помощью третьего уравнения (2) как

$$\mathbf{B}(t) = -\,c\int\limits_0^t \operatorname{rot}\mathbf{E}(t_1)\;dt_1 + \mathbf{B}(0)\;.$$

Постоянное магнитное поле $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(0)$ обычно вводится в обобщенную восприимчивость как параметр.

Граничные условия для векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и $\mathcal{D}$ получаются из уравнений (2) обычным образом [34]:

$$E_{2\tau} = E_{1\tau},\;\; B_{2n} = B_{1n},\;\; \mathcal{D}_{2n} = \mathcal{D}_{1n},$$

$$B_{2\tau} - B_{1\tau} = 4\pi i_v / c\;, \tag{4}$$

где i_v — линейная плотность индуцированного в среде полного поверхностного тока, включая ток намагниченности. Четвертое условие соответствует непрерывности поля $\mathbf{H}$ на границе сверхпроводника. Однако применяемое при описании смешанного состояния сверхпроводника термодинамическое определение поля $\mathbf{H}$ [14,35] справедливо лишь для равновесного состояния, но не для диссипативного резистивного. Кроме того, построение энергии поля в диспергирующей среде достаточно сложная задача, в то время как связь поля $\mathbf{H}$ с обобщенной индукцией $\mathcal{D}$ получена в достаточно общих условиях [34].

Волновое уравнение для смешанного состояния

Уравнения Гинзбурга—Ландау [1] получены минимизацией свободной энергии, они и следующее из них уравнение абрикосовского вихря [4] описывают стационарное термодинамически равновесное состояние. Нестационарные процессы в сверхпроводниках II рода описываются микроскопическими уравнениями Горькова—Элиашберга [36]. Эти уравнения получены методами квантовой электродинамики с применением диаграммной техники и позволяют решать многочисленные задачи нестационарной сверхпроводимости, учитывая взаимодействие куперовского конденсата с электрон-дырочными возбуждениями и неравновесными фононами [9,16,37].

Для анализа реакции системы абрикосовских вихрей на внешнее электромагнитное поле из микроскопических уравнений обычно выводятся динамические (временные) уравнения Гинзбурга—Ландау для параметра порядка, демонстрирующие макроскопические квантовые свойства сверхпроводника [37]. Таким образом были получены выражения для коэффициента вязкости движущихся вихрей и сопротивления течения потока в широком диапазоне температур и для любых сплавов [38,39]. Однако при распространении в сверхпроводнике электромагнитной волны, длина которой в среде сравнима с периодом вихревой решетки, поле скоростей вихрей не является однородным ни в пространстве, ни во времени, поэтому связь между усредненными в смысле (3) электрическим и магнитным полями будет более сложной, чем полагается при рассмотрении ламинарного течения потока [12]. Эти особенности, в свою очередь, могут оказать существенное влияние на дисперсионные характеристики волн.

Влияние процессов переноса и пространственной дисперсии на распространение электромагнитных волн хорошо изучено в электродинамике плазмы [40]. Для построения кинетических уравнений плазмы при этом используется метод иерархии масштабов Боголюбова [41], позволяющий в определенных предположениях не учитывать внутреннюю структуру частиц плазмы и описывать их движение классически. В радиочастотном диапазоне, когда энергия кванта много меньше ширины щели, смешанное состояние сверхпроводника также можно рассматривать как плазмоподобную среду [8]. При этом в области порядка длины когерентности ξ содержится много ячеек кристаллической решетки и куперовских пар. Роль второго масштаба играет характерный размер вихря $\lambda >> \xi$. Поэтому построение макроскопических полей для сверхпроводника второго рода, находящегося в однородном вдоль оси z магнитном поле, можно выполнять в два этапа.

Сначала производится усреднение (1) и (3) по объему V в виде цилиндра с образующей вдоль оси z и диаметром порядка ξ. Такое усреднение делает задачу двумерной и «сглаживает» пространственные неоднородности полей, но сохраняет нелокальность, обусловленную взаимодействием абрикосовских вихрей. На втором этапе производится статистическое усреднение по ансамблю абрикосовских вихрей. Поскольку характерное время $\tau \sim \Delta/\hbar$ запаздывания восстановления параметра порядка в движущемся вихре [42] много меньше периода волны, куперовский конденсат можно считать микроскопически равновесным, когда величина $-2e\varphi/\hbar$, где φ — скалярный потенциал, совпадает с производной фазы параметра порядка θ [37].

Динамику классических частиц в плазмоподобной среде удобно описывать уравнениями Лагранжа. В рамках сделанных упрощающих предположений куперовский конденсат в сверхпроводнике можно характеризовать общим скалярным потенциалом и считать лагранжевой системой. Поэтому представляет интерес получить временные уравнения Гинзбурга—Ландау для такой системы методами формализма Лагранжа. Построим нерелятивистский лагранжиан сверхпроводящего конденсата, используя классическое выражение для свободной энергии сверхпроводника в электромагнитном поле [1,12,43–45]:

$$\mathcal{L} = \frac{ie\hbar}{2cm}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)\mathbf{A} - \frac{\hbar^2}{4m}\nabla\psi\nabla\psi^* - \frac{e^2}{c^2m}A^2|\psi|^2 + $$
$$+ 2e|\psi|^2\varphi + \frac{i\hbar}{2}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \alpha|\psi|^2 - \frac{\beta}{2}|\psi|^4 +$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\left|\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right|^2 - \frac{1}{8\pi}|\operatorname{rot}\mathbf{A}|^2. \quad (5)$$

Здесь использовано выражение [46] для потенциальной энергии переменного заряда в заданном потенциале и учтено, что

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi. \quad (6)$$

Запишем уравнение Лагранжа для непрерывной среды в виде [43]

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial q_i/\partial t)} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial q_i/\partial x)} -$$
$$- \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial q_i/\partial y)} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial q_i/\partial z)} = \frac{\partial F}{\partial(\partial q_i/\partial t)}. \quad (7)$$

Полевые функции $q_i(\mathbf{r},t)$ — для лагранжиана (5) это параметр порядка ψ^* и компоненты вектор-потенциала A_x, A_y, A_z. В правой части уравнения (7) записана производная диссипативной функции по соответствующей обобщенной скорости [47], поскольку сверхпроводящая компонента и электромагнитное поле не образуют замкнутую систему. Ее взаимодействие с кристаллической решеткой и нормальной компонентой приводит к диссипации энергии электромагнитного поля в коре движущихся вихрей [42]. Удвоенное значение диссипативной функции описывает скорость уменьшения энергии в системе. Пренебрегая запаздыванием восстановления параметра порядка в движущемся вихре [42], будем считать, что диссипация связана с током нормальной компоненты и положим $F = |\mathbf{e}|^2\sigma_n/2$, где σ_n — проводимость нормальной компоненты.

