Физика низких температур, 2005, т. 31, № 5, с. 500–506

Сверхпроводимость в неадиабатических системах с «протяженной» особенностью в электронном энергетическом спектре

М.Е. Палистрант

Институт прикладной физики АН Молдовы, ул. Акакдемическая, 5, г. Кишинев, 2028, Молдова
E-mail: statphys@asm.md

Статья поступила в редакцию 12 июля 2004 г.

Получено уравнение для определения температуры сверхпроводящего перехода T_c в линейном по неадиабатичности приближении в системе с корневой особенностью в плотности электронных состояний. Вычислена вершинная функция и получены аналитические выражения для T_c в предельных случаях $T_c \ll \mu_1$ и $\mu_1 = 0$ (μ_1 — особая точка), а также выражение для коэффициента изотопического эффекта. Показано, что вклад неадиабатических эффектов в T_c является значительным и уменьшается по мере приближения к особой точке $\mu_1 = 0$, а малость изотопического эффекта обязана наличию рассматриваемой особенности в электронном энергетическом спектре и неадиабатичности системы.

Отримано рівняння для визначення температури надпровідного переходу T_c у лінійному по неадіабатичності наближенні в системі з корневою особливістю в щільності електронних станів. Обчислено верхову функцію і отримано аналітичні вирази для T_c у граничних випадках $T_c \ll \mu_1$ і $\mu_1 = 0$ (μ_1 — особлива точка), а також вираз для коефіцієнта ізотопічного ефекту. Показано, що внесок неадіабатичних ефектів у T_c є значним і зменшується в міру наближення до особливої точки $\mu_1 = 0$, а малість ізотопічного ефекту зобов'язана наявності особливості, яку розглядають, в електронному енергетичному спектрі і неадіабатичності системи.

PACS: **74.20.–z, 74.10.+v**

1. Введение

Материалы с высокотемпературными сверхпроводящими свойствами (оксидная керамика, фулерены, органические соединения) являются очень сложными системами. Они обладают богатым набором свойств, последовательный учет и понимание которых способствует решению основной проблемы: выявлению механизма высокотемпературной сверхпроводимости. К настоящему времени раскрыты многие свойства, присущие этим материалам, в частности, наличие особенностей в электронном энергетическом спектре, которые способствуют повышению температуры сверхпроводящего перехода T_c.

Экспериментальные исследования электронной структуры $YBa_2Cu_3O_{6,9}$ и $YBa_2Cu_4O_8$ [1] показывают наличие «протяженной» особой седловой точки в зоне, определяемой плоскостью CuO_2. В работе [1] предложена простая модель возникновения этой особой точки. При определенных условиях, налагаемых на параметры теории, можно получить одномерную плотность электронных состояний, которая расходится как корень квадратный от энергии

$$N(\varepsilon) = N_0 \sqrt{\frac{E}{\varepsilon - \varepsilon_0}}, \qquad (1)$$

где E — величина порядка электронной энергии, ε_0 — особая точка. Наличие «протяженной» особенности позволяет достигнуть высоких T_c независимо от механизма сверхпроводимости (фононного или нефононного). В работах Абрикосова [1,2] теория построена на основании модели БКШ—Мигдала, которая применима для описания сверхпроводимости в металлах. В них выполняется соотношение $\varepsilon_F \gg \omega_0$ (ε_F — энергия Ферми, ω_0 — характерная фононная частота). Итриевые же соединения, в которых обнаружена эта особенность, являются неадиабатическими системами. Это неравенство не выполняется, а имеет место соотношение $\varepsilon \sim \omega_0$. В этом случае происходит нарушение теоремы Мигдала [3] и необходимо построить теорию сверхпроводимости для систем с «протяженной» особой точкой, выйдя за рамки теоремы Мигдала, путем учета дополнительных многочастичных процессов. Методика такого учета, предложенная, например в [4,5], применялась нами в дальнейшем для исследования термодинамических свойств неадиабатических сверхпроводников с переменной плотностью носителей заряда в чистых [6,7], а также примесных системах [8,9]. Проведенные в этих работах исследования показывают, что эффекты, связанные с неадиабатичностью системы и сильными электронными корреляциями, способствуют возникновению сверхпроводимости при высоких температурах. В системах с магнитной примесью они замедляют убывание T_c с ростом концентрации примеси, увеличивают область бесщелевого состояния и область сосуществования сверхпроводимости и ферромагнетизма. Существенное влияние они оказывают на кроссовер сценария БКШ сверхпроводимости — бозе-конденсация локальных пар (сценарий Шаффрота) в области низких плотностей носителей заряда [6].

Целью настоящей работы является построение теории сверхпроводимости для систем, которым присуща неадиабатичность ($\varepsilon_F \sim \omega_0$ или $\varepsilon << \omega_0$), содержащих в энергетическом спектре «протяженную» особенность, т.е. одномерную плотность электронных состояний (1). Такими свойствами обладают, в частности, приведенные выше итриевые керамики.

