

О зарождении вихрей в процессе расслоения пересыщенного раствора ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$

Э.А. Пашицкий

Институт физики НАН Украины, пр. Науки, 46, г. Киев, 03028, Украина
E-mail: pashitsk@iop.kiev.ua

В.Н. Мальнев, Р.А. Нарышкин,

Киевский национальный университет, физический факультет
пр. Глушкова, 6, г. Киев, 03022, Украина

Статья поступила в редакцию 22 апреля 2004 г., после переработки 7 сентября 2004 г.

Показано, что докритические зародыши расслоения (домены распада), рождающиеся спонтанно в пересыщенном растворе ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$, могут становиться центрами рождения гидродинамических вихрей при локальной ненулевой или глобальной завихренности жидкости. Ускорение вихревого «твердотельного» вращения несжимаемой жидкости внутри домена обусловлено совместным действием конвективной и кориолисовой сил при наличии сходящегося радиального потока, скорость которого связана уравнением непрерывности с нарастающей по высоте скоростью восходящего вертикального потока. Такие потоки возникают благодаря химическому и динамическому равновесию между доменами распада и окружающим метастабильным раствором ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ и компенсируют уход легкой компоненты ${}^3\text{He}$ из объема домена за счет ее всплытия на поверхность жидкости в поле тяжести Земли. В зависимости от условий распада раствора внутри доменов ускорение вихрей может происходить как по экспоненциальному закону, так и по сценарию нелинейной «взрывной» неустойчивости. Возникновение и развитие таких гидродинамических вихрей в распадающихся растворах ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ приводит к рождению квантовых вихрей в сверхтекучей компоненте и, как следствие, к ускорению процесса гетерогенного распада (расслоения) раствора по сравнению с гомогенным распадом.

Показано, що докритичні зародки розшарування (домени розпаду), які спонтанно народжуються в пересиченому розчині ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$, можуть ставати центрами зародження гідродинамічних вихорів при локальній ненульовій або глобальній завихреності рідини. Прискорення вихревого «твердотільного» обертання нестисливої рідини всередині домену обумовлено спільною дією конвективної та кориолісової сил при наявності збіжного радіального потоку, швидкість якого зв'язана рівнянням неперервності з наростаючою по висоті швидкістю висхідного вертикального потоку. Такі потоки виникають завдяки хімічній та динамічній рівновазі між доменами розпаду та оточуючим метастабільним розчином ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ та компенсують вихід легкої компоненти ${}^3\text{He}$ з об'єму домену внаслідок її впливання на поверхню рідини в полі тяжіння Землі. В залежності від умов розпаду розчину всередині доменів прискорення вихорів може відбуватися як по експоненціальному закону, так і згідно сценарію нелінійної «вибухової» нестійкості. Виникнення та розвиток таких гідродинамічних вихорів у розчинах ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$, що розпадаються, приводить до народження квантових вихорів в надплинній компоненті та, як наслідок, до прискорення процесу гетерогенного розпаду (розшарування) розчину порівняно з гомогенним розпадом.

PACS: 67.40.Bz, 67.40.Vs

1. Введение

Исследования физических свойств растворов квантовых жидкостей ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$, начиная с пионерских работ [1,2], продолжают оставаться актуальными в физике низких температур (см., например, [3]). В настоящей работе показано, что в условиях пересыщения раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ внутри спонтанно зарождающихся областей распадающейся фазы (докритических зародышей) могут возникать классические гидродинамические вихри в нормальной компоненте. Возникновение таких вихрей обусловлено совместным действием конвективной и кориолисовой гидродинамических сил, создаваемых сходящимися потоками. Последние стремятся выровнять концентрацию атомов ${}^3\text{He}$ и, следовательно, химический потенциал в объеме раствора в условиях химического и динамического равновесия между зарождающимися областями (доменами) распадающейся фазы и окружающей метастабильной фазой раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$.