Вычисляя соответствующие производные лагранжиана (5) и диссипативной функции, подставляя их в уравнения (7), после несложных векторных преобразований с учетом соотношения (6) получим

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left\{-\frac{1}{4m}\left(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + 2e\varphi - \alpha - \beta|\psi|^2\right\}\psi, \quad (8)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\frac{8\pi e^2}{c^2m}|\psi|^2\mathbf{A} + \frac{i2\pi e\hbar}{cm}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) +$$
$$+ \frac{4\pi}{c}\sigma_n\mathbf{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t}. \quad (9)$$

Краевая задача для этих уравнений имеет вид однородных граничных условий третьего рода [48]:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S + \left(\frac{2ei}{c}A_n - b\right)\psi\Big|_S = 0. \quad (10)$$

Константа b определяется ситуацией на границе S сверхпроводника.

Уравнение (8) согласуется с нестационарными уравнениями, полученными в работах [49,50], если не учитывать заряд неравновесных носителей. Разумеется, это говорит только о применимости модельного лагранжиана (5) в рассмотренном квазиравновесном случае, который характерен для движения системы абрикосовских вихрей в поле электромагнитной волны радиочастотного диапазона в линейном приближении. Отметим, что описание динамики квазиравновесного куперовского конденсата уравнениями Лагранжа близко к предложенной в классической работе [12] идее, что скорость изменения параметра порядка пропорциональна вариационной производной свободной энергии.

Учитывая, что в силу уравнения Максвелла

$$\text{rot rot}\,\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s + \frac{4\pi}{c}\sigma_n\mathbf{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t}\,, \qquad (11)$$

уравнение (9) можно записать в виде [51]

$$\mathbf{j}_s = \frac{c|\Psi|^2}{4\pi\lambda^2}\left(\frac{\hbar c}{2e}\nabla\theta - \mathbf{A}\right), \qquad (12)$$

где

$$\Psi = \psi/\psi_0 = |\Psi|\exp(i\theta), \quad \lambda = \frac{c}{2e}\sqrt{m/\pi n_s}\,.$$

Мнимая часть уравнения (8) при этом с учетом соотношения (12) принимает вид уравнения непрерывности сверхпроводящей компоненты $\partial|\Psi|^2/\partial t = -(1/en_s)\,\text{div}\,\mathbf{j}_s$, а действительная часть соответственно

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\hbar}{4m}\left(\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|} - \left|\nabla\theta - \frac{2e}{c\hbar}\mathbf{A}\right|^2\right) - \frac{\alpha}{\hbar}(|\psi|^2 - 1) - \frac{2e}{\hbar}\varphi\,. \qquad (13)$$

Если вне кора положить $|\Psi| = 1$, а радиус кора вихря в не слишком сильном поле считать пренебрежимо малым, то, взяв ротор от уравнения (12), с учетом формул (2) и (11) получаем [47]

$$\mathbf{b} + \lambda^2\,\text{rot rot}\,\mathbf{b} + \frac{4\pi\sigma_n\lambda^2}{c^2}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t} + \frac{\lambda^2}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{b}}{\partial t^2} = \mathbf{\Phi}_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\,. \qquad (14)$$

Здесь $\mathbf{r}_i$ — координаты центра вихря, $\mathbf{\Phi}_0 = \Phi_0\mathbf{1}_i$, где $\mathbf{1}_i$ — единичный вектор, направленный вдоль оси вихря, $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$.

В стационарном случае уравнение (14) совпадает с известным уравнением неподвижного абрикосовского вихря [51]. Для вихря, движущегося со скоростью v вдоль оси x, четвертое слагаемое в правой части уравнения (14) равно $(\lambda^2 v^2/c^2)\partial^2\mathbf{b}/\partial x^2$ и описывает деформацию движущегося вихря, связанную с лоренцевым сжатием. При $v \ll c$ им можно пренебречь и считать, что движущийся вихрь не деформирован. Третье слагаемое связано с током нормальной проводимости. Пренебрегая интерференцией этого тока со сверхпроводящей компонентой [37], можно считать, что оно не искажает распределение сверхпроводящего тока и параметра порядка относительно кора движущегося вихря.

Усредним уравнение (14) по объему V, содержащему много параллельных вихрей, выбрав его в виде цилиндра с основанием S, перпендикулярным оси вихрей, и образующей, параллельной осям вихрей:

$$\mathbf{B} + \lambda^2\,\text{rot rot}\,\mathbf{B} + \frac{4\pi\lambda^2\sigma_n}{c^2}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\lambda^2}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = n\mathbf{\Phi}_0\,, \qquad (15)$$

где n — концентрация вихрей. При усреднении принято, что формула (5), вытекающая из уравнений Гинзбурга—Ландау [1], применима при малых значениях параметра порядка. Тогда можно считать, что при сверхпроводящем переходе концентрация нормальной фазы меняется незначительно, и нормальная проводимость σ_n почти постоянна во всем объеме сверхпроводника.

Из волнового уравнения (15) следует, что только в однородном постоянном поле можно считать $B = n\Phi_0$. Это связано с тем, что при усреднении по формуле (3) граница основания S делит некоторые вихри на части, и при неоднородном распределении вихрей они не компенсируют друг друга. Уравнение (15) можно рассматривать как нелокальное и нестационарное материальное уравнение для смешанного состояния сверхпроводника второго рода. Вместо напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ полевой функцией в нем является концентрация вихрей n.