Работа представлена следующим образом. В разделе 2 даны основные определения, в линейном по неадиабатичности приближении записаны выражения для массовых операторов и функций Грина (нормальной и аномальной), вычислена вершинная функция. В разделе 3 получено уравнение для определения температуры сверхпроводящего перехода в приближении слабой связи ($T_c << \omega_0$) и найдены аналитические решения в двух предельных случаях. В разделе 4 приведено выражение для коэффициента изотопического эффекта α. В последнем разделе выполнены численные решения уравнения, определяющего T_c при всех возможных значениях параметра μ_1/ω_0. Рассчитан также коэффициент α и сделан анализ полученных результатов.

2. Основные определения. Вершинные функции

Мы исходим из гамильтониана, описывающего электрон-фононную систему, и используем теорию возмущений [10] при определении мацубаровских функций Грина (нормальных и аномальных). Ряд теории возмущений для собственно-энергетических операторов (диагонального $\Sigma_N(\mathbf{p}\Omega)$ и недиагонального $\Sigma_S(\mathbf{p}\Omega)$) учитывает диаграммы во всех порядках теории возмущений по электрон-фононному взаимодействию, как это делается в случае адиабатических систем, и дополнительные диаграммы, содержащие вершинные поправки и соответствующие пересечению двух линий электрон-фононного взаимодействия. Обоснование такого приближения дано в [4,5] (см. также [6,7]. Таким образом, для массовых операторов Σ_N и Σ_S получаем

$$\Sigma_N(\mathbf{p}\Omega) = \frac{1}{\beta V}\sum_{\mathbf{p}_1\Omega_1} V_N(pp_1)\, G(\mathbf{p}_1\Omega_1), \qquad (2)$$

$$\Sigma_S(\mathbf{p}\Omega) = \frac{1}{\beta V}\sum_{\mathbf{p}_1\Omega_1} V_S(pp_1)\, F(\mathbf{p}_1\Omega_1), \qquad (3)$$

где

$$V_N(pp_1) = -g^2 D(\Omega-\Omega_1)[1+\lambda_0 P_V(\mathbf{pp}_1\Omega\Omega_1)]\,, \qquad (4)$$

$$V_S(\mathbf{pp}_1) = -g^2 D(\Omega-\Omega_1)\times$$
$$\times[1+2\lambda_0 P_V(\mathbf{pp}_1\Omega\Omega_1)+\lambda_0 P_C(\mathbf{pp}_1\Omega\Omega_1)]\,. \qquad (5)$$

Здесь $D(\Omega-\Omega_1)$ соответствует фононной функции Грина

$$D(\omega) = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2+\omega_0^2}, \qquad (6)$$

g^2 — константа электрон-фононного взаимодействия, $\lambda_0 = N_0 g^2$, P_V и P_C — вершинная и пересекающаяся функции, соответственно:

$$P_V(\mathbf{pp}_1\,\Omega\Omega_1) = -\frac{g^2}{\beta V}\sum_{\mathbf{p}_2\Omega_2} D(\Omega-\Omega_2)G(\mathbf{p}_2\Omega_2)\times$$
$$\times G(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p},\ \Omega_1+\Omega_2-\Omega),$$

$$P_C(\mathbf{pp}_1\,\Omega\Omega_1) = -\frac{g^2}{\beta V}\sum_{\mathbf{p}_2\Omega_2} D(\Omega-\Omega_2)G(\mathbf{p}_2\Omega_2)\times$$
$$\times G(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}-\mathbf{p}_1,\ \Omega_2-\Omega-\Omega_1). \qquad (7)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать область значений температур близких к критической T_c. В этом случае для функций G и F можем ограничиться выражениями

$$G(\mathbf{p}\Omega) = \frac{1}{Zi\Omega-\tilde{\varepsilon}_p},\quad F(\mathbf{p}\Omega) = \frac{\Sigma_S(\Omega)}{Z^2\Omega^2-\tilde{\varepsilon}_p^2}, \qquad (8)$$

где

$$Z = 1 - \lim_{\Omega \to 0} \frac{1}{\Omega} \operatorname{Im} \Sigma_N(\Omega); \ \tilde{\varepsilon}_p = \varepsilon_p + \operatorname{Re} \Sigma_N(0); \quad (9)$$

$$\Sigma_N(\Omega) = \Sigma_N(\mathbf{p}_F \Omega); \quad \Sigma_S(0) = \Sigma_S(\mathbf{p}_F 0).$$

Отметим, что выражения (2) и (3) содержат полные функции Грина с учетом электрон-фононного взаимодействия во всех порядках теории возмущений. Приближение состоит в учете только линейного приближения по неадиабатичности, что соответствует учету диаграмм с пересечением двух линий электрон-фононного взаимодействия (наличия в (4) и (5) вершинной P_V и пересекающейся P_C функций). Это обстоятельство позволяет при вычислении функций P_V и P_C воспользоваться функцией Грина (8), положив в ней $Z = 1$ и $\tilde{\varepsilon}_p = \varepsilon_p$. Так же как и в предыдущих работах [6–9], в выражениях (7) выполним суммирование по Ω_2 в приближении слабой связи ($T_c \ll \omega_0$), что равнозначно интегрированию по частоте при $T = 0$. Перейдя затем от суммирования по $\mathbf{p}_2$ к интегрированию по энергии в соответствии с наличием в системе «протяженной» особенности [1]:

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}_2} \ldots \to \int_0^W N(\xi_{p_2}) d\xi_{p_2} = \int_{-\mu_1}^{W-\mu_1} N(\varepsilon_{p_2} + \mu) d\varepsilon_{p_2}. \quad (10)$$

Здесь плотность электронных состояний $N(\varepsilon)$ определяется соотношением (1). Применим метод прямого вычисления аналогично расчетам, выполненым в [3–6]. Благодаря одномерному закону дисперсии энергии электронов и их рассеянию «вперед», имеем $\mathbf{p} \to p_x \sim p_{1x} \sim p_{2x} = p_F$, что позволяет заменить величины $\varepsilon_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p} + \mathbf{p}_1}$ и $\varepsilon_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p} - \mathbf{p}_1}$ на $\varepsilon_{\mathbf{p}_2}$. Такая замена существенно упрощает расчеты по сравнению с трехмерными и двумерными системами [6–9], поскольку в этом случае отсутствует интегрирование по угловым переменным.

Получаем

$$\operatorname{Re} P_V(0\Omega_1) = \operatorname{Re} P_C(0\Omega_1) = \frac{\omega_0 \sqrt{E}}{2\Omega_1} [\varphi_+ + \varphi_-], \quad (11)$$

где

$$\varphi_+ = \frac{A_+}{A_+^2 + B_+^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{B_+}{A_+ - \sqrt{\mu_1}} - \operatorname{arctg} \frac{B_+}{\sqrt{\mu_1} + A_+} \right] - \frac{B_+}{A_+^2 + B_+^2} \frac{1}{2} \ln \frac{(A_+ - \sqrt{\mu_1})^2 + B_+^2}{(A_+ + \sqrt{\mu_1})^2 + B_+^2},$$

$$\varphi_- = \frac{B_-}{A_-^2 + B_-^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(W^{1/2} + A_-)^2 + B_-^2}{(W^{1/2} - A_-)^2 + B_-^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{\mu_1} + A_-)^2 + B_-^2}{(\sqrt{\mu_1} - A_-)^2 + B_-^2} \right] - \frac{A_-}{A_-^2 + B_-^2} \times$$
$$\times \left[\operatorname{arctg} \frac{B_-}{W^{1/2} - A_-} + \operatorname{arctg} \frac{B_-}{W^{1/2} + A_-} - \operatorname{arctg} \frac{B_-}{\sqrt{\mu_1} + A_-} + \operatorname{arctg} \frac{B_-}{A_- - \sqrt{\mu_1}} - \pi\Theta(A_- - \sqrt{\mu_1}) \right]. \quad (12)$$

Величины $A_\pm$, $B_\pm$ определяются выражениями

$$A_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(\mu_1 \pm \omega_0)^2 + \Omega_1^2} + (\mu_1 \pm \omega_0) \right]^{1/2},$$
$$B_\pm = \frac{\operatorname{sgn} \Omega_1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(\omega_0 \pm \mu_1)^2 + \Omega_1^2} - (\mu_1 \pm \omega_0) \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Нетрудно видеть на основании формул (11)–(13), что выполняется соотношение $\operatorname{Re} P_V(0\Omega_1) = \operatorname{Re} P_V(0 - \Omega_1)$. Здесь не приведено выражение $\operatorname{Im} P_V(0\Omega_1)$. Отметим, однако, что $\operatorname{Im} P_V(0\Omega_1) = -\operatorname{Im} P_V(0 - \Omega_1)$. Это обстоятельство позволяет не рассматривать в дальнейшем это выражение, поскольку оно не дает вклада в собственно-энергетические уравнения (2),(3). Подставляем в (2) определения (4), (6) и (8) и выполняем суммирование по Ω_1 стандартным образом, заменяя его на итегрирование при $T = 0$. Переходим затем к интегрированию по энергии ε_{p_1}, используя одномерную плотность электронных состояний (1).