Вихревое вращение нормальной компоненты внутри доменов, в которых происходит распад раствора, в результате взаимодействия между нормальной и сверхтекучей компонентами согласно двухжидкостной гидродинамике [4], увлекает за собой сверхтекучую компоненту за счет градиентного нелинейного слагаемого $\nabla(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2$ ($\mathbf{V}_{n,s}$ — скорости нормальной и сверхтекучей компонент). Это приводит к рождению квантовых вихрей, которые, в свою очередь, способствуют «сцеплению» и взаимному увлечению нормальной и сверхтекучей компонент [5]. Поскольку квантовые вихри не могут обрываться внутри сверхтекучей жидкости [6], происходит их быстрое «прорастание» через весь объем сверхтекучего раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$, вплоть до твердых стенок или свободной поверхности. Такой процесс удлинения квантовых вихрей сопровождается захватом (встраиванием) примесных атомов ${}^3\text{He}$ в нормальный ствол (кор) вихря [7], в результате чего вихри становятся протяженными зародышами гетерогенного распада раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ [8,9].

По-видимому, именно с этим связана наблюдавшаяся экспериментально в [10,11] высокая скорость расслоения раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$, значительно превышающая предсказанную теоретически в [12] скорость гомогенного распада. Подтверждением рождения классических и квантовых вихрей в распадающемся растворе ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ является также непосредственное оптическое наблюдение мелкомасштабной вихревой турбулентности в [13] при быстром расслоении пересыщенного раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ вблизи трикритической точки.

2. Кинетика распада пересыщенного раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$

Согласно экспериментальным данным [1,2], плотность раствора легкого изотопа гелия (${}^3\text{He}$) в сверхтекучей квантовой бозе-жидкости, образуемой атомами тяжелого изотопа гелия (${}^4\text{He}$) с нулевым спином (бозонами) при температуре ниже λ -точки ($T < T_\lambda$), зависит от относительной концентрации x атомов ${}^3\text{He}$ и может быть с хорошей точностью аппроксимирована с помощью соотношения

$$\rho(x) = \rho_0(x) + x\rho_3 + (1-x)\rho_4, \quad (1)$$

где ρ_3 и ρ_4 — плотности жидких фаз ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$, $\rho_0(x)$ — некоторая аддитивная добавка, слабо зависящая от x и обращающаяся в нуль при $x = 0$ и $x = 1$. Заметим, что в растворе температура λ -точки T_λ также зависит от x [1,2].

Аналогичное соотношение имеет место и для молярных удельных объемов V_3 и V_4 изотопов ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ в растворе:

$$V(x) = V_0(x) + xV_3 + (1-x)V_4. \quad (2)$$

Следует подчеркнуть, что разница объемов V_3 и V_4 определяется не химическими свойствами (тождественными для изотопов), а квантовым поведением атомов ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$.

С другой стороны, в сверхтекучем состоянии раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ при $T < T_\lambda(x)$ в рамках двухжидкостной гидродинамики должно выполняться соотношение [3]

$$\rho(x) = \rho_s(x) + \rho_n(x), \quad (3)$$

где ρ_s и ρ_n — плотности сверхтекучей и нормальной компонент. При этом сверхтекучая компонента состоит исключительно из атомов ${}^4\text{He}$, а атомы ${}^3\text{He}$ содержатся в нормальной компоненте раствора. Подстановка (1) в (3) дает следующие соотношения:

$$\rho_s(x) = \rho_{s4}(1-x),$$

$$\rho_n(x) = \rho_{n4}(1-x) + x\rho_3 + \rho_0(x), \quad (4)$$

где $\rho_{s4} + \rho_{n4} = \rho_4$ — плотность ${}^4\text{He}$, причем $\rho_{n4} \ll \rho_{s4}$ в области низких температур $T \ll T_\lambda$.

Равновесная концентрация атомов ${}^3\text{He}$ в растворе ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ определяется фазовой диаграммой растворения и зависит от температуры T и давления P [2]. С понижением T (или повышением P) максимально допустимая концентрация атомов ${}^3\text{He}$ в растворе растет, а при быстром повышении T (или понижении P) происходит расслоение раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ в поле тяжести Земли на легкую фракцию (нормальную ферми-жидкость ${}^3\text{He}$) и на более тяжелую — равновесный раствор ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ с содержанием легкого изотопа 6,7%. Заметим, что такое содержание

${}^3\text{He}$ определяется конкуренцией между положительным химическим сродством (идентичностью) атомов ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ и принципом Паули для фермионов ${}^3\text{He}$, энергия Ферми которых при этой концентрации равна $E_{F_3} = 10$ К.