Как следует из уравнений (4), граничное условие для индукции магнитного поля определяется плотностью полного поверхностного тока, который зависит от положения вихрей вблизи границы. Таким образом, возникает задача дополнительных граничных условий (ДГУ), которые накладываются на функцию $n(\mathbf{r})$. Как и в случае спиновых волн [27], ДГУ в отличие от электродинамических условий (4) определяются взаимодействием магнитных моментов, в данном случае вихрей, с границей [52–54]. Поскольку параметры решетки практически не меняются вблизи границы сверхпроводника [54], ДГУ для смешанного состояния можно сформулировать в виде условий третьего рода, аналогичных (10).

Динамика вихрей в плоской волне

Электродинамика смешанного состояния сверхпроводника значительно «богаче», чем в кристаллооптике, где нелокальность обусловлена жесткой решеткой, или в плазме, где отсутствует ближний порядок. При распространении в сверхпроводнике электромагнитной волны, длина которой сравнима с периодом вихревой решетки, поле скоростей абрикосовских вихрей не является однородным в пространстве, что изменяет электрическое поле, порождаемое движущимися вихрями.

Продифференцируем по времени уравнение (12) с учетом (13):

$$\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = \frac{c^2|\psi|^2}{4\pi\lambda^2}\mathbf{e} + \frac{\hbar c^2}{8\pi\lambda^2 e}\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t}\left(\nabla\theta - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\right) + \nabla f\ . \quad (16)$$

Здесь обозначено

$$f = \frac{\hbar}{4m}\left(\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|} - \left|\nabla\theta - \frac{2e}{c\hbar}\mathbf{A}\right|^2\right) - \frac{\alpha}{\hbar}|\psi|^2\ .$$

Первое слагаемое в уравнении (16) совпадает с первым уравнением Лондонов [51], второе и третье слагаемые — вклад движущихся вихрей, для неподвижного вихря они равны нулю. При $v << c$ можно считать, что вихрь при движении не деформируется. Поэтому модуль и фаза параметра порядка, плотность сверхпроводящего тока и, следовательно, вектор-потенциал распределены относительно центра $\mathbf{r}_i(t)$ движущегося вихря так же, как и в неподвижном.

Обозначим $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$. Тогда $\partial|\psi|^2/\partial t = \mathbf{v}\,\nabla|\psi|^2$, где $\mathbf{v}(\mathbf{r}_i) = d\mathbf{r}_i/dt$ — скорость центра вихря,

$$\nabla\theta = \mathbf{l}\times\boldsymbol{\rho}/\rho^2,\ \mathbf{A} = \mathbf{l}\times\boldsymbol{\rho}A(\rho)/\rho,$$
$$\nabla|\psi|^2 = (d|\psi|^2/d\rho)\boldsymbol{\rho}/\rho,\ \nabla f = (df/d\rho)\boldsymbol{\rho}/\rho.$$

Усредним уравнение (16) по физически малому объему, содержащему много вихрей, центры которых $\mathbf{r}_i$ распределены в сверхпроводнике с плотностью n. Нетрудно видеть, что третье слагаемое в силу симметрии вихря при усреднении дает нуль. Тогда

$$\left\langle\frac{\partial \mathbf{j}_s(\mathbf{r})}{\partial t}\right\rangle = \frac{c^2}{4\pi\lambda^2}\mathbf{E} + \frac{\hbar c^2}{8\pi\lambda^2 e}\times$$
$$\times\,\mathbf{l}\times\int\!\!\int_S n(\mathbf{r}-\mathbf{c})(\mathbf{v}(\mathbf{r}-\mathbf{c})\mathbf{c})\frac{\mathbf{c}}{\rho^2}\frac{d|\psi|^2}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{2e}{\hbar c}A\right)d^2\rho\ .$$

Здесь интегрирование в правой части ведется по всему сечению вихря.

Направим ось z вдоль оси вихрей, тогда вектор $\boldsymbol{\rho}$ в интегралах будет иметь компоненты x и y, а вектор $\mathbf{r}$ соответственно x_0 и y_0. Так как область сверхпроводящих токов и магнитных полей в вихре имеет размер порядка λ, функции nv_x и nv_y можно разложить в ряд Тейлора по x и y до квадратичных слагаемых.

Получившиеся интегралы удобно вычислять в цилиндрических координатах. Учитывая при интегрировании по частям, что поле вихря затухает на бесконечности быстрее экспоненты [51], а поток, охваченный вихрем, равен кванту Φ_0, $|\psi(0)| = 0$, $|\psi(\infty)| = 1$ и используя стационарное уравнение (14), после векторных преобразований получаем

$$\frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial t^2} = \sigma_n\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} +$$
$$+\frac{c^2}{4\pi\lambda^2}\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{\Phi}_0\times(n\mathbf{v} + \lambda^2\Delta(n\mathbf{v}))\right]. \quad (17)$$

В уравнении (17) полный микроскопический ток состоит из токов сверхпроводящей и нормальной компонент без учета интерференции [37]. Последнее слагаемое в формуле (17), зависящее от скорости вихрей, можно рассматривать как дополнительное поле, создаваемое движущимися вихрями: $\mathbf{E}_v = \mathbf{\Phi}_0\times(n\mathbf{v} + \lambda^2\Delta(n\mathbf{v}))/c$. Возьмем ротор от правой и левой частей этой формулы. Учитывая, что постоянный вектор $\mathbf{\Phi}_0$ перпендикулярен векторам $\mathbf{v}$ и ∇n, после несложных векторных преобразований получим

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E}_v = \mathbf{\Phi}_0\{(\mathbf{v} + \lambda^2\Delta(n\mathbf{v})/n)\nabla n + n\nabla(\mathbf{v} +$$
$$+\lambda^2\Delta(n\mathbf{v})/n)\}/c = \mathbf{\Phi}_0\ \mathrm{div}\ (n\mathbf{v} + \lambda^2\Delta(n\mathbf{v}))/c.$$