В результате этих вычислений получаем

$$\lim_{\Omega \to 0} \frac{1}{\Omega} \operatorname{Im} \sim \Sigma_N(\Omega) = -\frac{\omega_0 \sqrt{E} \lambda_z^0}{2} \left\{ -\frac{\sqrt{W}}{(\mu_1 - \omega_0)(W - \mu_1 + \omega_0)} + \frac{\sqrt{\mu_1}}{\omega_0} \left(\frac{1}{\mu_1 + \omega_0} + \frac{1}{\mu_1 - \omega_0} \right) - \right.$$
$$- \frac{1}{2(\mu_1 + \omega_0)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{\mu_1 + \omega_0} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1 + \omega_0} + \sqrt{\mu_1}} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\mu_1 - \omega_0)^{3/2}} \left[\ln \frac{\sqrt{W} - \sqrt{\mu_1 - \omega_0}}{\sqrt{W} + \sqrt{\mu_1 - \omega_0}} - \ln \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_1 - \omega_0}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_1 - \omega_0}} \right] \Theta(\mu_1 - \omega_0) +$$
$$\left. + \frac{1}{(\omega_0 - \mu_1)^{3/2}} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{W}{\omega_0 - \mu_1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\mu_1}{\omega_0 - \mu_1}} \right] \Theta(\omega_0 - \mu_1) \right\}, \quad (14)$$

$$\operatorname{Re}\Sigma_N(0) = -\frac{\lambda_z^0\omega_0\sqrt{E}}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\mu_1-\omega_0}}\left[\ln\frac{\sqrt{W}-\sqrt{\mu_1-\omega_0}}{\sqrt{W}+\sqrt{\mu_1-\omega_0}} - \ln\frac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_1-\omega_0}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_1-\omega_0}}\right]\times\right.$$

$$\times\Theta(\mu_1-\omega_0) + \frac{2}{\sqrt{\omega_0-\mu_1}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{W}{\omega_0-\mu_1}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\mu_1}{\omega_0-\mu_1}}\right]\times$$

$$\left.\times\Theta(\omega_0-\mu_1) + \frac{1}{\sqrt{\mu_1+\omega_0}}\ln\frac{\sqrt{\mu_1+\omega_0}-\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1+\omega_0}+\sqrt{\mu_1}}\right\}, \quad (15)$$

где $$\lambda_z^0 = \lambda_0\left[1+\lambda_0 P_V(0\omega_0)\right], \quad (16)$$

$\Theta(x) = 1$ при $x > 0$ и 0 при $x < 0$.

3. Температура сверхпроводящего перехода

Исходя из выражения для массового оператора Σ_S (3), подставляем в эту формулу определения (4) и (8) и выносим из-под знака суммы по Ω_1 выражения P_V в точках $\Omega = 0$, $\Omega_1 = \omega_0$ [4,5]. Воспользуемся далее приближением, которое используется в теории сверхпроводимости с электрон-фононным взаимодействием [11,12]:

$$\frac{\omega_0^2}{(\Omega-\Omega_1)^2+\omega_0^2} \to \frac{\omega_0^2}{\Omega^2+\omega_0^2}\,\frac{\omega_0^2}{\Omega_1^2+\omega_0^2}. \quad (17)$$

Эти операции приводят к выражению

$$\Sigma_S(\Omega) = \lambda_\Delta^0\frac{\omega_0^2}{\Omega^2+\omega_0^2}\frac{1}{\beta V}\sum_{\mathbf{p}_1\Omega_1}\frac{\omega_0^2}{\Omega_1^2+\omega_0^2}\,\frac{\Sigma_S(\Omega_1)}{\tilde{\varepsilon}_{p_1}^2+\Omega_1^2 Z^2}, \quad (18)$$

где

$$\lambda_\Delta^0 = \lambda_0\left[1+3\lambda_0 P_V(0\omega_0)\right]. \quad (19)$$

Представим (18) в виде

$$\Sigma_S(\Omega) = \lambda_\Delta^0\frac{\omega_0^2}{\Omega^2+\omega_0^2}A. \quad (20)$$

Подставляя (17) и (20) в (18) и используя формулу (1), получаем уравнения для определения температуры сверхпроводящего перехода в неадиабатической системе с «протяженной» особенностью в энергетическом спектре:

$$1 = \lambda_\Delta^0\int_{-\mu_1}^{W-\mu_1} d\varepsilon_{p_1}\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\varepsilon_{p_1}+\mu_1}}\times$$

$$\times\frac{1}{\beta}\sum_{\Omega_1}\frac{\omega_0^2}{(\Omega_1^2+\omega_0^2)}\left[1-\frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2+\omega_0^2}\right]\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{p_1}^2+Z^2\Omega_1^2}. \quad (21)$$

Выполним в (21) суммирование по Ω_1 стандартным образом. Перейдя к интегрированию, получаем уравнение

$$\frac{Z}{\lambda_\Delta^0} = \frac{\omega_0}{2}\int_{-\mu_1}^{\overline{W}-\bar{\mu}_1}\frac{\sqrt{E}d\bar{\varepsilon}_{p_1}}{\sqrt{Z\bar{\varepsilon}_{p_1}+\tilde{\mu}_1}}\times$$

$$\times\left[-\frac{\omega_0\operatorname{th}\dfrac{\beta_c\bar{\varepsilon}_{p_1}}{2}}{\bar{\varepsilon}_{p_1}}+1\right]\frac{1}{\bar{\varepsilon}_{p_1}^2-\omega_0^2}-$$

$$-\frac{\omega_0}{4}\int_{-\mu_1}^{\overline{W}-\bar{\mu}_1}\frac{\sqrt{E}d\bar{\varepsilon}_{p_1}}{\sqrt{Z\bar{\varepsilon}_{p_1}+\tilde{\mu}_1}}\,\frac{1}{(\omega_0+|\bar{\varepsilon}_{p_1}|)^2}, \quad (22)$$

здесь $\bar{\varepsilon}_{p_1} = \varepsilon_{p_1}/Z$, $\overline{W} = W/Z$, $\bar{\mu}_1 = \tilde{\mu}_1/Z$.