В процессе распада насыщенного раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ средняя концентрация атомов ${}^3\text{He}$, согласно экспериментальным данным [3], убывает во времени по экспоненциальному закону:

$$x(t) = x_\infty + (x_0 - x_\infty)e^{-\gamma t}, \quad (5)$$

где x_0 и x_∞ — начальная (при $t = 0$) и конечная (при $t = \infty$) относительные концентрации ${}^3\text{He}$ в растворе (при $x_0 > x_\infty \approx 0,07$), а γ — скорость распада раствора, зависящая от T и P .

В экспериментах [3] при $T \approx 100$ мК и нормальном атмосферном давлении время распада составило $\gamma^{-1} = (50-100)$ сек. При этом следует иметь в виду, что распад (расслоение) раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ является фазовым переходом I рода и происходит с выделением тепла [2].

В пересыщенном метастабильном растворе ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ начинается процесс спонтанного (флуктуационного) зарождения доменов распадающейся неравновесной фазы с образованием микрокапель чистого ${}^3\text{He}$, которые коагулируют и всплывают на поверхность в поле тяжести Земли, унося ${}^3\text{He}$ из объема домена.

Если бы каждый домен был замкнутой изолированной системой, то процесс распада раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ в нем проходил бы по экспоненциальному закону типа (5) с некоторой локальной скоростью распада γ_0 . При этом скорость изменения (увеличения) плотности раствора в домене, согласно (1) и (5), была бы равна

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \gamma_0(\rho_4 - \rho_3)(x_0 - x_\infty)e^{-\gamma_0 t} > 0. \quad (6)$$

Однако домены распада представляют собой открытые подсистемы, находящиеся в химическом и динамическом равновесии с окружающим метастабильным раствором ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ с исходной концентрацией x_0 легкого изотопа ${}^3\text{He}$. Поэтому для сохранения постоянных во времени и однородных в пространстве значений химического потенциала и полной плотности раствора в домене возникают сходящиеся радиальные и восходящие вертикальные потоки атомов ${}^3\text{He}$, которые увлекают за собой нормальную компоненту ${}^4\text{He}$. Заметим, что при достаточно низких температурах $T \leq 0,1T_\lambda$, когда плотность атомов ${}^4\text{He}$ в нормальной компоненте $\rho_{4n} \leq 10^{-4}\rho_{4s}$, нормальная плотность $\rho_n(x)$ практически полностью определяется плотностью атомов ${}^3\text{He}$ в растворе $x\rho_3$.

Уравнение непрерывности двухжидкостной гидродинамики [4]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s + \rho_n) + \text{div}(\rho_s \mathbf{V}_s + \rho_n \mathbf{V}_n) = 0, \quad (7)$$

при постоянных и однородных плотностях ρ_s и ρ_n и при условии полного увлечения сверхтекучей компоненты нормальной компонентой (см. ниже), для аксиально-симметричных потоков принимает вид

$$\text{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{V}_n = \mathbf{V}_s$. Отсюда следует, что сходящиеся радиальные потоки с гидродинамической скоростью внутри домена,

$$V_r(r) = -\beta r, \quad (9)$$

могут быть скомпенсированы восходящим вертикальным потоком с нарастающей линейно по высоте и однородной по r аксиальной скоростью

$$V_z(z) = V_{z0} + \alpha z, \quad (10)$$

если параметры α и β связаны соотношением

$$\alpha - 2\beta = 0. \quad (11)$$

Покажем, что при таких условиях внутри доменов распада могут зарождаться и развиваться гидродинамические вихри с «твердотельным» вращением жидкости с азимутальной скоростью $V_\phi(r) \sim r$ и нарастающей во времени угловой скоростью $\omega(t)$.