Продифференцируем по времени уравнение (15) и возьмем от него лапласиан. С учетом уравнения непрерывности $\partial n/\partial t = -\,\mathrm{div}\ (n\mathbf{v})$, ограничиваясь вторыми производными, получим $\lambda^2\Delta(\partial\mathbf{B}/\partial t) - \partial\mathbf{B}/\partial t = \mathbf{\Phi}_0\ \mathrm{div}\ (n\mathbf{v})$. Соответственно, $\partial(\Delta\mathbf{B})/\partial t = \mathbf{\Phi}_0\partial(\Delta n)/\partial t = -\mathbf{\Phi}_0\Delta\ (\mathrm{div}\ (n\mathbf{v})) = -\mathbf{\Phi}_0\ \mathrm{div}\ (\Delta(n\mathbf{v}))$. Таким образом, $\mathrm{rot}\ \mathbf{E}_v = -(1/c)\ \partial\mathbf{B}/\partial t$, что совпадает с уравнением Максвелла и подтверждает применимость формул (15) и (17).

При движении однородной решетки вихрей с постоянной во времени и пространстве скоростью в сверхпроводнике без внешних полей формула (17) переходит в известную формулу $\mathbf{E} = \mathbf{B}\times\mathbf{v}/c$ [12,55], которую можно вывести из преобразования Лоренца [34,43,46]. Действительно, в системе, связанной с однородным во времени и пространстве потоком вихрей, все вихри покоятся, и электрическое поле отсутствует. Если же концентрация вихрей и их скорость являются функциями времени и координат, в любой инерциальной системе отсчета часть вихрей будет двигаться с переменными скоростями, следовательно, будет присутствовать дополнительное электрическое поле.

Для построения обобщенной поляризации (1) входящую в правую часть уравнения (7) обобщенную силу трения [47] следует выразить через ток нормальной проводимости. Нетрудно показать, что магнитный момент $\mathbf{M}$ единицы длины вихря равен $\mathbf{\Phi}_0/(4\pi)$. Поскольку сверхпроводящая компонента, создающая этот момент, не обменивается энергией с нормальной компонентой, поле $\mathbf{B}_n$, создаваемое токами нормальной проводимости, можно считать внешним для этого момента. Если сверхпроводник однороден вдоль оси z, то поле $\mathbf{B}_n = B_n\mathbf{l}$ и магнитный момент **M** направлены вдоль z. Воспользовавшись формулой для силы, действующей на магнитный диполь во внешнем поле [34], получим

$$\mathbf{f}_f = \mathrm{grad}\,(\mathbf{MB}_n) = M\ \mathrm{grad}\ B_n = M\mathbf{l}\times \mathrm{rot}\ \mathbf{B}_n = \\ = \mathbf{\Phi}_0 \times \mathbf{j}_n / c\ . \tag{18}$$

Отметим, что сила, действующая на вихрь со стороны токов нормальной проводимости, направлена противоположно силе, действующей со стороны сверхпроводящих токов [51]. Это естественно, поскольку поле, формируемое сверхпроводящими токами, не является внешним по отношению к вихрю.

Линейная восприимчивость

Пусть в сверхпроводнике внешним источником, например транспортным током, заданы стационарные распределения вихрей $n_0(\mathbf{r})$ и соответствующего магнитного поля $B_0(\mathbf{r})$. При анализе линейной восприимчивости будем считать, что переменные части концентрации и поля малы в сравнении с их стационарными значениями, и в уравнении (17) положим $n(\mathbf{r},t) = n_0(\mathbf{r})$.

Будем считать, что в стационарном состоянии вихри закреплены на центрах пиннинга, а под воздействием волны колеблются около этих центров, не переходя в режим течения потока. При этом внутри сверхпроводника вихри не зарождаются и не исчезают. Воспользуемся моделью коллективного пиннинга упругого вихря на распределенных дефектах [51]. Проводя усреднение (3) сначала по оси z, вдоль которой направлен орт $\mathbf{l}$, а потом по сечению S, перпендикулярному этому орту, на первом этапе получим линейные вихри, ориентированные вдоль оси z, с равномерно распределенной силой пиннинга.

Положим в линейном приближении, что сила пиннинга, действующая на единицу длины вихря, равна $\mathbf{f}_p = -a\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — смещение вихря от положения равновесия. Учитывая известную формулу [51] для силы, действующей на единицу длины вихря со стороны сверхпроводящих токов $\mathbf{j}_s$, обтекающих кор вихря, и формулу (18), запишем уравнение движения вихря в виде

$$a\mathbf{u} = (\mathbf{j}_s - \mathbf{j}_n)\times \mathbf{\Phi}_0 / c\ . \tag{19}$$

Усредним это уравнение по сечению физически малого объема:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{ac}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} - 2\sigma_n \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\times \mathbf{\Phi_0}\ .$$

Подставляя это соотношение в формулу (17), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\mathcal{P} - \frac{\Phi_0^2 n_0}{4\pi a\lambda^2}\left(\mathcal{P} - \frac{\lambda^2}{n_0}\Delta(n_0\mathcal{P})\right)\right] = \\ = \frac{c^2}{4\pi\lambda^2}\mathbf{E} + \sigma_n \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{E} - \frac{\Phi_0^2 n_0}{2\pi a\lambda^2}\left(\mathbf{E} - \frac{\lambda^2}{n_0}\Delta(n_0\mathbf{E})\right)\right].$$

Выражая мгновенные значения поля и поляризации через их фурье-образы (1), получим

$$[1-\gamma(1+k^2\lambda^2)]\,n_0\hat{\chi} + \gamma\lambda^2[\Delta(n_0\hat{\chi}) + 2i\mathbf{k}\nabla(n_0\hat{\chi})] = \\ = [1-2\gamma(1+k^2\lambda^2)]n_0 + \frac{ic^2 n_0}{4\pi\lambda^2\omega\sigma_n} + \\ + 2\gamma\lambda^2[\Delta n_0 + 2i\mathbf{k}\nabla n_0]\,, \tag{20}$$