В (22) положим $T_c = 0$ во всех членах, кроме того, который содержит логарифмическую особенность по этой величине. Такое приближение справедливо в случае приближения слабой связи ($T_c \ll \omega_0$). Выполнив интегрирование по энергии в членах, не содержащих величины T_c, приведем (22) к виду

$$\frac{Z}{\lambda_\Delta^0}\sqrt{\frac{\mu_1}{E}} = \frac{\sqrt{\mu_1}}{2}\int_{-\mu_1}^{\overline{W}-\bar{\mu}_1}\bar{\varepsilon}_{p_1}\frac{d\bar{\varepsilon}_{p_1}\operatorname{th}\dfrac{\beta_c\bar{\varepsilon}_{p_1}}{2}}{\sqrt{Z\bar{\varepsilon}_{p_1}+\tilde{\mu}_1}} - \Phi(\omega_0\tilde{\mu}_1 W), \quad (23)$$

$$\Phi(\omega_0\mu_1 W) = +\frac{1}{4}\left[\frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_1+Z\omega_0}+\frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_1-Z\omega_0}\right]-$$

$$-\frac{\omega_0\sqrt{W\tilde{\mu}_1}}{4(\omega_0+\overline{W}-\tilde{\mu}_1)(\tilde{\mu}_1-Z\omega_0)}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[1+\frac{Z\omega_0}{4(\tilde{\mu}_1+Z\omega_0)}\right]I_1+\frac{1}{2}\left[1-\frac{Z\omega_0}{4(\tilde{\mu}_1-Z\omega_0)}\right]I_2, \quad (24)$$

$$I_1 = -\frac{\sqrt{\tilde{\mu}_1}}{\sqrt{\tilde{\mu}_1+Z\omega_0}}\ln\frac{-\sqrt{\tilde{\mu}_1}+\sqrt{\tilde{\mu}_1+Z\omega_0}}{\sqrt{\tilde{\mu}_1+Z\omega_0}+\sqrt{\tilde{\mu}_1}},$$

$$I_2 = -\frac{\sqrt{\tilde{\mu}_1}}{\sqrt{\tilde{\mu}_1 - Z\omega_0}}\left[\ \ln\frac{\sqrt{W} - \sqrt{\tilde{\mu}_1 - Z\omega_0}}{\sqrt{W} + \sqrt{\tilde{\mu}_1 - Z\omega_0}} - \right.$$

$$\left. - \ln\frac{\sqrt{\tilde{\mu}_1} - \sqrt{\tilde{\mu}_1 - Z\omega_0}}{\sqrt{\tilde{\mu}_1} + \sqrt{\tilde{\mu}_1 - Z\omega_0}}\right]\Theta(\tilde{\mu}_1 - Z\omega_0) +$$

$$+ \frac{2\sqrt{\tilde{\mu}_1}}{\sqrt{Z\omega_0 - \tilde{\mu}_1}}\left[\ \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{W}{Z\omega_0 - \tilde{\mu}_1}} - \right.$$

$$\left. -\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{\tilde{\mu}_1}}{\sqrt{Z\omega_0 - \tilde{\mu}_1}}\right]\Theta(Z\omega_0 - \tilde{\mu}_1)\,. \qquad (25)$$

Получить аналитическое выражение для величины T_c на основании (23) удается в двух предельных случаях, а именно: $\overline{W};\ \bar{\mu}_1 >> T_c$ и в особой точке $\mu_1 = 0$.

Выделив логарифмическую особенность по T_c в (23) при $W;\ \mu_1 >> T_c$, получаем

$$T_c = \frac{8\bar{\mu}_1\gamma}{\pi}\left[\frac{\sqrt{W} - \sqrt{\tilde{\mu}_1}}{\sqrt{W} + \sqrt{\tilde{\mu}_1}}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \exp\left\{-Z/\lambda_\Delta^0\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_1}{E}} - \Phi(\omega_0\tilde{\mu}_1 W)\right\}. \qquad (26)$$

В точке $\mu_1 = 0$ на основании (23) имеем

$$T_c = \frac{A^2}{2Z_0}\left[\frac{Z_0}{\lambda_{\Delta_0}^0\sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{W}} + \frac{\sqrt{W}}{4(Z_0\omega_0 + W)} + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{4}\frac{1}{\sqrt{\omega_0 Z_0}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{W}{Z_0\omega_0}}\right]^{-2}, \qquad (27)$$