3. Зарождение гидродинамического вихря внутри цилиндрического домена распада

Будем исходить из хорошо известных уравнений двухжидкостной гидродинамики для сверхтекучей квантовой жидкости [4]

$$\begin{aligned} & \rho_s \left[\frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} + (\mathbf{V}_s \nabla) \mathbf{V}_s \right] = \\ & = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla P + \frac{\rho_s \rho_n}{2\rho} \nabla (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2 + \rho_s \sigma_n \nabla T + \rho_s \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \rho_n \left[\frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t} + (\mathbf{V}_n \nabla) \mathbf{V}_n \right] = -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla P - \\ & - \frac{\rho_s \rho_n}{2\rho} \nabla (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2 - \rho_n \sigma_n \nabla T + \eta_n \Delta \mathbf{V}_n + \rho_n \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (13)$$

где σ_n и η_n — плотность энтропии и коэффициент вязкости нормальной компоненты, а \mathbf{g} — ускорение силы тяжести, направленное вниз в направлении, противоположном оси z .

Рассмотрим аксиально-симметричные гидродинамические потоки в доменах цилиндрической формы. В цилиндрических координатах уравнения (12), (13) принимают вид [14]

$$\frac{\partial V_{sr}}{\partial t} + V_{sr} \frac{\partial V_{sr}}{\partial r} - \frac{V_{s\varphi}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\rho_n}{2\rho} \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2, \quad (14)$$

$$\frac{\partial V_{s\varphi}}{\partial t} + V_{sr} \frac{\partial V_{s\varphi}}{\partial r} + \frac{V_{sr} V_{s\varphi}}{r} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial V_{sz}}{\partial t} + V_{sz} \frac{\partial V_{sz}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\rho_n}{2\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2 - g, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{nr}}{\partial t} + V_{nr} \frac{\partial V_{nr}}{\partial r} - \frac{V_{n\varphi}^2}{r} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \\ & -\frac{\rho_s}{2\rho} \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2 + \nu_n \left(\frac{\partial^2 V_{nr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{nr}}{\partial r} - \frac{V_{nr}}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{n\varphi}}{\partial t} + V_{nr} \frac{\partial V_{n\varphi}}{\partial r} + \frac{V_{nr} V_{n\varphi}}{r} = \\ = \nu_n \left(\frac{\partial^2 V_{n\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{n\varphi}}{\partial r} - \frac{V_{n\varphi}}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{nz}}{\partial t} + V_{nz} \frac{\partial V_{nz}}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\rho_s}{2\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2 + \nu_n \frac{\partial^2 V_{nz}}{\partial z^2} - g. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $\nu_n = \eta_n / \rho_n$ — коэффициент кинематической вязкости нормальной компоненты. Температура считается однородной ($\nabla T = 0$) и предполагается, что радиальные (V_{sr}, V_{nr}) и азимутальные ($V_{s\varphi}, V_{n\varphi}$) компоненты скорости зависят от координаты r и времени t , а аксиальные компоненты скорости (V_{sz}, V_{nz}) — от z и t .

Следует подчеркнуть, что в криволинейных координатах эффекты вязкости для несжимаемой жидкости в уравнении Навье–Стокса не описываются простым лапласианом скорости $\nu \Delta \mathbf{V}$, а содержат дополнительные слагаемые (см. [14,15]). В частности, в цилиндрических координатах даже для аксиально-симметричного течения вязкое слагаемое определяется выражением, которое соответствует лапласиану аксиально-несимметричного течения со скоростями $V_r(r, \varphi) = u(r)e^{i\varphi}$ и $V_\varphi(r, \varphi) = \omega(r)e^{i\varphi}$, где φ — фаза, совпадающая с азимутальным углом при обходе по замкнутому контуру (например, при

вычислении циркуляции скорости) и аналогичная фаза Бэри в двумерных волновых (квантовых) системах. Именно благодаря этому для вихревого вращения вязкой несжимаемой жидкости с азимутальной скоростью $V_\varphi(r) \sim r$ или $V_\varphi(r) \sim r^{-1}$ член, описывающий вязкость в уравнении Навье–Стокса, в точности равен нулю (так называемый вихрь Рэнкина [15]).