где $\gamma = \Phi_0^2 n_0/(4\pi a\lambda^2)$. Для жестко закрепленных на центрах пиннинга вихрей при $a\to\infty$ получаем

$$\hat{\chi}(\omega,\mathbf{k},\mathbf{r}) = \hat{\chi}_0(\omega,\mathbf{r}) = \frac{i\sigma_n}{\omega} - \frac{c^2}{4\pi\lambda^2\omega^2}\ .$$

Обобщенная проводимость

$$\hat{\sigma} = -i\omega\hat{\chi} = \sigma_n + \frac{ic^2}{4\pi\lambda^2\omega}$$

соответствует комплексной проводимости сверхпроводника в рамках двухжидкостной модели и описывает проникновение электромагнитного поля на глубину $\delta(\omega)\approx\lambda/\sqrt{1+\omega^2/\omega_s^2}$, где $\omega_s = c^2/(4\pi\lambda^2\sigma_n) = e^2 n_s/(\sigma_n m)\approx 10^{13}$ с$^{-1}$ — частота, на которой токи сверхпроводящей и нормальной компонент становятся равными [51].

Будем искать решение уравнения (20) для случая малой концентрации сильносвязанных вихрей при $\gamma << 1$ методом последовательных приближений по малому параметру γ: $\hat{\chi}(\omega,\mathbf{k},\mathbf{r}) = \hat{\chi}_0(\omega,\mathbf{r}) + \gamma\hat{\chi}_1(\omega,\mathbf{k},\mathbf{r})$, тогда

$$\hat{\chi}_1(\omega,\mathbf{k},\mathbf{r}) = -\left(\frac{i\sigma_n}{\omega} + \frac{c^2}{4\pi\lambda^2\omega^2}\right)\times \\ \times [n_0 + \lambda^2(k^2 n_0 - 2i\mathbf{k}\nabla n_0 - \Delta n_0)]\,.$$

Для металлического сверхпроводника в радиочастотном диапазоне $\lambda^2 k^2 << 1$. Для сверхпроводников со значительной силой пиннинга характерны треугольные распределения концентрации вихрей [51]. Лапласиан такого распределения равен нулю всюду, кроме точки излома, и при усреднении можно положить $\lambda^2\Delta n_0 << n_0$. Поэтому выражение для обобщенной проницаемости жесткого сверхпроводника имеет вид

$$\tilde{\varepsilon}(\omega,\mathbf{k},\mathbf{r}) = 1 + \frac{c^2}{\lambda^2\omega^2}\left(\frac{i\omega}{\omega_s} - 1\right) -$$
$$-\frac{\Phi_0^2}{\lambda^2 a}\frac{c^2}{\lambda^2\omega^2}\left(\frac{i\omega}{\omega_s} + 1\right)(n_0 - 2i\lambda^2\mathbf{k}\nabla n_0)\,. \quad (21)$$

Из формулы (21) видно, что пространственная дисперсия проявляется в неоднородно намагниченных сверхпроводниках. При этом и действительная, и мнимая части обобщенной проницаемости зависят от угла между волновым вектором $\mathbf{k}$ и градиентом концентрации вихрей. Особенно сильно влияние пространственной дисперсии на волну, распространяющуюся вдоль градиента концентрации вихрей.

В сверхпроводящей пластине увеличением транспортного тока и его последующим уменьшением до нуля можно создать распределение вихрей, когда у поверхности концентрация равна нулю, а градиент ее максимален и определяется критическим током [51]. В этом случае в приграничной области даже при слабом пиннинге, т.е. большой величине Φ_0^2/a, параметр γ будет мал и применимо представление (21).

Строго решить задачу о распространении волны в направлении градиента, т.е. изменения параметров среды, достаточно сложно. В таких неоднородных средах возможны, например, продольные волны, для которых $\mathbf{E} = \mathbf{k}E_\parallel$. Для плоской продольной волны второе уравнение Максвелла (2) принимает вид $\operatorname{div}\mathcal{D} = \operatorname{div}(\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})\mathbf{E}) = \mathbf{E}\nabla\tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}\mathbf{kE} = 0$, т.е. $\mathbf{k}\nabla\tilde{\varepsilon} = -k^2\tilde{\varepsilon}$. При $\omega << \omega_s$ из уравнения (21) следует, что для продольных волн $\mathbf{k} = -\Phi_0^2\nabla n_0/(a\lambda^2)$, что достижимо в приграничной области.

Для противоположного случая большой концентрации слабосвязанных вихрей уравнение (20) можно решать методом последовательных приближений по малому параметру $1/\gamma$:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega,\mathbf{k},\mathbf{r}) = 1 + \frac{8\pi i\sigma_n}{\omega} +$$
$$+\frac{16\pi^2 a\lambda^2}{\Phi_0^2 n_0(1+\lambda^2k^2)}\left(\frac{i\sigma_n}{\omega} + \frac{c^2}{4\pi\lambda^2\omega^2}\right). \quad (22)$$

В пределе свободных вихрей ($a \to 0$) получаем чисто мнимую восприимчивость, т.е. движение сверхпроводящей фазы в вихрях просто удваивает потери в нормальной фазе. Это естественно, поскольку в идеальном сверхпроводнике второго рода потери возникают на сколь угодно низких частотах [47]. При $\omega << \omega_s$ обобщенная проницаемость (22) почти действительная и положительная. Если $\gamma = 0{,}1$ и $\lambda = 10^{-5}$ см, то на частоте $\omega = 10^6$ с$^{-1}$ $\varepsilon \sim 10^{20}$, коэффициент преломления порядка 10^{10}, что соответствует волновому числу $k = 10^5$ см$^{-1}$ $\sim 1/\lambda$.