где

$$A = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\ \mathrm{ch}^2 x} = 1{,}906;\ Z_0 = Z|_{\mu_1 = 0};\ \lambda_{\Delta_0}^0 = \lambda_\Delta^0|_{\mu_1 = 0}.$$

В пределе $W \to \infty$, $P_V = 0$, $\omega_0 \to \infty$ получаем на основании (26) и (27) при $T_c << \mu_1$ и $\mu_1 = 0$ следующие выражения:

$$T_{c_0} = \frac{8\mu_1\gamma}{\pi}\exp\left(-1/\lambda_0\sqrt{\mu_1/E}\right), \qquad (28)$$

$$T_{c_0}^0 = \frac{A^2}{2}\lambda_0^2 E. \qquad (29)$$

Эти формулы соответствуют случаю адиабатической системы с «протяженной» особенностью в энергетическом спектре без учета запаздывания и отвечают результатам работы [1] .

Из сравнения (26) с (28) и (27) с (29) можно сделать вывод, что в неадиабатической системе, как и в случае адиабатической, T_c растет с уменьшением химического потенциала (приближением его к особой точке ε_0). При этом происходит перенормировка параметров теории благодаря учету эффектов неадиабатичности, а также возникает в экспоненте правой части выражения (26) дополнительное слагаемое, $\Phi(\omega_0\tilde{\mu}_1 W)$, связанное с учетом запаздывания.

4. Изотопический эффект

Коэффициент изотопического эффекта определяется соотношением

$$\alpha = -\partial \ln T_c / \partial \ln M, \qquad (30)$$

где M — средняя ионная масса. В обычных сверхпроводниках с электрон-фононным механизмом сверхпроводимости $\alpha = 1/2$.

Наличие особенностей Ван Хова в плотности электронных состояний приводит к значительному уменьшению этого коэффициента [2,12]. Это уменьшение объясняется заменой частоты Дебая, которая обрезает электрон-фононное взаимодействие, некоторой электронной энергией, независящей от массы иона. Кроме того, коэффициент α убывает с ростом параметра Мигдала ($m = \omega_0/\varepsilon_F$) и может достигать малых значений [5–7] в неадиабатических системах.

В данном параграфе определим совместное влияние протяженной особенности в плотности электронных состояний и эффектов неадиабатичности на изотопический коэффициент α. Рассмотрим случай $\mu_1 >> T_c$ исходя из определения температуры сверхпроводящего перехода (26). Для упрощения полагаем $W \to \infty$, $\bar{\mu}_1 \approx \mu_1$ и вводим величину $x = \omega_0/\mu_1$. Получаем

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln T_c}{\partial \ln x} = \frac{1}{2}x\frac{\partial \ln T_c}{\partial x}, \qquad (31)$$

где

$$\frac{\partial \ln T_c}{\partial x} = -\left[\frac{1}{Z} + \sqrt{\frac{\mu_1}{E}}\frac{1}{\lambda_\Delta^0}\right]\frac{\partial Z}{\partial x} +$$

$$+ \sqrt{\frac{\mu_1}{E}}\frac{Z}{\lambda_\Delta^{0\,2}}\frac{\partial \lambda_\Delta^0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\Phi(\omega_0\mu_1\infty), \qquad (32)$$

$$Z = 1 + \lambda_z^0 f_z\,,\ \frac{\partial Z}{\partial x} = \lambda_0^2\ f_z\,\frac{\partial P_V}{\partial x} + \lambda_z^0\,\frac{\partial f_z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \lambda_\Delta^0}{\partial x} = 3\lambda_0^2\ \frac{\partial P_V}{\partial x}, \qquad (33)$$

$$f_z = f_z^{(1)} + f_z^{(2)},$$

$$f_z^{(1)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\mu_1}}\left\{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - \frac{x}{2(x+1)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right\},$$

$$f_z^{(2)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\mu_1}} \frac{x}{2(1-x)^{3/2}} \ln \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} \Theta(1-x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\mu_1}} \frac{x}{2(x-1)^{3/2}} \times$$

$$\times \left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1}{x-1}}\right] \Theta(x-1). \qquad (34)$$

Величины λ_z^0, λ_Δ^0, P_V, Φ определяются формулами (16), (19), (11) и (24) соответственно.

5. Анализ результатов

Наличие корневой особенности в плотности электронных состояний (1), связанной с одномерным законом дисперсии энергии электронов, в неадиабатических системах играет двойную роль в вопросе возникновения сверхпроводимости при высоких температурах. Во-первых, эта особенность сама по себе приводит к высоким T_c вблизи особой точки $\mu_1 = 0$. Во-вторых, благодаря одномерному движению электронов и их рассеянию «вперед» передаваемый импульс при электрон-фононном взаимодействии оказывается малым. Это обстоятельство приводит к большому положительному значению вершинной функции, а значит и к значительному увеличению константы электрон-фононного взаимодействия и температуры сверхпроводящего перехода T_c.