Будем рассматривать вихревые течения внутри и вне цилиндрического домена радиуса R_0 и высотой h в присутствии сходящихся радиальных потоков и восходящих вертикальных потоков, которые обеспечивают постоянство плотности и состава раствора ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ в процессе распада. Координатные зависимости аксиальных V_{sz}, V_{nz} , азимутальных $V_{s\varphi}, V_{n\varphi}$ и радиальных V_{sr}, V_{nr} скоростей выбираем в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_{n,sz}(z) = V_{n,sz}(0) + \alpha_{n,s} z, \quad 0 \leq z \leq h; \quad r \leq R_0, \\ V_{n,s\varphi}(r) = \begin{cases} \omega_{n,s} r, & r \leq R_0 \\ \omega_{n,s} R_0^2 / r, & r > R_0 \end{cases} \\ V_{n,sr} = \begin{cases} -\beta_{n,s} r, & r \leq R_0 \\ -\beta_{n,s} R_0^2 / r, & r > R_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

где $\omega_{n,s}$ — угловые скорости вращения или завихренности сверхтекучей и нормальной компонент, а $\alpha_{n,s}$ и $\beta_{n,s}$ — параметры, определяющие плотности вертикальных и радиальных потоков. Легко видеть, что подстановка выражений для $V_{nz}(z)$, $V_{n\varphi}(r)$ и $V_{nr}(r)$, соответствующих (20), в уравнения (14)–(19) приводит к тождественному обращению в нуль членов, которые описывают вязкость нормальной компоненты. В этом случае уравнения (14), (17) и (16), (19) отличаются друг от друга только знаком и коэффициентом перед разностным градиентным членом $\partial/\partial r (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2$, а уравнения (15) и (18) полностью идентичны.

Отсюда следует, что точным решением уравнений (14)–(19) для вихревого движения со скоростями (20) является такое частное решение, которое соответствует полному увлечению сверхтекучей компоненты нормальной компонентой, когда $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_n = \mathbf{V}$, т.е. в (20) можно положить

$$\alpha_s = \alpha_n = \alpha; \quad \beta_s = \beta_n = \beta; \quad \omega_s = \omega_n = \omega. \quad (21)$$

При этом уравнение непрерывности несжимаемой жидкости (8) сводится к соотношению (11), а уравнения (14)–(19) в области $r \leq R_0$ и $0 \leq z \leq h$, согласно (20) и (21), приводятся к следующему виду:

$$-\frac{d\beta}{dt} + \beta^2 - \omega^2 = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (22)$$

$$\frac{d\omega}{dt} - 2\beta\omega = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} + \alpha^2 = -\frac{1}{z\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g}{z}. \quad (24)$$

Полагая $\alpha = 2\beta = \text{const}$, из уравнений (22) и (24) находим распределение давления внутри домена

$$\tilde{P}(r, z, t) = P_0(t) + \rho \left\{ \frac{r^2}{2} [\omega^2(t) - \beta^2] - 2\beta^2 z^2 - gz \right\}. \quad (25)$$

Из уравнения (23) следует, что при ненулевой начальной завихренности жидкости $\omega(0) \neq 0$ ее угловая скорость «твердотельного» вращения $V_\varphi(r, t) = \omega(t)r$ нарастает во времени по экспоненциальному закону:

$$\omega(t) = \omega(0)e^{2\beta t}. \quad (26)$$

Во внешней области $r > R_0$, согласно (20), конвективное $V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r}$ и кориолисово $V_r V_\varphi / r$ ускорения в левых частях уравнений (15) и (18) имеют противоположные знаки и в точности компенсируют друг друга, так что $d\omega/dt = 0$ и $\omega = \omega(0)$.

Это означает, что по мере ускорения вращения жидкости внутри домена, согласно (26), на его границе при $r = R_0$ увеличивается разрыв (скачок) азимутальной скорости $V_\varphi(r)$. Такой нарастающий скачок тангенциальной скорости должен приводить к неустойчивости поверхностных возмущений на границе [14] и быстрому развитию мелкомасштабной турбулентности с аномально большим турбулентным коэффициентом вязкости $\nu_n^* \gg \nu_n$ [16].