Нелинейная восприимчивость

Генерацию высших гармоник и комбинационных частот при распространении электромагнитной волны в нелинейных средах обычно исследуют методом последовательных приближений, разделяя обобщенную поляризацию на линейную и нелинейную части [34,46,56]:

$$\mathcal{P}(\mathbf{r},t) = \mathcal{P}^{\text{lin}}(\mathbf{r},t) + \mathcal{P}^{\text{nonlin}}(\mathbf{r},t),\ \mathcal{P}^{\text{lin}}(\mathbf{r},t) = \mathcal{P}^{(1)}(\mathbf{r},t),\ \ \mathcal{P}^{\text{nonlin}}(\mathbf{r},t) = \mathcal{P}^{(2)}(\mathbf{r},t) + \mathcal{P}^{(3)}(\mathbf{r},t) + \ldots,$$
$$\mathcal{P}^{(2)}(\mathbf{r},t) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty dt_1dt_2\iint\tilde{\chi}^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_1,t_2)\mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t-t_1)\mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2,t-t_2)\,d^3r_1d^3r_2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega_1d\omega_2}{(2\pi)^8}\iint\hat{\chi}^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\omega_1,\omega_2)\mathcal{E}(\mathbf{k}_1,\omega_1)\mathcal{E}(\mathbf{k}_2,\omega_2)\exp\left[i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{r} - i(\omega_1+\omega_2)t\right]d^3k_1d^3k_2, \quad (23)$$
$$\hat{\chi}^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\omega_1,\omega_2) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty dt_1dt_2\iint\tilde{\chi}^2(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_1,t_2)\exp(i\omega_1t_1 + i\omega_2t_2 - i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - i\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2)\,d^3r_1d^3r_2.$$

Здесь пространственные интегралы в бесконечных пределах обозначены одним символом, для поляризации $\mathcal{P}^{(1)}$ выполняется соотношение (1).

Нелинейная поляризация $\mathcal{P}^{(3)}$ (кубическая) в сверхпроводнике может создаваться нелинейной зависимостью силы пиннинга от смещения вихря, квадратичная поляризация $\mathcal{P}^{(2)}$ — зависимостью концентрации вихрей n в уравнении (17) от поля, а также нелокальностью, которая проявляется, когда амплитуда колебаний вихрей сравнима с длиной волны. Последний случай является специфичным для сверхпроводника. Ни в кристаллах, ни в плазме нелокальность не порождает нелинейности, так как практически не зависит от поля. В сверхпроводнике же вклад этих составляющих в нелинейную поляризацию примерно равен.

С учетом нелокальности уравнение (19) принимает вид

$$ca\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\mathbf{j}_s(\mathbf{r}+\mathbf{u}) - \mathbf{j}_n(\mathbf{r}+\mathbf{u})) \times \mathbf{\Phi}_0 =$$
$$= [\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) - \mathbf{j}_n(\mathbf{r}) + (\mathbf{u}\nabla)(\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) - \mathbf{j}_n(\mathbf{r}))] \times \mathbf{\Phi}_0 .$$

В рамках метода последовательных приближений, ограничиваясь слабой дисперсией, когда $\lambda k << 1$, положим $n = n_0 + n^{(1)}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}$, причем $|n^{(1)}| \sim \lambda k|n_0|$, $|\mathbf{u}^{(2)}| \sim \lambda k|\mathbf{u}^{(1)}|$, соответственно, $|\mathcal{P}^{(2)}| \sim \lambda k|\mathcal{P}^{(1)}|$. Тогда из уравнения непрерывности получаем $n^{(1)} = -\operatorname{div}(n_0\mathbf{u}^{(1)})$, а уравнения (17) и (19) распадаются на уравнения нулевого и первого (по λk) приближений:

$$\frac{\partial^2\mathcal{P}^{(1)}}{\partial t^2} = \sigma_n\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{c^2}{4\pi\lambda^2}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{\Phi}_0 \times n_0\frac{\partial\mathbf{u}^{(1)}}{\partial t}\right),$$
$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{ac}\left(\frac{\partial\mathcal{P}^{(1)}}{\partial t} - 2\sigma_n\mathbf{E}\right) \times \mathbf{\Phi_0} , \qquad (24)$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \frac{1}{ac}\left[(\mathbf{u}^{(1)}\nabla)\left(\frac{\partial\mathcal{P}^{(1)}}{\partial t} - 2\sigma_n\mathbf{E}\right)\right] \times \mathbf{\Phi_0} =$$
$$= (\mathbf{u}^{(1)}\nabla)\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)}) - \mathbf{u}^{(1)} \times \nabla \times \mathbf{u}^{(1)} , \qquad (25)$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{P}^{(2)}}{\partial t^2} = \frac{c}{4\pi\lambda^2}\mathbf{\Phi}_0 \times \left(n_0\frac{\partial\mathbf{u}^{(2)}}{\partial t} - n_0\frac{\partial\mathbf{u}^{(1)}}{\partial t}\nabla\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}\frac{\partial\mathbf{u}^{(1)}}{\partial t}\nabla n_0\right). \qquad (26)$$

Эффект нелокальности существен в случае большой концентрации слабосвязанных вихрей при $4\pi\lambda^2 a << \Phi_0^2 n_0$. Тогда стационарную концентрацию вихрей $n_0(\mathbf{r})$ можно считать медленно меняющейся функцией и пренебречь в (26) последним слагаемым, а из уравнений нулевых приближений (24) с помощью спектрального метода получаем

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{4\pi\lambda^2\sigma_n\omega - ic^2}{n_0\Phi_0^2 c\omega}[\mathcal{E}(\mathbf{k},\omega) \times \mathbf{\Phi}_0] \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)\, d\omega d^3k ,$$

$$\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{r},t) = \frac{i}{(2\pi)^8}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(4\pi\lambda^2\sigma_n\omega_1 - ic^2)(4\pi\lambda^2\sigma_n\omega_2 - ic^2)}{2n_0^2\Phi_0^2c^2\omega_1\omega_2}\exp(i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{r} - i(\omega_1+\omega_2)t)\, d\omega_1 d\omega_2 \times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big[(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)(\mathcal{E}(\mathbf{k}_1,\omega_1)\mathcal{E}(\mathbf{k}_2,\omega_2)) - \mathcal{E}(\mathbf{k}_1,\omega_1)\mathbf{k}_2\mathcal{E}(\mathbf{k}_2,\omega_2) - \mathcal{E}(\mathbf{k}_2,\omega_2)(\mathbf{k}_1\mathcal{E}(\mathbf{k}_1,\omega_1))\big]\, d^3k_1 d^3k_2 .$$