На рис. 1 приведена зависимость вершинной функции P_V (11) от отношения μ_1/ω_0 при различных значениях соотношений между E и ω_0. Как видно на рисунке, вблизи точки $\mu_1 = 0$ функция P_V достигает максимального значения и способствует увеличению парамеров λ_z (16) и λ_Δ (19).

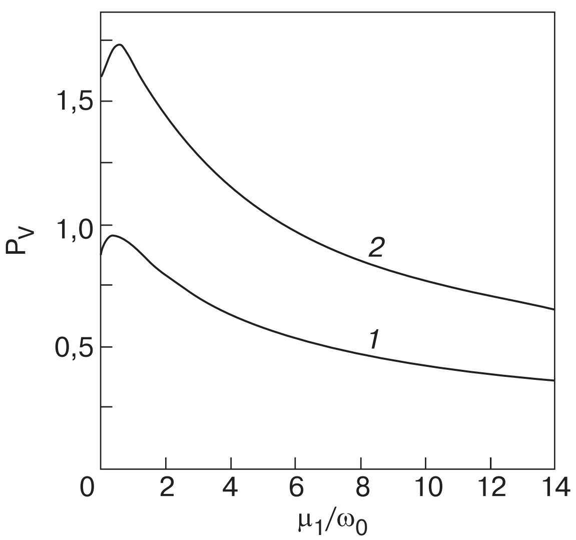

Рис. 1. Зависимость вершинной функции P_V от отношения μ_1/ω_0 при значениях E/ω_0: 3 (*1*) и 10 (*2*).

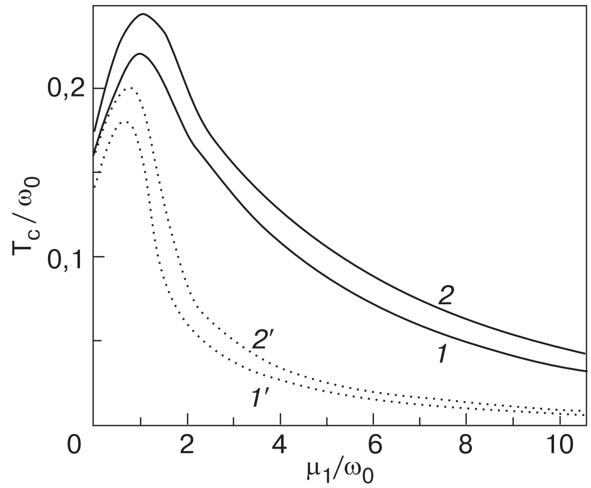

Рис. 2. Зависимость критической температуры T_c от параметра μ_1/ω_0: $E/\omega_0 = 3$, $\lambda_0 = 0{,}5$ (*1*) и (*1′*); $E/\omega_0 = 10$, $\lambda_0 = 0{,}3$ (*2*) и (*2′*). Сплошные кривые соответствуют неадиабатической системе, прерывистые — адиабатической.

Решение уравнения (23) для температуры сверхпроводящего перехода T_c как функции от μ_1/ω_0 приведено на рис. 2. В процессе вычислений использованы также аналитические формулы (26) и (27). Максимальное значение величина T_c как в случае неадиабатической системы (кривые *1*, *2*), так и адиабатической (кривые *1′*, *2′*) достигается при $\mu_1 \approx \omega_0$, а не в точке $\mu_1 = 0$, как утверждается в работе [1]. Причину такого поведения легко видеть из уравнения (22). В частности, при $W \to \infty$ с уменьшением μ_1 уменьшается значение нижнего предела интегрирования в правой части этого уравнения и увеличивается подынтегральная функция. Конкуренция этих двух факторов приводит к сдвигу вправо максимума величины T_c по отношению к особой точке $\mu_1 = 0$.

По нашему мнению, в неадиабатической системе электронная энергия E не может быть значительно больше значения фононной ω_0, как это имеет место в обычных сверхпроводниках, и, следовательно, достигнуть $T_c \sim 100$ К и больше при малых значениях λ_0 можно, если учитывать оба эффекта: наличие особой точки в импульсном пространстве, приводящей к корневой особенности в плотности электронных состояний, и эффекты неадиабатичности, нарушающие теорему Мигдала ($P_V > 0$).

Вклад неадиабатичности в величину T_c в значительной степени зависит от параметров теории и существенен при всех значениях отношения μ_1/ω_0, увеличиваясь по мере удаления от особой точки