Распределение давления в области $r > R_0$, где $V_{s,nz} = 0$, согласно (14) или (17), имеет вид

$$P(r, z, t) = P_\infty - \frac{R_0^2}{2r^2} \rho [\omega^2(0) + \beta^2] - \rho gz, \quad (27)$$

где P_∞ — равновесное давление в окружающем растворе ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$. Из условия равенства давлений (25) и (27) находим давление на его оси ($r = 0$)

$$P_0(t) = P_\infty - \rho R_0^2 \omega^2(t). \quad (28)$$

Отсюда следует, что давление на оси вихря экспоненциально падает по мере увеличения скорости вращения жидкости, что может сказаться на изменении (увеличении) скорости распада раствора внутри домена.

Система уравнений (22)–(24) имеет еще одно простое автомодельное решение [16]:

$$\omega(t) = \frac{1}{t_0 - t}, \quad \alpha(t) = 2\beta(t) = \frac{2}{t_0 - t}, \quad t_0 = \frac{1}{\omega(0)}, \quad (29)$$

которое соответствует нелинейной неустойчивости «взрывного» типа, когда за конечный отрезок времени t_0 достигаются формально бесконечные значения скоростей. Распределение давления в сердцевине вихря в этом случае имеет вид

$$P(r, z, t) = P_0 + \rho \frac{\left(\frac{5}{8} r^2 - z^2 \right)}{(t_0 - t)^2} - \rho gz. \quad (30)$$

Время развития этой неустойчивости определяется начальной завихренностью $\omega(0) \neq 0$, т.е. случайными отклонениями формы доменов от цилиндрической и асимметрией сходящихся радиальных потоков либо общей завихренностью жидкости (например, за счет вращения Земли).

4. Сферический докритический зародыш

Рассмотрим докритический зародыш (домен распада) сферической формы радиуса R_0 в объеме пересыщенного раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$. Аксиально-симметричное вращение несжимаемой вязкой жидкости (нормальной компоненты) внутри сферы $r \leq R_0$ с азимутальной скоростью V_φ при наличии радиальных потоков со скоростью V_r , но в отсутствие меридиональных течений, когда полярная составляющая скорости $V_\theta = 0$, описывается следующей системой уравнений Навье–Стокса в сферических координатах [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_\varphi^2}{r} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{2V_r}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_r V_\varphi}{r} = \\ = \nu \left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\sin \theta V_\varphi) - \frac{V_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{V_\varphi^2}{r} \text{ctg} \theta = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta}. \quad (33)$$

Здесь, как и ранее, предполагается, что происходит полное увлечение сверхтекучей компоненты нормальной компонентой ($\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_n$), а уравнения движения сверхтекучей компоненты отличаются от (31)–(33) только отсутствием вязкости ($\nu = 0$). В уравнениях (32) и (33) учтена возможная зависимость V_φ и P от полярного угла θ (см. ниже).

Уход ${}^3\text{He}$ из объема распадающегося раствора внутри домена будем описывать как объемный сток

вещества с некоторым характерным временем $\tau = \gamma_0^{-1}$. Тогда уравнение непрерывности принимает вид [16]

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r} V_r = -\frac{1}{\tau}, \quad (34)$$

откуда следует, что радиальная скорость сходящегося потока, стремящегося выровнять химический потенциал и концентрацию ${}^3\text{He}$ внутри домена, равна:

$$V_r(r) = -\beta r; \quad \beta = \frac{1}{3\tau}. \quad (35)$$

Легко видеть, что для такой радиальной скорости член в правой части уравнения (31), описывающий вязкость, обращается в нуль.

Для нахождения радиальной и угловой зависимостей азимутальной скорости $V_\varphi(r, \theta)$, которая обращает в нуль правую часть уравнения (32), зададим ее в виде $V_\varphi = \omega r f(\theta)$. Тогда для функции $f(\theta)$, получим уравнение Лежандра для присоединенного полинома $P_n^m(\theta)$ при $m = n = 1$:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\sin \theta f(\theta)] - \frac{f(\theta)}{\sin^2 \theta} + 2f(\theta) = 0. \quad (36)$$

Решение этого уравнения имеет вид $f(\theta) = \sin \theta$. Таким образом, азимутальные скорости нормальной и сверхтекучей компонент равны:

$$V_\varphi(r, \theta) = \omega r \sin \theta. \quad (37)$$

Подстановка (37) в левую часть уравнения (32) приводит к следующему выражению для угловой скорости как функции времени:

$$\omega(t) = \omega(0) e^{2t/3\tau}. \quad (38)$$

При этом распределение давления, автоматически удовлетворяющее уравнениям (31) и (33), с учетом (35) и (37) имеет вид

$$P(r, \theta, t) = P_0 - \frac{\rho r^2}{2} \left[\frac{1}{9\tau^2} - \omega^2(t) \sin^2 \theta \right]. \quad (39)$$

Таким образом, и внутри сферических доменов возможно экспоненциальное ускорение вихревого вращения несжимаемой жидкости при условии полного увлечения сверхтекучей компоненты нормальной компонентой.