Подставляя эти выражения в правую часть уравнения (26), а в левую часть — выражение (23) для квадратичной поляризации, получаем

$$-(\omega_1+\omega_2)^2\hat{\chi}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\omega_1,\omega_2)\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 = \frac{(4\pi\lambda^2\sigma_n\omega_1 - ic^2)(4\pi\lambda^2\sigma_n\omega_2 - ic^2)}{8\pi c\lambda^2 B_0\omega_1\omega_2}\times$$
$$\times\Big\{(\omega_1+\omega_2)\mathbf{l}\times\big[(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2) - \mathcal{E}_1(\mathbf{k}_2\mathcal{E}_2) - \mathcal{E}_2(\mathbf{k}_1\mathcal{E}_1)\big] - \omega_1\mathcal{E}_1(\mathbf{k}_2[\mathcal{E}_2\times\mathbf{l}]) - \omega_2\mathcal{E}_2(\mathbf{k}_1[\mathcal{E}_1\times\mathbf{l}])\Big\}.$$

Здесь $\mathcal{E}(\mathbf{k}_1,\omega_1) = \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}(\mathbf{k}_2,\omega_2) = \mathcal{E}_2$. Явный вид оператора квадратичной восприимчивости удобнее представить в тензорной форме. Если векторы $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}^{(2)}$ и $\mathbf{k}$ лежат в плоскости xy, а орт $\mathbf{l}$ направлен вдоль оси z, то

$$\chi^{(2)}_{ijk}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\omega_1,\omega_2) = \frac{(4\pi\lambda^2\sigma_n\omega_1 - ic^2)(4\pi\lambda^2\sigma_n\omega_2 - ic^2)}{8\pi c\lambda^2 B_0\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)^2}g_{ijk}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\omega_1,\omega_2),$$
$$g_{xxx} = \omega_1 k_{1y} + \omega_2 k_{2y},\ g_{xxy} = \omega_1 k_{2x} - (\omega_1+\omega_2)k_{2x},\ g_{xyx} = \omega_2 k_{1x} - (\omega_1+\omega_2)k_{1x},\ g_{xyy} = 0, \qquad (27)$$
$$g_{yxx} = 0,\ g_{yxy} = -\omega_2 k_{1y} + (\omega_1+\omega_2)k_{2y},\ g_{yyx} = -\omega_1 k_{2y} + (\omega_1+\omega_2)k_{1y},\ g_{yyy} = -\omega_1 k_{1x} - \omega_2 k_{2x}.$$

Заключение

Анализ электромагнитных процессов в сверхпроводниках второго рода методом обобщенной поляризации позволяет при усреднении микроскопических полей в системе вихрей, движущихся с переменной во времени и пространстве скоростью, учесть нелокальность взаимодействия вихрей и обусловленную ею пространственную дисперсию. Несмотря на создаваемую транспортным током анизотропию, обобщенные проницаемости (21) и (22) скалярные, т.е. продольная и поперечная проницаемости равны. Следовательно, дифференциальная магнитная проницаемость сверхпроводника равна единице [34]. Это соответствует рассмотренной модели колебания вихрей возле центров пиннинга. При таком движении намагниченность не меняется.

Изменение намагниченности и, соответственно, тензорный характер обобщенной проницаемости проявятся в режиме течения потока. Анализ пространственной дисперсии при таком движении вихрей требует применения кинетических методов [41]. Однако уже полученные выражения для обобщенной восприимчивости показывают возможность нескольких типов волн — продольной, замедленной, пусть и не в такой степени, как следует из формулы (22).

Приближенный характер формулы (22) связан с тем, что особенности обобщенной восприимчивости имеют второй порядок малости по λk. При этом существенны не только квадратичная $\mathcal{P}^{(2)}$, но и кубическая $\mathcal{P}^{(3)}$ поляризации, а последняя, в свою очередь, влияет на дисперсию основной волны [56]. Анализ кубической поляризации, в том числе связанной с нелинейностью пиннинга, выполняется аналогично выводу формулы (27), хотя и более громоздок.

Возможность электрического управления дисперсионными характеристиками линейных и нелинейных волн и анизотропией среды с помощью транспортного тока и внешнего намагничивания, задающих нужное распределение вихрей, позволяет использовать их в функциональной электронике подобно спиновым волнам [29,31,57]. Сложный характер частотной и пространственной дисперсии (27) нелинейных волн указывает на возможность нелинейного резонансного взаимодействия, в частности — генерацию эхо-откликов, которые могут использоваться для создания аналоговых фурье-процессоров [57]. Такое взаимодействие может проявиться уже в радиочастотном диапазоне в керамических сверхпроводниках, где нелокальность связана с джозефсоновской глубиной проникновения.