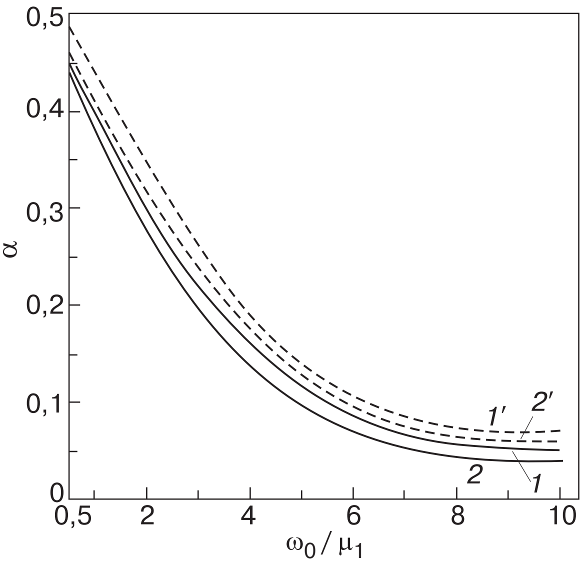

Рис. 3. Зависимость изотопического коэффициента от ω_0/μ_1: E/ω_0 = 3, λ_0 = 0,5 (*1*) и (*1*′); E/ω_0 = 10, λ_0 = 0,3 (*2*) и (*2*′). Сплошные кривые соответствуют неадиабатической системе, прерывистые — адиабатической.

$\mu_1 = 0$. Как видно на рис. 1, в рассмотренных неадиабатических системах легко достигаются значения T_c, присущие материалам с высокотемпературной сверхпроводимостью. Отметим, что полученные нами решения являются заниженными из-за факторизации фононной функции Грина (см. приближение (17)). В системах с постоянной плотностью электронных состояний величина T_c благодаря приближению (17) меньше на множитель $e_0^{-1/2}$ (e_0 — основание натурального логарифма) [4,6,14]. В нашем случае для системы с корневой особенностью в плотности электронных состояний это занижение соответствует в среднем множителю 0,45.

На рис. 3 изображена зависимость коэффициента изотопического эффекта α от отношения ω_0/μ_1, полученная на основании приведенных выше формул (31)–(34). Наблюдается существенное уменьшение изотопического эффекта по мере приближения к особой точке $\mu_1 = 0$ (в адиабатических системах — кривые *1*′,*2*′). Качественная картина в этом случае согласуется с результатом работы [1]. Наряду с этим возникает дополнительное уменьшение, обязанное эффектом неадиабатичности (кривые *1*, *2*).

Таким образом, можно полагать, что малость коэффициента изотопического эффекта в итриевых керамиках может быть истолкована совместным влиянием наличия «протяженной» особенности в электронном энергетическом спектре и неадиабатичностью этих систем.

Выражаю искреннию признательность В. Урсу за помощь в численных расчетах и С.А. Палистранту за оформление работы.

1. A.A. Abrikosov, Y.C. Campuzano and K. Gofron, *Physica* **C214**, 73 (1993).
2. A.A. Abrikosov, *Physica* **238**, 191 (1994); *Phys. Rev.* **B51**, 11955 (1995); *Phys. Rev.* **B52**, R15738 (1995); *Phys. Rev.* **B53**, R8910 (1996).
3. А.Б. Мигдал, *ЖЭТФ* **34**, 1438 (1958).
4. L. Pietronero, S. Strassler, and C. Grimaldi, *Phys. Rev.* **B52**, 10516 (1995).
5. C. Grimaldi, L. Pietronero, and S. Strassler, *Phys. Rev.* **B52**, 10530 (1995).
6. М.Е. Палистрант, *ФНТ* **26**, 557 (2000); *ФНТ* **29**, 1173 (2003).
7. M.E. Palistrant and F.G. Kochorbe, *J. Phys: Condens. Matter* **12**, 2217 (2000).
8. М.Е. Палистрант, *Теор. Мат. Физ.* **119**, 455 (1999); *ФНТ* **28**, 157 (2002); *Теор. Мат. Физ.* **135**, 137 (2003).
9. M.E. Palistrant and F.G. Kochorbe, *J. Supercond.: Incorporating Novel Magnetizm* **15**, 113 (2002); *J. Phys: Condens. Matter* **15**, 3267 (2003); *Int. J. Mod. Phys.* **B17**, 2545 (2003).
10. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике,* Наука, Москва (1962).
11. W.L. McMillan, *Phys. Rev.* **167**, 331 (1968).
12. D.E. Morris, R.M. Kuroda, A.G. Markelz, J.H. Nickel, and J.Y.T. Wei, *Phys. Rev.* **B37**, 5936 (1988).
13. J. Labbe and J. Bok, *Europhys. Lett.* **3**, 1225 (1987).
14. R. Combescot, *Phys. Rev.* **B42**, 7810 (1990).

Superconductivity in nonadiabatic systems with an extended saddle point singularity in the energy spectrum

M.E. Palistrant

An equation for superconducting transition point T_c is derived in the linear-in-nonadiabacity approximation for the system with a root singularity in the density of electronic states. The vertex function is calculated. Analitical expressions for T_c in the limiting cases $T_c \ll \mu_1$ and at the point $\mu_1 = 0$ (μ_1 is the singular point) and expressions for isotope effect coefficient are obtained. It is shown that the contribution of the nonadiabatic effects to T_c is considerable and decreases with approaching the singular point $\mu_1 = 0$. It is found that the isotopic effect is insignificant due to both the presence of the above singularity in the electronic energy spectrum and the nonadiabacity of the system.