В то же время ускорение вращения сверхтекучей компоненты как в сферическом, так и в цилиндрическом домене должно приводить к процессу ускоренного рождения квантовых вихрей. Число последних n определяется соотношением $n = m_4 \Gamma / h$, где m_4 — масса атома ${}^4\text{He}$, h — постоянная Планка, а Γ — циркуляция скорости, равная $\Gamma(t) = \omega(t) R_0^2$ и экспоненциально нарастающая во времени, согласно (26) и (38). Однако рождение каждого квантового вихря уменьшает суммарную циркуляцию сверхтекучей компоненты на величину кванта циркуляции

$\kappa = h/m_4$ и, таким образом, замедляет вращение сверхтекучей жидкости.

Это значит, что в результате рождения квантовых вихрей сверхтекучая компонента будет «тормозить» нормальную компоненту за счет взаимного увлечения, пропорционального величине градиента $\nabla(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2$, а также благодаря дополнительному «сцеплению» через квантовые вихри [5]. Этот процесс, наряду с диссипативными эффектами на границе $r = R_0$, должен приводить к замедлению ускорения макроскопического гидродинамического вихря внутри домена распада, а затем к его торможению и затуханию.

Однако квантовые вихри (или вихревые кольца) продолжают существовать в сверхтекучей компоненте даже после ее остановки и, захватывая своими нормальными корама атомы ${}^3\text{He}$, становятся протяженными центрами гетерогенного распада раствора ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ во всем объеме [7–9].

Выводы

Рождающиеся спонтанно в пересыщенном (при данных давлениях и температурах) растворе ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ докритические зародыши расслоения (домены распада) могут становиться центрами рождения гидродинамических вихрей при ненулевой локальной или глобальной (например, за счет вращения Земли) завихренности жидкости. Ускорение вихревого «твердотельного» вращения несжимаемой жидкости с азимутальной скоростью $V_\varphi = \omega r$ внутри домена обусловлено совместным действием конвективной и кориолисовой сил при наличии сходящегося радиального потока со скоростью $V_r = -\beta r$, которая связана уравнением непрерывности с нарастающей по высоте скоростью восходящего вертикального потока $V_z = V_{z0} + \alpha z$. Такие потоки возникают благодаря химическому и динамическому равновесию между доменами распада и окружающим метастабильным раствором ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ и компенсируют уход легкой компоненты ${}^3\text{He}$ из объема домена за счет ее всплытия на поверхность в поле тяжести Земли. В зависимости от условий распада раствора внутри доменов ускорение вихрей может происходить как по экспоненциальному закону, так и по сценарию нелинейной «взрывной» неустойчивости, аналогично рассмотренному в [16] механизму зарождения и развития мощных атмосферных вихрей — торнадо и тайфунов — при формировании плотных облачных систем в процессе интенсивной конденсации водяного пара во влажном воздухе, охлажденном ниже точки росы.

Благоприятным для возникновения и существования таких вихрей является обращение в нуль членов, описывающих вязкость в уравнениях Навье–Стокса, при аксиально-симметричном гидродинамическом

движении несжимаемой жидкости со скоростями (20) в случае цилиндрической симметрии и (35), (37) для сферической симметрии. Такие течения соответствуют минимальной диссипации энергии (т.е. минимуму производства энтропии) и поэтому относительно легко реализуются в соответствующих естественных условиях. Возникновение и развитие таких гидродинамических вихрей в распадающихся растворах ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ приводит к рождению квантовых вихрей в сверхтекучей компоненте и, как следствие, к ускорению процесса распада (расслоения) раствора [4] по сравнению с гомогенным распадом [12].