1. В.Л. Гинзбург, Л.Д. Ландау, *ЖЭТФ* **20**, 1064 (1950).
2. E.H. Brandt, *Z. Phys.: Condens. Matter* **80**, 167 (1990).
3. V.N. Kushnir, C. Coccores, S.L. Prischepa, and N. Salvato, *Physica* **C275**, 211 (1997).
4. А.А. Абрикосов, *ЖЭТФ* **32**, 1442 (1957).
5. E.H. Brandt, *Rep. Progr. Phys.* **58**, 1465 (1995).
6. E.H. Brandt, *Physica* **B165–166**, 1129 (1990).
7. Д.Г. Кобзев, А.Л. Рахманов, *СФХТ* **4**, 2079 (1991).
8. С.Б. Руткевич, *ФНТ* **16**, 288 (1990).
9. А.М. Ларкин, Ю.М. Овчинников, *ЖЭТФ* **73**, 299 (1977).
10. B.D. Josephson, *Phys. Rev.* **A152**, 211 (1966).
11. J.D. Livingston, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 54 (1964).
12. Л.П. Горьков, Н.Б. Копнин, *УФН* **116**, 413 (1975).
13. В.Н. Криворучко, Ю.А. Димашко, *СФХТ* **5**, 967 (1992).
14. А. Кемпбелл, Дж. Иветс, *Критические токи в сверхпроводниках*, Мир, Москва (1975).
15. L.M. Fisher, N.V. Il'in, I.F.Voloshin, N.M. Makarov, V.A. Yampol'skii, F.P. Rodriguez, and R.L. Snyder, *Physica* **C206**, 195 (1993).
16. А.М. Ларкин, Ю.М. Овчинников, *ЖЭТФ* **65**, 1704 (1973).
17. Л.П. Горьков, Н.Б. Копнин, *ЖЭТФ* **60**, 2331 (1971).
18. И.Ф. Волошин, В.С. Горбачев, С.Е. Савельев, Л.М. Фишер, В.А. Ямпольский, *Письма ЖЭТФ* **59,** 55 (1994).
19. J.R. Clem, *J. Appl. Phys.* **50**, 3518 (1979).
20. A.C. Mota, G. Juri, P. Visani, and A. Pollini, *Physica* **C162–164**, 1152 (1989).
21. E.B. Sonin and A.K. Tagantsev, *Phys. Lett.* **A140**, 127 (1989).
22. J. Carini, L. Drabeck, and G. Gruner, *Modern Phys. Lett.* **B3**, 5 (1989).
23. В.М. Дзугутов, Л.М. Фишер, *ФТТ* **30**, 2148 (1988).
24. В.М. Агранович, В.Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*, Наука, Москва (1965).
25. K.-H. Muller, *Physica* **C159**, 717 (1989).
26. K.-H. Muller, *Physica* **C168**, 585 (1990).
27. Z.Y. Zeng, Y. Yu, A.M. Cun, X.N. Xu, S.Y. Ding, and X.X. Yao, *Physica* **C272**, 101 (1996).
28. А.И. Дьяченко, В.В. Чабаненко, *ФНТ* **18**, 826 (1992).
29. A.L. Fetter, *Phys. Rev.* **147**, 153 (1966).
30. А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
31. Н.Н. Ахмедиев, В.В. Яцышен, *ФТТ* **18**, 1679 (1976).
32. А.Б. Альтман, Б.М. Лебедь, А.В. Никифоров, И.А. Яковлев, С.В. Яковлев, *СФХТ* **3**, 73 (1990).
33. K.K. Likharev, *Supercond. Sci. Technol.* **3**, 325 (1990).
34. М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин, *Классическая электродинамика*, Лань, Санкт-Петербург (2003).
35. F. London, *Superfluids*, vol. 1, New York (1950).
36. Л.П. Горьков, Г.М. Элиашберг, *ЖЭТФ* **54**, 612 (1968).
37. А.М. Гулян, Г.Ф. Жарков, Г.М. Сергоян, *Труды ФИАН* **204**, 3 (1990).
38. Л.П. Горьков, Н.Б. Копнин, *ЖЭТФ* **64**, 356 (1973).
39. Л.П. Горьков, Н.Б. Копнин, *ЖЭТФ* **65**, 396 (1973).
40. А.Ф. Александров, А.А. Рухадзе, *Лекции по электродинамике плазмоподобных сред*, МГУ, Москва (2002).
41. Ю.Л. Климонтович, *Кинетическая теория электромагнитных процессов*, Наука, Москва (1980).

42. A. Schmid, *Phys. Condens. Mater.* **5**, 302 (1966).
43. В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин, *Современная электродинамика*, ИКИ, Москва (2003).
44. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (2001).
45. А.И. Ларкин, Ю.Н. Овчинников, *ЖЭТФ* **61,** 1221 (1971).
46. В.М. Галицкий, В.М. Ермаченко, *Макроскопическая электродинамика*, Высшая школа, Москва (1988).
47. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Механика*, Физматлит, Москва (2001).
48. В.Ф. Елесин, В.А. Кашурников, А.В. Харламов, *ФНТ* **12**, 694 (1986).
49. T.J. Rieger, D.J. Scalapino, and J.E. Mercereau, *Phys. Rev*. **B6**, 1734 (1972).
50. E. Abrahams and T. Tsuneto, *Phys. Rev.* **152**, 416 (1966).
51. В.В. Шмидт, *Введение в физику сверхпроводников*, МЦНМО, Москва (2000).
52. C.P. Bean and J.D. Livingston, *Phys. Rev. Lett*. **12**, 14 (1964).
53. Г.С. Мкртчян, Ф.Р. Шакирзанова, Е.А. Шаповал, В.В. Шмидт, *ЖЭТФ* **63**, 667 (1972).
54. Г.С. Мкртчян, В.В. Шмидт, *ЖЭТФ* **68**, 186 (1975).
55. Y.B. Kim, C.F. Hempstead, and A.R. Strand, *Phys. Rev.* **139**, A1163 (1965).
56. Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков, *Нелинейные волны*, Наука, Москва (2000).
57. С.А. Баруздин, Ю.В. Егоров, В.А. Калиникос и др., *Функциональные устройства обработки сигналов*, Радио и связь, Москва (1997).

The second type superconductor generalized permeability

V.K. Ignatjev

A generalized induction of a mixed-state superconductor is constructed by averaging microscopic fields over a system of Abrikosov vortices moving at a time- and space-depended velocity, vortex and transport current of a superconducting component and conduction current of a normal component being taking into account. Expressions for linear and nonlinear generalized permeability are derived. It is shown that there may occur bulk waves (the longitudinal ones included) in the superconductor, and the spatial dispersion exists even in a ratio-frequency region and has a considerable effect on the generation of higher harmonics.