Непосредственное наблюдение мелкомасштабной вихревой турбулентности в быстро распадающемся растворе ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ вблизи трикритической точки с помощью оптических методов [13] подтверждает реальность данного механизма гетерогенного распада раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ как внутри докритических зародышей, так и на квантовых вихрях с захваченными атомами ${}^3\text{He}$.

В заключение выражаем искреннюю благодарность Э.Я. Рудаевскому за многочисленные плодотворные дискуссии и исчерпывающую информацию по результатам экспериментальных наблюдений процесса расслоения раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$. Один из авторов (Э.А.П.) выражает благодарность Немецкому исследовательскому обществу (DFG) за финансовую поддержку работы, а также лично д-ру Michael Weugauch за организацию визита в физико-техническое государственное бюро (РТВ), Брауншвайг (Германия) и за полезные научные дискуссии.

1. Т.П. Птуха, *ЖЭТФ* **34**, 33 (1958).
2. Б.Н. Есельсон, В.Н. Григорьев, В.Г. Иванцов, Э.Я. Рудаевский, Д.Г. Санинидзе, И.А. Сербин, *Раствор квантовых жидкостей ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$* , Наука, Москва (1973).
3. В.А. Михеев, Э.Я. Рудаевский, В.К. Чаговец, Г.А. Шешин, *ФНТ* **18**, 1091 (1992); Е.Я. Rudavskii *et al. J. Low Temp. Phys.* **113**, 1005 (1998).
4. И.М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Физматгиз, Москва (1971).
5. И.Л. Бекаревич, И.М. Халатников, *ЖЭТФ* **40**, 920 (1961).
6. L. Onsager, *Nuovo Cimento*, Suppl. 6, 279 (1949).
7. Л.С. Реут, И.З. Фишер, *ЖЭТФ* **55**, 722 (1968).
8. D.M. Jezek, M. Guilleumas, M. Pi, and M. Barranco, *Phys. Rev.* **B51**, 11981 (1995).
9. S. Burmistrov, L. Dubovskii, and T. Satoh, *J. Low Temp. Phys.* **110**, 479 (1998).

10. T. Satoh, M. Morishita, M. Ogata, A. Sawada, and T. Kuroda, *Physica* **B169**, 513 (1991).
11. В.А. Михеев, Э.Я. Рудаевский, В.К. Чаговец, Г.А. Шешин, *ФНТ* **17**, 444 (1991).
12. И.М. Лифшиц, В.Н. Полесский, В.А. Хохлов, *ЖЭТФ* **74**, 268 (1978).
13. J.K. Hoffer, L.J. Campbell, and R.J. Bartlett. *Phys. Rev. Lett.* **45**, 912 (1980).
14. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1975).
15. P.K. Kundu, *Fluid Mechanics*, Acad. Press Inc. (1990).
16. Э.А. Пашицкий, *Прикладная гидромеханика*, **4(76)**, 50 (2002).

The formation of vortices in the process of separation into layers of supersaturated ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ solution

E.A. Pashitskii, V.N. Mal'nev, and R.A. Naryshkin

It is shown that the subcritical nuclei of separation into layers (decay domains) spontaneously formed in the supersaturated ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ solution may be the centers of formation of hydrodynamic vortices at a nonzero local or global vorticity of the liquid. The acceleration of solid rotation of the incompressible liquid inside a domain is conditioned by the joint action of the convection and Coriolis forces and takes place with a convergent radial flow. The velocity of this flow is connected by the continuity equation with the velocity of rising vertical flow that increases with height. Such flows appear due to the chemical and dynamical equilibrium between the domains of decay and the metastable ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ solution and compensate the yield of the light component ${}^3\text{He}$ from the bulk that emerges to the liquid surface in the Earth gravity field. Depending on the conditions of the solution decay inside the domains, the acceleration of vortices may occur both by to the exponential law and by the scenario of the nonlinear «explosive» instability. The formation and development of such hydrodynamic vortices in the decaying ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ solutions give rise to quantum vortices in the superfluid component and, as a consequence, promote the acceleration of heterogeneous decay of the solution compared to the homogeneous one.